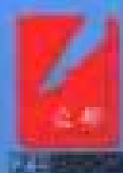
高校经典教材配套考研辅导系列

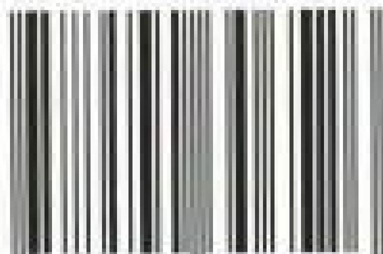
数学分析题解精粹

钱吉林 等主编

崇文书局



策　　划：程道华
责任编辑：王重阳
封面设计：众　邦



ISBN 7-5403-0652-1/G·443
定价：28.80元

高校经典教材配套考研辅导系列

数学分析题解精粹

钱吉林　等主编

崇文书局

(鄂)新登字07号

图书在版编目(CIP)数据

数学分析题解精粹/钱吉林主编.—武汉：
崇文书局，2003

ISBN 7-5403-0652-1

Ⅰ.数学分析… Ⅱ.钱… Ⅲ.数学分析－高等学校－
解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第068265号

出版发行：崇文书局
(武汉市
印　　刷：汉川市
开　　本：850X116
印　　张：19
版　　次：2003年8月第1版
印　　次：2003年10月第2次印刷
字　　数：476千字
定　　价：28.80元

数学分析题解精粹

编委会名单

前 言

众所周知，任何高深的数学方法都是把复杂的数学对象转化为数学分析与高等代数中的问题进行处理。因而，掌握数学分析与高等代数的知识，打好扎实的数学基础，必将终生受益。

随着全球经济一体化的进程的加快，企业人才竞争也步入国际化，优胜劣汰将更趋明朗公开。为适应竞争，大家均需充电，以期提高素质和提升学历。本书旨在帮助学生对教材中的考点融会贯通，给考研人员以更丰富更实用的题解信息，其特点有：

1. **罕见的试题**：本书所列试题很多没对外发表过，是各院校秘而不宣的内部资料，诸多考生常常为获取这些试题而煞费苦心。本书试题涉及北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、武汉大学和中国科学院等近百所名牌权威院府。

2. **经典的解析**：本书的作者根据多年的经验积累，对各种考题作了双向归纳：一是对考题的题型作了归纳，二是对考题的解法作了归纳。希望达到抛砖引玉的效果，使考生能由此及彼，举一反三，从而在考试时应付裕如。

3. **便捷的结构**：全书共分 10 章，章下面是

节，每节又分若干个考点。这对于考研人员是一本精美完整的综合复习资料。学生可通过章节，迅速找到自己所需要的内容，思路明晰，重点突出。

由于本书集知识性、资料性、方法性、应考性于一体，它不仅是考研人员的良师益友，更是理科、工科、经济类的学生学习《数学分析》与《高等数学》的参考书，也是高校数学教师的数学参考资料。本书末尾还附有两套《数学分析》考研模拟试题(含答案)，一并提供参考。

在本书的编写出版过程中，武汉众邦考试教育研究所所长宋谨硕士提出了良好的构想，薛厚明先生做了大量的工作，众多同仁给予了大力支持，在此一并致谢。

本书的目标是：提供信息，帮您领先一步！

钱吉林

2003 年 8 月于桂子山

目　　录

第一章　函　　数 …………………………………………………… (1)
§1　函数的概念 ………………………………………………… (1)
§2　函数的性质 ………………………………………………… (7)
第二章　极　　限 …………………………………………………… (18)
§1　数列的极限 ………………………………………………… (18)
§2　函数的极限 ………………………………………………… (80)
第三章　函数的连续性 …………………………………………… (109)
§1　连续与一致连续 …………………………………………… (109)
§2　连续函数的性质 …………………………………………… (133)
第四章　导数、中值定理及导数的应用 ………………………… (153)
§1　导数与微分 ………………………………………………… (153)
§2　中值定理与导数的应用 …………………………………… (187)
第五章　不定积分 ………………………………………………… (249)
§1　概念与基本公式 …………………………………………… (249)
§2　不定积分的求法 …………………………………………… (251)
第六章　定积分 …………………………………………………… (260)
§1　定积分的计算 ……………………………………………… (260)

§2　反常积分 …………………………………………………… (296)

§3　含参变量积分 ……………………………………………… (322)

第七章　级　　数 ……………………………………………… (344)

§1　数项级数 …………………………………………………… (344)

§2　函数项级数 ………………………………………………… (358)

§3　幂级数 ……………………………………………………… (388)

§4　傅里叶级数 ………………………………………………… (407)

第八章　多元函数微分学 ……………………………………… (422)

§1　多元函数的极限与连续 …………………………………… (422)

§2　偏导数与全微分 …………………………………………… (435)

§3　多元微分学的应用 ………………………………………… (469)

第九章　重积分 ………………………………………………… (493)

§1　二重积分 …………………………………………………… (493)

§2　三重积分 …………………………………………………… (523)

第十章　曲线积分与曲面积分 ………………………………… (546)

§1　第一型曲线积分与曲面积分 ……………………………… (546)

§2　第二型曲线积分与曲面积分 ……………………………… (559)

附录　模拟试题及答案 ………………………………………… (592)

第一章　函　　数

§1　函数的概念

【考点综述】

一、综述

1.邻域(1)$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$称为$a$的$\delta$邻域,其中$\delta>0$.

(2)$U^{\circ}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$称为$a$的空心$\delta$邻域,其中$\delta>0$.

(3)$U^{\circ}_{+}(a)=(a,a+\delta)$和$U^{\circ}_{-}(a)=(a-\delta,a)$分别称为$a$的$\delta$右邻域和左邻域,其中$\delta>0$.

2.确界　设给定数集S,

(1)上确界　若存在数η,满足1)　$x\leqslant\eta,\forall x\in S$;2)$\forall\alpha<\eta$,都存在$x_0\in S$,使$x_0>\alpha$,则称$\eta$为$S$的上确界,记为$\eta=\sup\limits_{x\in S}x$.

(2)下确界　若存在数ξ,满足1)$x\geqslant\xi,\forall x\in S$;2)$\forall\beta>\xi$,都存在$y_0\in S$,使$y_0<\beta$,则称$\xi$为$S$的下确界,记为$\xi=\inf\limits_{x\in S}x$.

(3)确界原理　1)非空有上(下)界的数集,必有上(下)确界.2)若数集有上(下)确界,则上(下)确界一定是唯一的.

3.函数　(1)函数定义　给定两个非空实数集D和M,若有一个对应法则f,使D内每一个数x,都有唯一的一个数$y\in M$与它对应,则称f是定义在D上的一个函数,记为$y=f(x),x\in D$,并称D为函数的定义域,称$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$为函数的值域.

(2)几个重要的函数

1)分段函数　函数在其定义域的不同部分用不同公式表达的这类函数,常称为分段函数.

2)符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

3) 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x \text{ 为有理数},\\0,\text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

4) 黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},\text{当 } x=\dfrac{p}{q},x\in(0,1),\dfrac{p}{q} \text{ 为既约分数},\\0,\text{当 } x=0,1 \text{ 和}(0,1)\text{ 中的无理数}.\end{cases}$$

5) 复合函数

$y=f(g(x)),x\in E^*$,

其中 $y=f(u),u\in D,u=g(x),x\in E,E^*=\{x\mid g(x)\in D,x\in E\}\neq\emptyset$.

(3) 反函数　已知函数 $u=f(x),x\in D$,若对 $\forall y_0\in f(D)$,在 D 中有且只有一个值 x_0,使得 $f(x_0)=y_0$,则按此对应法则得到一个函数 $x=f^{-1}(y),y\in f(D)$. 称这个函数 $f^{-1}:f(D)\to D$ 为 f 的反函数.

(4) 初等函数

1) 基本初等函数　常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数称为基本初等函数.

2) 初等函数　由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数,统称为初等函数.

3) 凡不是初等函数的函数,都称为非初等函数.

二、解题方法

1. 考点 1　求函数的定义域,它的解法如下:

(1) 已知函数表达式,求定义域. 常用方法是解不等式组.(见下面第 2 题)

(2) 已知抽象函数的定义域,求复合函数的定义域. 常用方法也是解不等式组.(见下面第 7 题和第 12 题).

2. 考点 2　求函数值及函数的值域. 它的解法如下:

(1) 求函数值. 常用方法是代入法(见下面第 2 题).

(2) 求函数表达式. 求复合函数的表达式常用方法也是代入法. 途径有两种,一种是由外向内(见下面第 3 题);另一种是由内向外(见下面第 2 题). 求函数表达式时,也可用图像法(见下面第 16 题).

(3) 求函数值域. 常用方法是求函数的最大值与最小值(见下面第 6 题).

3. 考点 3　求上下确界或证明确界的性质. 常用方法是利用确界的定义(见下面第 1 题).

【经典题解】

1.(北京科技大学,1999 年)　叙述数集 A 的上确界的定义,并证明:对

任意有界数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，总有$\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$.　　①

解　若存在数a满足下面两条：

(1) $\forall x\in A$，都有$x\leqslant a$；

(2) $\forall b<a$，一定存在$x_0\in A$，有$x_0>b$.则称a为数集A的上确界，即$\sup A=a$.

再证①式.令$a=\sup\{x_n\}$，$b=\sup\{y_n\}$，则$x_n\leqslant a$，$y_n\leqslant b$，$(n=1,2\cdots)$

$\therefore x_n+y_n\leqslant a+b$，$(n=1,2,\cdots)$

$\therefore\sup\{x_n+y_n\}\leqslant a+b=\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$.

2.(中国人民大学)　设$f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，求$f(x)$的定义域和$f[f(-7)]$.

解　由$3-x>0$，$3-x\neq 1$，$49-x^2\geqslant 0$，解得$x\in[-7,2)\cup(2,3)$，从而$f(x)$的定义域为$[-7,2)\cup(2,3)$.

$$f(-7)=\frac{1}{\lg 10}=1,\therefore f(f(-7))=\frac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}.$$

3.(海军工程学院)　设$f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$，$(-\infty<x<+\infty)$，

$$g(x)=\begin{cases}x,x<0,\\x^2,x\geqslant 0.\end{cases}$$求$f[g(x)]$.

解　$$f[g(x)]=\frac{g(x)+|g(x)|}{2}=\begin{cases}\dfrac{x+(-x)}{2}=0,x<0\\\dfrac{x^2+x^2}{2}=x^2,x\geqslant 0.\end{cases}$$

4.(南京邮电学院，兰州铁道学院)　已知$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，设$f_n(x)=f\{f[\cdots(f(x))\cdots]\}$($n$个$f$)，求$f_n(x)$.

解　令$f_1(x)=f(x)$，可用数学归纳法证明$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.　　①

当$n=1$时，显然①式成立.

假设当$n=k$时，①式成立，当$n=k+1$时，

$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

即对$n=k+1$①式也成立，即证①式.

5.(高数二,2001 年)　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则 $f\{f[f(x)]\}=$ (　　)

A.0.　　B.1.　　C.$\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　　D.$\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

答　B.$\because |f(x)|\leqslant 1,\therefore f[f(x)]=1,f\{f[f(x)]\}=f(1)=1$.

6.求函数 $y=\lg(1-2\cos x)$ 的定义域和值域.

解　由 $1-2\cos x>0$,可得 $\cos x<\frac{1}{2}$,解得函数的定义域为

$D=\left\{x \mid 2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3},k\in Z\right\}$.

又因为 $\max\limits_{x\in D}(1-2\cos x)=1-(-2)=3,\inf\limits_{x\in D}(1-2\cos x)=0$.

所以函数的值域:$f(D)=(-\infty,\lg 3]$.

7.已知 $y=f(2^x)$ 的定义域为 $[-1,1]$,求 $y=f(log_2 x)+f(x-1)$ 的定义域.

解　$\because -1\leqslant x\leqslant 1,\therefore \frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2$,即 $f(x)$ 的定义域为 $[\frac{1}{2},2]$.

再由 $\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant log_2 x\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}\leqslant x-1\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,$\therefore$ 所求定义域为 $[\frac{3}{2},3]$.

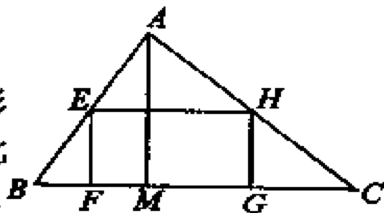
8.已知 $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2},(-1<x\leqslant 0)$,求 $f^{-1}(x)$.

解　由 $y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2},(-1<x\leqslant 0)$,$\therefore \begin{cases}4-x^2=4y^2,\\ x\leqslant 0.\end{cases}$

解得 $x=-2\sqrt{1-y^2}$,互换 x,y 得 $y=-2\sqrt{1-x^2}$.当 $-1<x\leqslant 0$,$y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1]$.

$\therefore f^{-1}(x)=-2\sqrt{1-x^2},x\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1]$.

9.如图在底 $BC=b$,和高为 $AM=h$ 的三角形 ABC 中,内接一个高为 $EF=x$ 的矩形 $EFGH$,设此矩形的周长为 L,面积为 S,将 L 与 S 表成 x 的函数.



第 9 题图

解　(1)$\because EH:b=(h-x):h$,

$\therefore EH=b(1-\frac{x}{h})$.

$L = 2(EH + EF) = 2(1 - \frac{b}{h})x + 2b,(0 < x < h).$

(2)$S = EF \cdot EH = bx(1 - \frac{x}{h}),(0 < x < h).$

10. 解不等式　$|x + 2| + |x - 2| \leqslant 12.$

解　当 $x \leqslant -2$ 时，原不等式变为

$-(x + 2) + 2 - x \leqslant 12, \therefore x \geqslant -6$，此即 $-6 \leqslant x \leqslant -2.$　①

当 $-2 < x \leqslant 2$ 时，原不等式变为

$x + 2 + 2 - x \leqslant 12, \therefore -2 < x \leqslant 2.$　②

当 $x > 2$ 时，原不等式变为

$x + 2 + x - 2 \leqslant 12, \therefore x \leqslant 6$，此即 $2 < x \leqslant 6.$　③

由 ①、②、③ 可得原不等式的解集为$[-6,6]$

11. 设$\{xy\}$为所有 xy 乘积的集合，其中 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$，且 $x \geqslant 0$ 及 $y \geqslant 0$. 证明：$\sup\{x\} \cdot \sup\{y\} = \sup\{xy\}$.

证　设 $\sup\{x\} = a, \sup\{y\} = b$. 下证 $\sup\{xy\} = ab$.　①

$\because x \leqslant a, y \leqslant b \quad \therefore xy \leqslant ab, \quad \forall x \in \{x\}, y \in \{y\}.$　②

又 $x \geqslant 0, y \geqslant 0 \quad \therefore a \geqslant 0, b \geqslant 0.$

$\forall \varepsilon > 0$，可取 $\varepsilon_1 > 0$，且使 $\varepsilon > \varepsilon_1(a + b) - \varepsilon_1^2$，

$\therefore ab - \varepsilon < ab - [\varepsilon_1(a + b) - \varepsilon_1^2] = (a - \varepsilon_1)(b - \varepsilon_1).$　③

由 $\sup\{x\} = a, \sup\{x\} = b, \therefore$ 存在 $x_1 > a - \varepsilon_1 > 0, y_1 > b - \varepsilon_1 > 0.$

由 ③ 有 $x_1y_1 > (a - \varepsilon_1)(b - \varepsilon_1) > ab - \varepsilon.$　④

由 ③，④ 得证　$\sup\{xy\} = ab.$

12.（大连海运学院）　设函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，试求 $f(x + a) + f(x - a)$ 的定义域.

解　由题设有$\begin{cases}0 \leqslant x + a \leqslant 1,\\ 0 \leqslant x - a \leqslant 1.\end{cases}$当 $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ 时，所求定义域为 $[a, 1 - a]$；

当 $-\frac{1}{2} \leqslant a < 0$ 时，定义域为$[-a, 1 + a]$；

当 $a > \frac{1}{2}$ 或 $a < -\frac{1}{2}$ 时，其定义域为空集.

13.（华中理工大学）　设 $f(x) = \frac{x}{x - 1}$，试验证 $f\{f[f(f(x))]\} = x$，并求 $f[\frac{1}{f(x)}],(x \neq 0, x \neq 1).$

解　$f[f(x)] = \dfrac{f(x)}{f(x)-1} = \dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1} = x.$

$\therefore f\{f[f(f(x))]\} = f[f(x)] = x.$

又 $f(\dfrac{1}{f(x)}) = f(\dfrac{x-1}{x}) = \dfrac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1} = 1-x.$

14.（同济大学）　设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, x<0, \\ 1, x \geqslant 0. \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解　当 $x \geqslant 0$ 时，$f[f(x)] = f(1) = 1$.

当 $-1 \leqslant x < 0$ 时，$f[f(x)] = f(1+x) = 1$.

当 $x < -1$ 时，$f[f(x)] = f(1+x) = x+2$.

$\therefore f[f(x)] = \begin{cases} 1, \text{当 } x \geqslant -1 \text{ 时}, \\ x+2, \text{当 } x < -1 \text{ 时}. \end{cases}$

15.（西北工业大学）　设 $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2}}$，求：

(1) $f(x)$ 的定义域；(2) $\dfrac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2$；(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

解　(1) $f(x) = \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ \sqrt{2x}, x>0. \end{cases}$

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) $f[f(x)] = \sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x^2}} + \sqrt{(\sqrt{x+\sqrt{x^2}})^2}} = \sqrt{2\sqrt{x+\sqrt{x^2}}} = \sqrt{2f(x)}$.

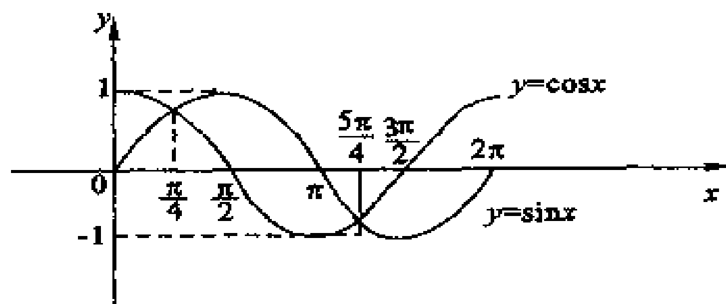
$\therefore \dfrac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2 = f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2}}$.

(3) $\because \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{0}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2x}}{x} = +\infty$,

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在.

16. 设 $f(x) = \sin x, x \in [0,2\pi]$，$g(x) = \cos x, x \in [0,2\pi]$，令 $G(x) = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\{f(x), g(x)\}$，$H(x) = \min\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\{f(x), g(x)\}$.

求 (1) $G(x)$，$H(x)$ 的表达式；(2) 当 $a \in (\dfrac{\pi}{2}, \pi)$ 时，求 $G(a)$ 和 $H(a)$.



第 16 题图

解　(1) 先作出 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象(如下)

$$\therefore C(x) = \begin{cases} \cos x, x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right], \\ \sin x, x \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right], \\ \cos x, x \in \left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right] \end{cases} \qquad ①$$

$$H(x) = \begin{cases} \sin x, x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right], \\ \cos x, x \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right], \\ \sin x, x \in \left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right] \end{cases} \qquad ②$$

(2) 由上面 ①,② 两式可知,当 $a \in (\frac{\pi}{2},\pi)$ 时,

$C(a) = \sin a, H(a) = \cos a$.

§2　函数的性质

【考点综述】

一、综述

1. 有界性　设 $y = f(x), x \in D$.

(1) 若存在数 M,使 $f(x) \leqslant M, \forall x \in D$,则称 f 是有上界的函数.

(2) 若存在数 L,使 $f(x) \geqslant L, \forall x \in D$,则称 f 是有下界的函数.

(3) 若存在常数 C,使 $|f(x)| \leqslant C$,则称 f 是有界函数.

(4) 若对任意数 M,都存在 $x_0 \in D$,使 $f(x_0) > M$,则称 f 是无上界函数,类似可定义无下界及无界函数.

2. 单调性　设 $y = f(x), x \in D$,若对 $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$,有

(1)$f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 f 在 D 上是递增函数.

(2)$f(x_1) < f(x_2)$,则称 f 在 D 上是严格递增函数.

类似可定义递减函数与严格递减函数.

3.奇偶性　设 D 是对称于原点的数集,$y = f(x), x \in D$.

(1)若 $\forall x \in D$,都有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数.

(2)若 $\forall x \in D$,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 是奇函数.

(3)奇函数图象关于原点对称,偶函数图像关于纵轴对称.

4.周期性(1)设 $y = f(x), x \in D$,若存在正数 k,使 $f(x) = f(x \pm k)$, $\forall x \in D$.则称 $f(x)$ 为周期函数,k 称为 f 的一个周期.

(2)若 f 的所有周期中,存在一个最小正周期,则为 f 的基本周期.

二、解题方法

1.考点1　周期函数的判定与性质应用(见下面第17、19题)

常用方法:猜想周期 T 并加以证明(第11题);用反证法证明不是周期函数(第18题).

2.考点2　函数奇偶性判定(见第20、24题)

常用方法:先看定义域是否关于原点对称(见第19题之(3)),再按定义验证等式 $f(-x) = f(x)$ 或 $f(-x) = -f(x)$(见第20、24题).

3.考点3　单调性判定及应用(见第23、25题)

常用方法:按定义(第21题);按图形(第20题);由导数正负确定(第25题).

【经典题解】

17.(清华大学)　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数,$f(1) = a$ 且对任何 x 值均有 $f(x+2) - f(x) = f(2)$.

(1)试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$;

(2)问 a 取什么值时,$f(x)$ 是以2为周期的周期函数.

解　(1)$\because f(x+2) = f(2) + f(x), \forall x \in (-\infty, +\infty)$,①

在①式中,令 $x = -1$.

$a = f(1) = f(-1+2) = f(2) + f(-1) = f(2) - f(1) = f(2) - a$,

$\therefore f(2) = 2a$.

$f(3) = f(1) + f(2) = 3a$.

$f(5) = f(2) + f(3) = 5a$.

(2)由①式知当且仅当 $f(2) = 0$,即 $a = 0$ 时,$f(x)$ 是以2为周期的周期函数.

18.(高数三)　$f(x) = |x \cdot \sin x| e^{\cos x}, (-\infty < x < +\infty)$ 是(　　)

A.有界函数.　　　　　　　　B.单调函数.

C.周期函数.　　　　　　　　D.偶函数.

答　D. $\because f(-x) = |-x\sin(-x)|e^{\cos(-x)} = f(x)$.

19.有下列几个命题

(1) 任何周期函数一定存在最小正周期.

(2)$[x]$是周期函数.

(3)$\sin\sqrt{x}$ 不是周期函数.

(4)$x\cos x$ 不是周期函数.

其中正确的命题有(　　)

A.1.　　　B.2个.　　　C.3个.　　　D.4个.

答　B.其中

(1) 错.比如 $f(x) = 0$.那么任何正实数都是它的周期,而无最小正实数.

(2) 错.设 $f(x) = [x]$ 的周期为 $T > 0$,并设$[T] = m \geqslant 0$.

当 $m = 0$ 时,则 $T = 1 - a$,其中 $0 < a < 1$.那么

$[a + T] = 1, [a] = 0, \therefore [a + T] \neq [a]$.

这与 T 为周期矛盾. $\therefore m \neq 0$.

当 $m > 0$ 时, $[T + 1] = m + 1, [1] = 1, \therefore [1 + T] \neq [1]$,也矛盾.

$\therefore [x]$ 不是周期函数.

(3) 对. $\because$ 若 $f(x)$ 是定义域 D 上周期函数,那么存在函数 T,使 $\forall x \in D$ 都有 $f(x \pm T) = f(x)$. 这必须有 $x \pm T \in D$. 而本题定义域 $D = [0, +\infty)$,若是周期函数,则 $0 \in D$,必须 $-T \in D$,但 $-T \notin D$. 故不是周期函数.

(4) 对.用反证法,设 $f(x) = x\cos x$ 的周期为 $T > 0$,则

$f(0) = 0 = f(T) = T\cos T$.

$\therefore \cos T = 0, T = n_o\pi + \frac{\pi}{2}, n_o \in Z$ 且 $n_o \geqslant 0$.

$f(\frac{\pi}{2} + T) = f(\pi + n_o\pi) = (n_o + 1)\pi\cos[(n_o + 1)\pi]$,

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$,由 $f(\frac{\pi}{2} + T) = f(\frac{\pi}{2})$,

$\therefore \cos(n_0 + 1)\pi = 0$,矛盾.

即证 $x\cos x$ 不是周期函数.

20.(高数一,1999年)　设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　)

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.

B. 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数.

D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数.

答　A. 先证 C 错. $\because F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + C_0$，其中 C_0 为某一常数. 令 $f(x) = 1 + \cos x$ 为周期 2π 的函数，而 $F(x) = x + \sin x + C_0$ 不是周期函数.

再证 D 错. 令 $f(x) = x$ 为单调增函数，而 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_0$ 不是单调增函数.

最后看 A 与 B，因为 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + C_0$，

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t + C_0 = -\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u + C_0 \qquad ①$$

当 $f(x)$ 为偶函数时，取 $C_0 \neq 0$，则由 ①

$$F(-x) = -\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + C_0 \neq -F(x).$$

即 $F(x)$ 不是奇函数，则 B 错.

当 $f(x)$ 为奇函数时，由 ① 式知 $F(-x) = F(x)$，$\therefore F(x)$ 是偶函数，故 A 对.

21. 设 $f(x)$，$g(x)$ 为区间 (a,b) 上递减函数，令

$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$，$G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$，

证明：$F(x)$，$G(x)$ 都是 (a,b) 上递减函数.

证　$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，$x_1 < x_2$，则由

$$F(x_1) = \max\{f(x_1), g(x_1)\} \geqslant \max\{f(x_2), g(x_2)\} = F(x_2).$$

$$G(x_1) = \min\{f(x_1), g(x_1)\} \geqslant \min\{f(x_2), g(x_2)\} = G(x_2).$$

即证 $F(x)$，$G(x)$ 都是 (a,b) 上递减函数.

22. 已知 $y = f(x)$ 的图形（如图），试作下列各函数的图形：

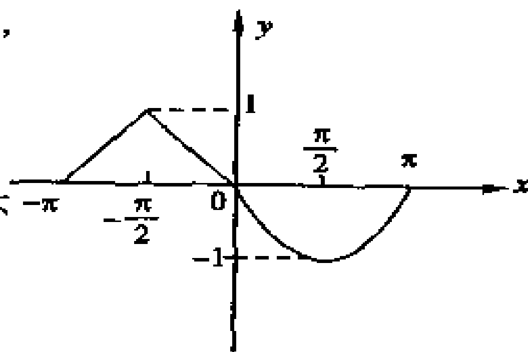
(1) $y = -f(x)$；

(2) $y = |f(x)|$；

(3) $y = [f(x)] + 1$ 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数；

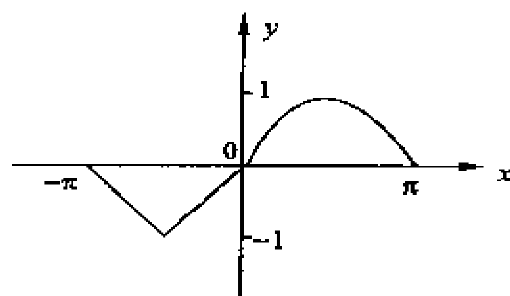
(4) $y = \mathrm{sgn}(f(x))$；

(5) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$.

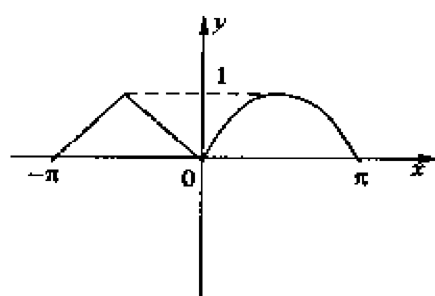


第 22 题图

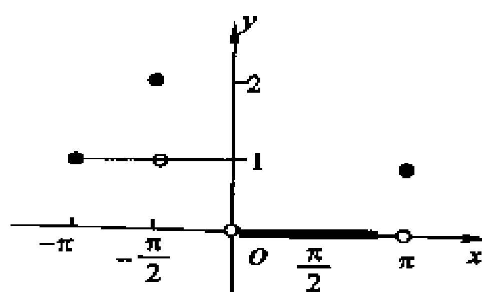
解　它们的图形分别如下：



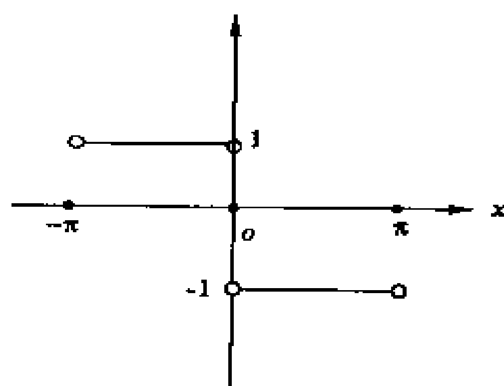
(1)



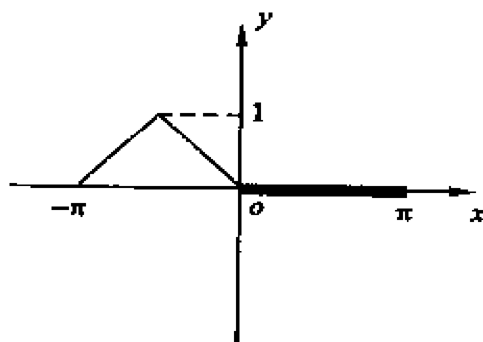
(2)



(3)

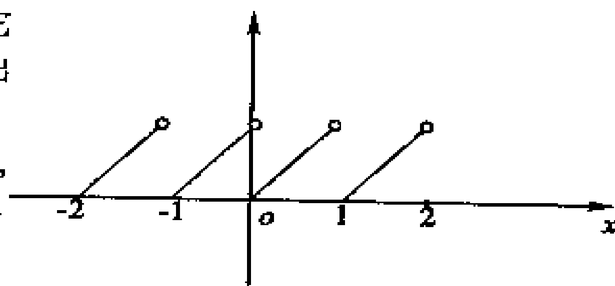


(4)



23. 设$f(x) = x - [x]$,讨论它的单调性,有界性,周期性,并作出它的图象.

解 (1)$f(x)$ 不是单调函数, $\because 0.3 < 1.2 < 2.3$, 但 $f(0.3) > f(1.2)$, $f(1.2) < f(2.3)$.



第23题图

(2)$f(x)$ 是有界函数，$\because |f(x)| \leqslant 1$.

(3)$f(x)$ 是周期为 1 的函数，$\forall x \in (-\infty, +\infty)$，令 $x = [x] + a$，其中 $0 \leqslant a < 1$，则：$x + 1 = [x] + 1 + a$，

$f(x+1) = \{[x] + 1 + a\} - \{[[x] + 1]\} = a = f(x), \forall x \in R$.

(4)$y = f(x) = x - [x]$ 图象如上.

24.(合肥工业大学) 证明：定义在对称区间 $(-l, l)$ 内的任何函数 $f(x)$，必可以表示成偶函数 $H(x)$ 与奇函数 $G(x)$ 之和的形式，且这种表示法是唯一的.

证 令 $H(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$，$G(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$，

则 $f(x) = H(x) + G(x)$，且容易证明 $H(x)$ 是偶函数，$G(x)$ 是奇函数，下证唯一性. 若还存在偶函数 $H_1(x)$ 和奇函数 $G_1(x)$，有 $f(x) = H_1(x) + G_1(x)$.

则 $H(x) - H_1(x) = G_1(x) - G(x)$. ①

用 $-x$ 代入 ① 式有

$H(x) - H_1(x) = G(x) - G_1(x)$. ②

由 ① + ② 可得 $H(x) = H_1(x)$，再代入 ① 式可得 $G(x) = G_1(x)$.

25. 设 $f(x) = \dfrac{ax^2 + 1}{bx + c}$（其中 a, b, c 是整数）是奇函数，且在 $[1, +\infty)$ 上单调递增，$f(1) = 2$，$f(2) < 3$.

(1) 求 a, b, c 的值；

(2) 证明：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

解 (1) 由于 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore c = 0$. 再由 $f(1) = 2$，可得

$a = 2b - 1$ ①，

又因 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增，且 $f(1) = 2$.

$\therefore 2 = f(1) < f(2) = \dfrac{4a + 1}{2b} < 3$， ②

再将 ① 代入 ② 可得

$\dfrac{3}{2} < 2b < 3$.

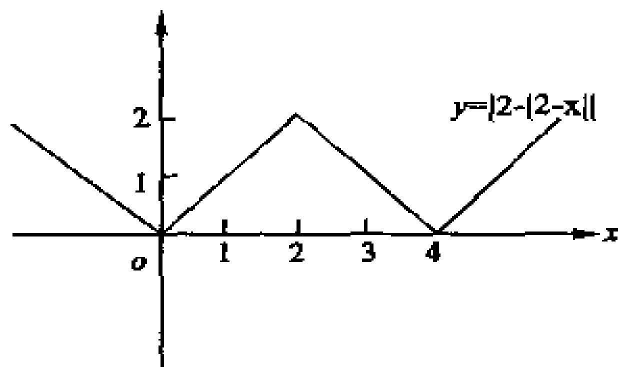
因为 b 是整数，$\therefore b = 1$，从而 $a = 1$.

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$.

(2)$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} < 0. (x \in (0,1))$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

26.(内蒙古大学) 作函数 $y=|2-|2-x||$ 的曲线图形.



第 26 题图

解 $y=\begin{cases}-x, x<0,\\ x, 0\leqslant x<2,\\ 4-x, 2<x\leqslant 4,\\ x-4, x>4.\end{cases}$

其曲线图形如上图所示.

27.(北京大学,1994年) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界,求证:$\exists c\in[a,b]$,使得对 $\forall\delta>0$,$f(x)$ 在 $(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ 上无界.

证 用闭区间套原理.取 a,b 中点 $\frac{a+b}{2}$,则 $[a,\frac{a+b}{2}]$,$[\frac{a+b}{2},b]$ 中至少有一个区间使 $f(x)$ 无界(如果两个都是可任取一个),记为 $[a_1,b_1]$.

再取中点 $\frac{a_1+b_1}{2}$,又可得区间 $[a_2,b_2]$,使 $f(x)$ 在其上无界.

这样继续下去有

$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$

使 $f(x)$ 在每个区间上无界.

由区间套原理存在 $c=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,则 $c\in[a,b]$.而对 $\forall\delta>0$,当 n 充分大时,有

$(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]\supset[a_n,b_n]$

故 $f(x)$ 在 $(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ 上无界.

28.(中国科学院,2000年) 设 $-\infty<x_1<x_2<\cdots<x_n<+\infty(n\geqslant 2)$,并设次数不超过 $n-1$ 次的代数多项式 $C_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$,满足条件:

$$C_k(x_i)=\begin{cases}0, & i\neq k,\\ 1, & i=k,\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n). \tag{①}$$

试证：$C_k(x)+C_{k+1}(x)\geqslant 1, x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}\quad(1\leqslant k\leqslant n-1)$.

证　由假设①式，可令

$C_k(x_i)=a_k(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$,

$(k=1,2,\cdots,n)$. ②

其中　$a_k(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)=1$,

$(k=1,2,\cdots,n)$.

或 $a_k=\dfrac{1}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$,

$(k=1,2,\cdots,n)$.

$$\begin{aligned}\therefore C_k(x)+C_{k+1}(x)&=(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+2})\cdots\\&\quad(x-x_n)[a_k(x-x_{k+1})+a_{k+1}(x-x_k)]\\&=g(x)h(x).\end{aligned}\qquad ③$$

其中　$g(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+2})\cdots(x-x_n)$

$h(x)=a_k(x-x_{k+1})+a_{k+1}(x-x_k)=(a_k+a_{k+1})x+(a_kx_{k+1}-a_{k+1}x_k)$. ④

(1) 当 $a_k+a_{k+1}\geqslant 0$ 时，由③式知 $C_k(x)+C_{k+1}(x)$ 在 $[x_k,x_{k+1}]$ 上为增函数，$\therefore$ 当 $x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$ 时

$1=C_k(x_k)+C_{k+1}(x_k)\leqslant C_k(x)+C_{k+1}(x)$.

(2) 当 $a_k+a_{k+1}<0$ 时，由③式知 $C_k(x)+C_{k+1}(x)$ 在 $[x_k,x_{k+1}]$ 上是减函数，$\therefore x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$ 时有

$1=C_k(x_{k+1})+C_{k+1}(x_{k+1})\leqslant C_k(x)+C_{k+1}(x)$.

29.（上海师范大学）　是否存在这样的函数，它在区间[0,1]上每点都取有限值，但在此区间的任何点的任何邻域内都无界.

答　存在，比如

$$f(x)=\begin{cases}n, & (x=\dfrac{m}{n}, m,n\text{ 互质，且 } n>0),\\0, & (x\text{ 为无理数或为 }0\text{ 或 }1).\end{cases}$$

$\forall x_0\in[0,1]$，存在有理数列 $\{x_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，对任意正数 M 而使 $f(x_n)>M$.

$\therefore f(x)$ 在 x_0 的邻域内无界.

30.（武汉大学，1994年）　设 $\{x_n\}$ 为一个正无穷大数列（即对任意正数 M，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，成立 $x_n>M$）.

E 为 $\{x_n\}$ 的一切项组成的数集. 试证：必存在自然数 p 使得 $x_p=\inf E$.

证　令 $M=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_{100},1\}$，则 $M>0$. 由假设存在自然数 N，当

$n > N$ 时,成立 $x_n > M$.

$\therefore infE = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_{100}\}$.

由于 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{100}\}$ 为有限集,所以 $\exists x_p$,使

$x_p = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_{100}\} = infE$.

31.(湖北大学,2001年) 证明:函数 $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ 为 R 上的有界函数.

证 $\because \lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = \frac{3}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \frac{3}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$.

$\therefore$ 取 $\varepsilon = 1$,存在 $N > 0$,当 $|x| > N$ 时,$|f(x)| = |x^3 e^{-x^2}| < 1$,$x \in (-\infty, -N) \cup (N, +\infty)$

又 $f(x)$ 在 $[-N, N]$ 内连续,从而有界,即 $|f(x)| < C$,

$x \in [-N, N]$.

综上两式知 $f(x)$ 在 R 上有界.

32.(哈尔滨工业大学,2002年) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义,且在每一点处极限存在.求证:$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证 $\forall x \in [a,b]$,$\because \lim\limits_{t\to x} f(t) = l$(存在).因此对 $\varepsilon = 1$ 存在 $\delta_x > 0$,使当 $t \in U(x, \delta_x) \cap [a,b]$ 时,有 $l - 1 < f(x) < l + 1$,

即 $|f(x)| < M_x$.

令 $\{U(x, \delta_x) \mid x \in [a,b]\}$,由有限覆盖定理,存在 $U(x_1, \delta_{x_1}), \cdots, U(x_m, \delta_{x_m})$ 使 $[a,b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U(x_k, \delta_{x_k})$.

令 $M = \max\{M_{x_1}, \cdots, M_{x_m}\}$.则 $\forall x \in [a,b]$ 都有 $|f(x)| < M$.

此即证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

33.(天津大学) (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})]$;

(2) 证明:$\sqrt{2}$ 是满足不等式 $r^2 > 2$ 的一切正有理数的下确界;

(3) 设在域 D 上函数 $f(x,y)$ 对于变量 x 连续,对于变量 y 的一阶偏导数有界,试证:$f(x,y)$ 在 D 上连续.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + \cdots + \ln(1+\frac{n}{n})]$$

$$= \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x})\,dx$$

$= \ln 2 - 1 + \ln(1+x)\big|_0^1 = 2\ln 2 - 1.$

(2) 设 $A = \{r \mid r \in Q, r^2 > 2\}$. $\forall r \in A$,则 $r^2 > 2$,

$$\therefore r > \sqrt{2} \quad ①$$

$\forall \varepsilon > 0$,由有理数的稠密性在$(\sqrt{2}, \sqrt{2}+\varepsilon)$上存在无穷多个有理数,从而可取 $r_1 \in (\sqrt{2}, \sqrt{2}+\varepsilon)$,

$$\therefore r_1 \in A, \text{且 } r_1 < \sqrt{2} + \varepsilon. \quad ②$$

由 ①,② 即证 $\inf A = \sqrt{2}$.

(3) $\forall (x_0, y_0) \in D$,

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0)|$$

$$\leqslant |f(x,y) - f(x_0,y)| + |f'_y(x_0,\xi)|\,|y - y_0| \quad ③$$

其中 ξ 在 y_0 与 y 之间. $\because f(x,y)$ 对于变量 x 连续,$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$,当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$|f(x,y) - f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad ④$$

函数 $f(x,y)$ 对 y 的一阶偏导数有界,即存在 $M > 0$,使

$$|f'_y(x,y)| \leqslant M. \quad ⑤$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2M}\}$,则当 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ 时,由 ③,④,⑤ 式有

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

$\therefore f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)连续,由(x_0,y_0)的任意性,$\therefore f(x,y)$ 在 D 上连续.

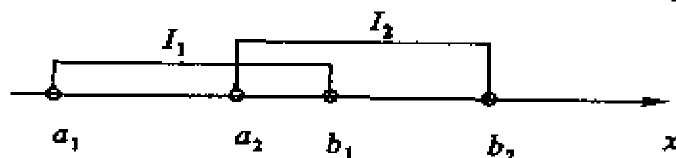
34.(北京科技大学) 证明:若一组开区间$\{I_n\}$,

$$I_n = (a_n, b_n), n = 1,2,3,\cdots$$

覆盖区间[0,1],则存在一正数 δ,使得[0,1]中任何两点 x', x'',满足 $|x' - x''| < \delta$ 时,必属于某一区间 I_n.

证 因为区间组$\{I_n\}$覆盖区间[0,1],由有限覆盖定理,必存在有限个开区间 I_n 也覆盖[0,1],不失一般设这组开区间为 $I_1, I_2, \cdots, I_m$.

若 $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$(如图所示),令 $J_1 = (a_1, a_2)$, $J_2 = (a_2, b_1)$,



第 34 题图

$J_3=(b_1,b_2)$. 那么 $I_1,I_2,\cdots,I_m$ 中只要两个开区间的交非空,可以产生一串$\{J_k\}$. 由于 $I_1,\cdots,I_m$ 为有限个,因此$\{J_k\}$也是有限个,不妨设为 $J_1,\cdots,J_s$.

再记这些开区间(c_n,d_n)长为$|I_n|$,即$|I_n|=d_n-c_n$. 那么令 $\delta=\min\{|I_1|,\cdots,|I_m|,|J_1|,\cdots,|J_s|\}$,则 $\delta>0$.

当 $x',x''\in[0,1]$,且$|x'-x''|<\delta$时,显然存在 I_k,$1\leqslant k\leqslant m$,使 $x',x''\in I_k$.

35.**(华中师范大学)** 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上,如果对于任何 $x_1,x_2\in I$,及 $\lambda\in(0,1)$,恒有

$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$,

证明:在区间 I 的任何闭子区间上 $f(x)$ 有界.

证 $\forall[a,b]\subset I$, $\forall x\in(a,b)$,则存在 $\lambda\in(0,1)$,使 $x=a+\lambda(b-a)$, $\therefore x=\lambda b+(1-\lambda)a$,

由①式有

$$\begin{aligned}f(x)&=f[\lambda b+(1-\lambda)a]\leqslant\lambda f(b)+(1-\lambda)f(a)\\&\leqslant\lambda M+(1-\lambda)M=M,\end{aligned}\qquad①$$

其中 $M=\max\{f(a),f(b)\}$,

$\forall x\in[a,b]$,令 $y=(a+b)-x$,那么

$\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{x+y}{2}$,

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right)&=f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)\\&\leqslant\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}M\end{aligned}$$

$$\therefore f(x)\geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-M=m_1.\qquad②$$

由①,②两式可知 $m_1\leqslant f(x)\leqslant M$, $\forall x\in(a,b)$.

再由 M 的定义,可知 $f(x)\leqslant M$, $\forall x\in[a,b]$

若令 $m=\min\{f(a),f(b),m_1\}$,则

$m\leqslant f(x)\leqslant M$, $\forall x\in[a,b]$.

此即证 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

第二章　极　　限

§1　数列的极限

【考点综述】

一、综述

1. 定义　设$\{a_n\}$是一个数列，若存在确定的数a，对$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，使当$n > N$时，都有$|a_n - a| < \varepsilon$，则称数列$\{a_n\}$收敛于$a$，记为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，否则称数列$\{a_n\}$不收敛(或称发散数列)。

2. 性质　(1) 唯一性　若数列$\{a_n\}$收敛，则它只有一个极限。

(2) 有界性　若$\{a_n\}$收敛，则存在正数M，使$|a_n| < M(n = 1,2\cdots\cdots)$。

(3) 保号性　若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$(或$< 0$)，则对任意一个满足不等式$a > a' > 0$，(或$0 > a' > a$)的$a'$，都存在正数$N$，使当$n > N$时，$a_n > a'$(或$a_n < a'$)。

(4) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，且$a_n \leqslant b_n(n > N_0)$，则$a \leqslant b$。

(5) 迫敛性(两边夹)　设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$，且$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n(n > N_0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$。

3. 运算。(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b, \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$。

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$。

4. 常用公式　(1) 有理式比

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots\cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots\cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_m}, \text{当 } m = k, \\ 0, \text{当 } m < k, \\ \infty, \text{当 } m > k. \end{cases}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，其中$|q| < 1$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n=e^a$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=1$.

5. 充要条件 (1) 柯西准则 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：对$\forall\varepsilon>0$,总存在自然数N,使当$n,m>N$,都有$|a_n-a_m|<\varepsilon$.

(2) 子数列法则 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是它的任一子列都收敛于同一极限.

6. 单调数列 任何有界的单调数列一定有极限.且单调递增有界数列的极限为其上确界.单调递减有界数列的极限为其下确界.

二、解题方法.

1. 考点1 判断数列的敛散性

常用方法有：(1) 定义法(见下面第44题).(2) 反证法(见下面第47题)；(3) 单调数列法(见下面第38题).(4) 柯西准则(见下面第72题).

2. 考点2 求已知数列的极限.

常用方法有：(1) 定义法(见第45题).(2) 两边夹法(见下面第37、46题).(3) 先求和再求极限(见下面第48、50题).(4) 先用放缩法，再求极限(见下面第40、52题).(5) 用施笃兹公式(见下面第41、67题).(6) 先用数学归纳法，再求极限(见下面第38、51题).(7) 用变量替换法(见下面第98题).(8) 级数法(先下面第60题).(9) 积分法(见下面第61题).(10) 利用函数极限法，再用归结法则(见下面第73题).(11) 利用对数求极限(见下面第43题).(12) 利用中值定理(见下面第38题).(13) 利用导数定义.(14) 利用单调数列(见下面第36题).

3. 考点3 已知数列递推关系，求极限.

常用方法有：(1) 先判断极限存在，再求极限(见下面第86、87题).(2) 变量替换.(3) 压缩映像法(见下面第129题).

4. 考点4 证明数列极限.

常用方法有(1) 定义法(见下面第71题).(2) 用施笃兹公式(见下面第118题).(3) 利用两边夹公式(见下面第52题).

[经典题解]

36. **(武汉大学,2003年)** 判断下列命题是否正确.

(1) 单调序列$\{a_n\}$中有一个子序列$\{a_{n_k}\}$收敛，则$\{a_n\}$收敛；

(2) 序列$\{a_n\}$的子序列$\{a_{2n}\}$和$\{a_{2n+1}\}$收敛，则$\{a_n\}$收敛；

(3) 序列$\{a_n\}$收敛，则序列$\{|a_n|\}$收敛.其逆命题也成立；

(4) $\sum a_n$ 收敛，则 $a_n = o(\frac{1}{n})$；

(5) 函数序列$\{u_n(x)\}$，$x\in[a,b]$，满足对任意自然数 p 及 $x\in[a,b]$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)-u_{n+p}(x)|=0$，则$\{u_n(x)\}$一致收敛.

解 (1) 对. 不妨设$\{a_n\}$单增，即

$a_n \leqslant a_{n+1}(n=1,2,\cdots\cdots)$.

又设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. 则 $a = \sup\limits_{n_k}\{a_{n_k}\}$ ①

可证：$a_n \leqslant a, \forall n \in N$. 用反证法，若 $\exists m_0 \in N$，使 $a_{m_0} > a$.

那么 $\exists n_k \in N$，有 $n_k > m_0$.

$\therefore a < a_{m_0} \leqslant a_{n_k}$.

这与①式矛盾，因此$\{a_n\}$单调递增有上界 a，从而有极限，即证$\{a_n\}$收敛.

事实上还可证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\forall \varepsilon>0, \exists N_1$，当 $n, n_k > N_1$ 时，有

$$|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

再由 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$，对上述 ε，存在 N_2，当 $n_k > N_2$ 时有

$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

再令 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时

$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(2) 错. 比如数列

$$1,0,1,0,1,0\cdots\cdots$$

$\{a_{2n}\}$和$\{a_{2n+1}\}$都收敛，但$\{a_n\}$不收敛.

(3) 错. 逆命题并不成立，比如$\{|(-1)^n|\}$收敛，但$\{(-1)^n\}$不收敛.

(4) 错. 比如 $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛，但

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \neq 0.$$

(5) 错. 比如$\{x^n\}$在$[0,1]$上满足条件，但$\{x^n\}$在$[0,1]$上不一致收敛.

37.（华中师范大学，2003 年）求下列极限：

(1)（北京大学）$\lim\limits_{n\to+\infty}(n!)^{1/n^2}$；

(2)$f(x)$ 在$[-1,1]$上连续，恒不为0，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin x-1}-1}{3^x-1}$$

解 (1)$1\leqslant (n!)^{1/n^2}\leqslant (n^n)^{1/n^2}=n^{\frac{1}{n}}$, ①

$\because \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$.

由 ① 式及两边夹法则，$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}(n!)^{1/n^2}=1$.

(2) 当 $x\to 0$ 时

$3^x=e^{x\ln 3}=1+x\ln 3+o(x)$,

$\sqrt[3]{1+f(x)\sin x}=(1+f(x)\sin x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}f(x)\sin x+o(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin x}-1}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}f(x)\sin x+o(x)}{x\ln 3+o(x)}$$

$$=\frac{f(0)}{3\ln 3}.$$

38.(**武汉大学,2003 年,华中师范大学**) 设 $0<c<1, a_1=\frac{c}{2}$,

$$a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2},$$

证明：$\{a_n\}$收敛，并求其极限.

证法 1 用数学归纳法可以证明

$0<a_n<c,(n=1,2,\cdots\cdots)$.

令 $f(x)=\frac{c}{2}+\frac{x^2}{2}$，则 $f'(x)=x$.

$|a_{n+1}-a_n|=|f(a_n)-f(a_{n-1})|=|f'(\xi)|\cdot|a_n-a_{n-1}|$

$=\xi\cdot|a_n-a_{n-1}|<c|a_n-a_{n-1}|$, ①

其中 ξ 介于a_n与a_{n-1}之间，由于$0<c<1$，再由 ① 式可知$\{a_n\}$为压缩数列，故收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=l$.

由于 $a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}$,

$\therefore l=\frac{c}{2}+\frac{l^2}{2}, l^2-2l+c=0$.

$l=1+\sqrt{1-c}$(舍去)，$l=1-\sqrt{1-c}$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n=1-\sqrt{1-c}$.

证法 2 先用数学归纳法可证

$0 < a_n < 1 \quad (n = 1,2,3\cdots\cdots)$ ②

再用数学归纳证明

$a_{n+1} \geqslant a_n \quad (n = 1,2,3\cdots\cdots)$ ③

显然 $a_2 \geqslant a_1$,归纳假设 $a_k \geqslant a_{k-1}$,则

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2}(a_k^2 - a_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(a_k + a_{k-1})(a_k - a_{k-1}) \geqslant 0.$$

从而 ③ 成立.

由 ②,③ 知$\{a_n\}$单调递增有上界,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$(存在)

$\therefore l = \frac{c}{2} + \frac{l^2}{2}$,注意到 $l < 1$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l = 1 - \sqrt{1-c}$.

39.(北京师范大学,2003 年)设 $\alpha = sup\{f(x) \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.证明:存在 $a \leqslant x_n \leqslant b$,使$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ 成立.

证 由上确界定义,对 $\forall \epsilon = \frac{1}{n} > 0$, $\exists x_n \in [a,b]$,使

$\alpha - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant \alpha$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.

40.(中国人民大学,1999年,施笃兹(*Stolz*)公式)(1)设数列$\{y_n\}$单调递增趋于 $+\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A.(\text{可以为无穷}). \quad ①$$

证明:(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$;

(2) 设 $x_1 \in (0,\frac{\pi}{2})$, $x_{n+1} = \sin x_n$, $n = 1,2,\cdots\cdots$ ②

证明:$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$,并利用(1),求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sin x_n$.

证 (1)(i) 先设 $A < +\infty$,由 ① 式,$\forall \epsilon > 0$,存在 $N > 0$,当 $n > N$ 时有

$$A - \epsilon < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < A + \epsilon,$$

特别取 $n = N+1, N+2, \cdots\cdots$

$$\begin{cases} (y_{N+1} - y_N)(A - \epsilon) < x_{N+1} - x_N < (y_{N+1} - y_N)(A + \epsilon), \\ (y_{n+2} - y_{n+1})(A - \epsilon) < x_{N+2} - x_{N+1} < (y_{N+2} - y_{N+1})(A + \epsilon), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (y_1 - y_{n-1})(A - \epsilon) < x_n - x_{n-1} < (y_n - y_{n-1})(A + \epsilon), \end{cases}$$

将这些式子统统相加得

$(y_n - y_N)(A - \varepsilon) < x_n - x_N < (y_n - y_N)(A + \varepsilon)$,

$\therefore A - \varepsilon < \dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < A + \varepsilon$,

此即 $\left|\dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - A\right| < \varepsilon$. ③

而 $0 \leqslant \left|\dfrac{x_n}{y_n} - A\right| = \left|\dfrac{x_N - Ay_N}{y_n} + \left(1 - \dfrac{y_N}{y_n}\right)\left(\dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - A\right)\right|$

$\leqslant \left|\dfrac{x_N - Ay_N}{y_n}\right| + \left|\dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - A\right| \cdot \left|1 - \dfrac{y_N}{y_n}\right|$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ 以及 ③ 式,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_N - Ay_N}{y_n}\right| = 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - A\right|\left|1 - \dfrac{y_N}{y_n}\right| = 0 \cdot 1 = 0$.

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{x_n}{y_n} - A\right| = 0$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = A$.

(ⅱ) 再当 $A = +\infty$ 时,由 ① 有

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty$. ④

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = 0$. ⑤

下证$\{x_n\}$递增趋于 $+\infty$,由 ④ 知,$\exists N_1 > 0$,当 $n > N_1$ 时,有

$\dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > 1$. ⑥

$\because y_{n+1} - y_n > 0$, $\therefore x_{n+1} - x_n > 0$,即$\{x_n\}$单调递增.

由 ⑥ 式有

$x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n$

从而有 $\begin{cases} x_{N_1+1} - x_{N_1} > y_{N_1+1} - y_{N_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1}, \end{cases}$.

将这些式子统统加起来有

$x_{n+1} - x_{N_1} > y_{n+1} - y_{N_1}$.

$\therefore x_{n+1} > y_{n-1} - y_{N_1} + x_{N_1}$ ⑦.

显然当 $n \to +\infty$ 时,$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

由⑤式及上面(ⅰ)的结论有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=0.$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty=A.$

(ⅲ)当 $A=-\infty$ 时,只要令 $y_n=-z_n$,则由上面(ⅱ)可证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=-\infty=A.$$

(2)$\because x_{n+1}=\sin x_n<x_n$, $\therefore \{x_n\}$单调递减.

因为 $x_1\in(0,\frac{\pi}{2})$,所以 $0<x_n<1, n=1,2,\cdots\cdots$.

即$\{x_n\}$有下界,从面 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=l$(存在).由

$x_{n+1}=\sin x_n$,

两边取极限有

$l=\sin l$, $\therefore l=0$,

此即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0.$

再求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\sin x_n$,考虑

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin^2x_n=\lim_{n\to+\infty}nx_n^2\cdot\frac{\sin^2x_n}{x_n^2}, \tag{8}$$

$$\because \lim_{n\to+\infty}nx_n^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}^2\cdot x_n^2}{x_{n-1}^2-x_n^2}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}^2\sin^2x_{n-1}}{x_{n-1}^2-\sin^2x_{n-1}} \tag{9}$$

$$\because \lim_{x\to0}\frac{x^2\sin^2x}{x^2-\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^2-\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{4x^3}{2x-\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{6x^2}{1-\cos2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{12x}{2\sin2x}=3. \tag{10}$$

由⑨⑩两式

$$\therefore \lim_{x\to0}nx_n^2=3. \tag{11}$$

将⑪代入⑧得

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin^2x_n=3.$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\sin x_n=\sqrt{3}.$$

注:① 施笃兹公式在求数列极限时经常会用到,请大家注意.

41.(湖北大学,2002 年,算术平均收敛公式;中国地质大学,2002 年)设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \xi_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n}$,求证:$\lim\limits_{x\to\infty} \xi_n = a$.

证法 1 由施笃兹公式

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{x\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n) - (x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_{n-1})}{n - (n-1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

证法 2 由 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$,则 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $N_1 > 0$,使当 $n > N_1$ 时,有

$$| x_n - a | < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad ①$$

$\left| \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n} - a \right| \leqslant \dfrac{1}{n}(| x_1 - a | + \cdots\cdots + | x_{N_1} - a | + | x_{N_1+1} - a | + \cdots\cdots + | x_n - a |)$

令 $c = | x_1 - a_1 | + \cdots\cdots + | x_{N_1} - a |$,那么

$$\left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n} - a \right| \leqslant \frac{c}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}. \qquad ②$$

存在 $N_2 > 0$,使当 $n > N_2$ 时,有$\dfrac{c}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

再令 $N = \max\{N_1, N_2\}$,故当 $n > N$ 时,由 ①,② 有

$$\left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots\cdots + x_n}{n} = a.$$

42.(几何平均收敛公式)设 $x_n > 0(n = 1,2,\cdots\cdots)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$,证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots\cdots x_n} = a.$$

证 $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \therefore \lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = \ln a$.

再由上题可知

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots\cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots\cdots + \ln x_n)}$$
$$= e^{\ln a} = a.$$

43.证明(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, (a > 0)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证 (1) $\because \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{a} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln a} = e^0 = 1. \therefore \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(2) $\because \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln\sqrt[x]{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=e^0=1$. $\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

44.(山东大学)用 $\varepsilon-N$ 方法证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n}{n!}=0$.

证 $\frac{7^n}{n!}=\frac{7}{1}\cdot\frac{7}{2}\cdots\cdots\frac{7}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdots\cdots\frac{7}{n-1}\cdot\frac{7}{n}\leqslant\frac{7^7}{7!}\cdot\frac{7}{n}=\frac{7^7}{6!}\cdot\frac{1}{n}$.

$\left|\frac{7^n}{n!}-0\right|\leqslant\frac{7^7}{6!}\cdot\frac{1}{n}$

$\forall\varepsilon>0$,存在 $N=[\frac{7^7}{6!}\cdot\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,便有

$\left|\frac{7^n}{n!}-0\right|\leqslant\frac{7^7}{6!}\frac{1}{n}<\varepsilon$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n}{n!}=0$.

45.(山东大学) 用 $\varepsilon-N$ 方法证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$.

证 令 $\sqrt[n]{1+n}-1=t$,则 $t>0$.

$\therefore 1+n=(1+t)^n\geqslant 1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2+\cdots\cdots\geqslant\frac{n(n-1)}{2}t^2$,

$\left|\sqrt[n]{1+n}-1\right|=t\leqslant\sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}\leqslant\sqrt{\frac{4n}{n(n-1)}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{n-1}}$,

$\forall\varepsilon>0$,取 $N=[\frac{4}{\varepsilon^2}+1]$,则当 $n>N$ 时,有

$\left|\sqrt[n]{1+n}-1\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{n-1}}<\varepsilon$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n}=1$.

注 ① 如果本题不限方法,还可有另外的证法

证 令 $x_n=\frac{n+1}{n}$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,再由几何平均收敛公式

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdots\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

46.(北京大学,1998 年,1999 年)计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}$,$(a>0)$.

解 (1)当 $a\geqslant 1$ 时,有 $a<\sqrt[n]{1+a^n}\leqslant\sqrt[n]{2}a$.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}=a$.

(2)当 $0<a<1$ 时,作变换 $b=\frac{1}{a}$,则 $b>1$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(\frac{1}{b})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b}\cdot\sqrt[n]{1+b^n}=\frac{1}{b}\cdot b=1$.

47.(武汉大学) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

证 用反证法,设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$.

$\because \sin(n+2)-\sin n=2\sin1\cos(n+1)$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} 2\sin 1\cos(n+1) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sin(n+2)-\sin n) = 0.$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\cos n = 0.$

$a^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\sin^2 n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\cos^2 n) = 1,$

但 $\cos 2n = \cos^2 n - \sin^2 n,$

两边取极限有 $0 = -a^2 = -1$,矛盾.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

48.(兰州大学) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sum\limits_{k=1}^{n}k^4.$

解 $\because \sum\limits_{k=1}^{n}k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}k^4 = \begin{cases} 0,\text{当 } \alpha > 5 \text{ 时}, \\ \frac{1}{5},\text{当 } \alpha = 5 \text{ 时}, \\ +\infty,\text{当 } \alpha < 5 \text{ 时}. \end{cases}$$

49.(中国科技大学,北京航空航天大学,安徽工学院,上海机械学院) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{n^2}).$

解法 1 $1-\frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{3^2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$

解法 2 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})]\cdots\cdots(1+\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})$

$= \lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots\cdots(1+\frac{1}{n})][(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots\cdots(1-\frac{1}{n})]$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\cdots\frac{n+1}{n})(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\cdots\frac{n-1}{n})$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$

50.(四川师范学院) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k)^2}$

解 $\because 1^2+3^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$,

$2^2+4^2+\cdots\cdots+(2n)^2=4(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}n(4n^2-1)}{\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)}=1.$$

51.(东北师范大学) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots\cdots(2n)}$.

解 用数学归纳法可证

$$0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$,再由两边夹法则,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots\cdots(2n)}=0.$$

52.(华中师范大学,2001 年) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\frac{3}{n^2+n+3}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解 记 $x_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$,则

$$\frac{1+2+\cdots\cdots+n}{n^2+n+1}\geqslant x_n\geqslant\frac{1+2+\cdots\cdots+n}{n^2+n+n},$$

$$\therefore \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}\geqslant x_n\geqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)},$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}.$$

由两边夹法则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$.

53.(中国科学院) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\cdots\cdots\sqrt{3}}}$($n$ 个根号)

解 $\because \sqrt{3\sqrt{3\cdots\cdots\sqrt{3}}}=3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdots\cdots 3^{1/2^n}=3^{1-(\frac{1}{2})^n}$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\cdots\cdots\sqrt{3}}}=\lim_{n\to\infty}3^{1-(\frac{1}{2})^n}=3.$$

54.(北京师范大学) 求下列各题的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2-n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x-\frac{1}{x})$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+a}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1})^{2-n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^{n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n-2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}\cdot(1-\frac{1}{n})^{-2}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-2}$

$=\frac{1}{e}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}=0.$

(3) 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则$(x,y)\to(0,0)$，等价于 $\rho\to 0$，所以

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cos^2\theta\sin\theta=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{|\sin x|}{x}=1,\qquad \lim\limits_{x\to 0-}\frac{|\sin x|}{x}=-1.$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$ 不存在.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+a}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{a}{x}}=1.$

55.（中国科学院，西南石油学院）计算：

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$（$x\neq 0$，$x$ 是实数，n 为自然数）

解 $\because(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n})\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\sin x$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

56.（国防科技大学） 设 $|x| < 1$，求

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\cdots(1+x^{2^n})$.

解 $\because (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\cdots(1+x^{2^n}) = 1 - x^{2^{n+1}}$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\cdots(1+x^{2^n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1-x}(1-x^{2^{n+1}})$

$= \frac{1}{1-x}$，（$\because |x| < 1$）.

57.（哈尔滨工业大学，2002 年，武汉大学，2001 年） 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，求证：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}.$$

证 （1）当 $a = 0$ 时，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，$\forall \varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时

$|x_n| < \varepsilon^3$；

$\therefore |\sqrt[3]{x_n}| < \varepsilon$，此即 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = 0 = \sqrt[3]{a}$.

（2）当 $a \neq 0$ 时，因为

$(\sqrt[3]{x_n})^2 + \sqrt[3]{x_n}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2 = (\sqrt[3]{x_n} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{a})^2 + \frac{3}{4}(\sqrt[3]{a})^2$

$\geqslant \frac{3}{4}(\sqrt[3]{a})^2 > 0$.

令 $M = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{2})^2$，$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，有

$|x_n - a| < M\varepsilon$.

而 $|\sqrt[3]{x_n} - \sqrt[3]{a}| = \frac{|x_n - a|}{(\sqrt[3]{x_n})^2 + \sqrt[3]{x_n}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2}$

$\leqslant \frac{|x_n - a|}{M} < \frac{1}{M} \cdot M\varepsilon = \varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$.

58.（武汉大学，上海师范大学） 证明：从任一数列 $\{x_n\}$ 中，必可选出一个（不一定严格）单调的子数列.

证 （1）若 $\{x_n\}$ 中存在递减数列，则问题得证.

（2）若 $\{x_n\}$ 中不存在递减数列，则存在自然数 n_1，使得 $x_n > x_{n_1}$，$\forall n > n_1$.

从中取 $n_2 > n_1$，有 $x_{n_2} > x_{n_1}$.

在$\{x_n\}_{(n>n_2)}$中，也不存在递减数列，类似可取$n_3 > n_2$，有$x_{n_3} > x_{n_2}$.

这样继续下去，可找到严格递增子数列，

$x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \cdots\cdots$

59.（武汉大学，1997年）设$a_n > 0$，且$a_n \not\to +\infty$，证明：数列$\{a_n\}$中存在一个子序列$\{a_{n_k}\}$是收敛的子序列.

证　(1) 若$\{a_n\}$有界，设$c \leqslant a_n \leqslant d(n = 1,2\cdots\cdots)$，将$[a, b]$二等分，得区间$[c, \frac{c+d}{2}]$，$[\frac{c+d}{2}, d]$，则其中至少有一个区间包含$\{a_n\}$中无穷多项，将它记为$[c_1, d_1]$. 再将$[c_1, d_1]$二等分，又可得区间$[c_2, d_2] \subset [c_1, d_1]$，且包含$\{a_n\}$中无穷多项. 这样继续下去，可得一串区间

$[c, d] \supset [c_1, d_1] \supset [c_2, d_2] \supset \cdots\cdots \supset [c_n, d_n] \supset \cdots\cdots$

其中每个$[c_n, d_n]$都包含数列$\{a_n\}$中无穷多项，但

$c_n - d_n = \dfrac{d-c}{2^n} \to 0, (n \to \infty)$

再由区间套原理$[c_n, d_n]$具有唯一的公共点s，即有

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = s$.

然后在$[c_1, d_1], [c_2, d_2], \cdots\cdots, [c_k, d_k], \cdots\cdots$中各取$\{a_n\}$中一项$a_{n_1}$，$a_{n_2}, \cdots\cdots, a_{n_k}\cdots\cdots$，则

$c_k \leqslant a_{n_k} \leqslant d_k$.

而$\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \lim\limits_{k\to\infty} d_k = s$.

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = s$.

(2) 若$\{a_n\}$无界，则$\{a_n\}$中必有有界的子数列（否则$a_n \to \infty$，与假设矛盾）. 则由(1)即证.

60.（上海交通大学）　试证数列$x_n = \dfrac{11\cdot 12\cdot 13\cdots\cdots(n+10)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots\cdots(3n-1)}(n = 1, 2, 3\cdots\cdots)$有极限，并求此极限.

证　当$n \geqslant 6$时，可证$\dfrac{n+10}{3n-1} < 1$.

故$\{x_n\}$当$x \geqslant 6$时为单调减小，且有下界大于0，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

再考虑正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$，因为$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+11}{3n+2} = \dfrac{1}{3} < 1$，

由此可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$收敛，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

也可用反证法：假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{a} = 1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+11}{3n+2} = \frac{1}{3} \neq 1$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

61.（中国科学院，1999年，同济大学、华中理工大学、华东工程学院、中国科技大学） 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n})$

解 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}. \qquad ①$$

令 $f(x) = \frac{1}{1+x}, 0 \leqslant x \leqslant 1$，则由定积分定义知

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} \qquad ②$$

又 $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2.$ ③

由①，②，③得

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}) = \ln 2.$$

62.（山东海洋学院）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})$.

解 令 $y = \tan^x(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})$，则

$\ln y = x\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}), (x > \frac{4}{\pi})$.

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cot(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})\cdot\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})}{(-\frac{1}{x^2})} = 2.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} y = e^2$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})=e^2$.

63.(武汉大学) 若 $a_n>0.(n=1,2,\cdots\cdots)$ 且 $\exists C>0$,当 $m<n$ 时,有 $a_n\leqslant Ca_m$,已知$\{a_n\}$存在子序列$\{a_{n_k}\}\to 0$,试证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证 $\forall\varepsilon>0$,由$\{a_{n_k}\}\to 0$,$\exists$ 自然数 N_1,当 $k>N_1$ 时,有

$$|a_{n_k}|<\frac{\varepsilon}{C}. \quad ①$$

再令 $N=n_{N_1+1}$,于是当 $n>N$ 时

$|a_n-0|=a_n\leqslant C\cdot a_{n_{N_1}+1}<C\cdot\frac{\varepsilon}{C}=\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

64.(江西师范大学) 若 $x_n>0,(n=1,2\cdots\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证 令 $a_1=1,a_n=\frac{x_n}{x_{n-1}},(n\geqslant 2)$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}$ 存在.

由几何平均收敛公式知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,

此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

65.(北京师范学院) $\{a_n\},n=1,2,\cdots\cdots$ 是一个数列,试证:

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}=a<\infty$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

证 $\because \frac{a_n}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}-\lim_{n\to\infty}(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n})=a-a\cdot 1=0.$$

66.(南开大学) $x_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,试证:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\prod\limits_{k=1}^{n}x_k)^{\frac{1}{n}}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{i\geqslant 1}(\prod\limits_{k=1}^{n}x_{i+k})^{\frac{1}{n}}=0$.

证 (1) $\because 0\leqslant(\prod\limits_{k=1}^{n}x_k)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

再由两边夹原则

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}=0.$

(2) $\because 0\leqslant\sup\limits_{k\geqslant1}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_{i+k}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\sup\limits_{k\geqslant1}x_{i+k}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sup\limits_{k\geqslant1}x_{i+k}}{n} \qquad ①$$

令 $a_i=\sup\limits_{k\geqslant1}x_{i+k}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，用定义可证

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sup\limits_{k\geqslant1}x_{i+k}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

由 ① 式及两边夹公式

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geqslant1}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_{i+k}\right)^{\frac{1}{n}}=0.$

67.（国防科技大学，四川大学） 已知数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$

证 用施笃兹公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n}-x_{2n-1}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{2n}-x_{2n-1})-(x_{2n-2}-x_{2n-3})}{2n-2(n-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}[(x_{2n}-x_{2n-2})-(x_{2n-1}-x_{2n-3})]=0.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n+1}-x_{2n}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{2n+1}-x_{2n})-(x_{2n-1}-x_{2n-2})}{(2n+1)-[2(n-1)+1]}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}[(x_{2n+1}-x_{2n-1})-(x_{2n}-x_{2n-2})]=0.$$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$

68.（北京大学，1999 年） 判断题：设 $\{a_n\}$ 是一个数列，若在任一子序列 $\{a_{n_k}\}$ 中均存在收敛子列 $\{a_{n_{k_i}}\}$ 则 $\{a_n\}$ 必为收敛数列.

答 错. 比如数列 1,0,1,0,……

它的任一子列都存在收敛子列，但此数列发散.

69.（华中师范大学，2002 年，北京工业大学）

设 $x_n=\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+1)}}{n}\qquad(n=1,2,3\cdots\cdots)$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 $\because \ln x_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\dfrac{k}{n})$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\ln x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$$
$$= \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}.$$

70.(北京大学,1995 年) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots\cdots(2n-1)}$.

解 $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots\cdots(2n-1)}$

$$= \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(2n-1)(n+n)\cdot\frac{n}{2n}}.$$
$$= \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{2}}.$$

由上题知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)} = \frac{4}{e},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}} = 1$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots\cdots(2n-1)} = \frac{4}{e}.$$

71.(北京大学,1997 年) 设 $x_n > 0,(n = 1,2\cdots\cdots)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,用 $\varepsilon - N$ 语言,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证 $\because x_n > 0, \therefore a \geqslant 0$.

(1) 当 $a = 0$ 时,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,下证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$,则存在 $N > 0$,当 $n > N$ 时,$0 < x_n = |x_n - 0| < \varepsilon^2$.

$\therefore \sqrt{x_n} < \varepsilon$,此即 $|\sqrt{x_n} - 0| < \varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = 0$.

(2) 当 $a > 0$ 时,$\forall \varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,当 $n > N$ 时,有 $|x_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$.

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon.$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

综上两方面,即证.

72.(华中师范大学,1999年)　设 $x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$,证明:$\{x_n\}$收敛.

证　$\forall\varepsilon>0$,设 $n>m$,则

$$|x_n-x_m|=\left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}+\frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}}+\cdots\cdots+\frac{\sin n}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^{m+1}}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots)=\frac{1}{2^{m+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^m}.$$

令$\frac{1}{2^m}<\varepsilon$,$\therefore 2^m>\frac{1}{\varepsilon}$,$m>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$.

令 $N=[\log_2\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>m>N$ 时,有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

由柯西收敛准则,可知$\{x_n\}$收敛.

73.(西北电讯工程学院)　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$,($a\geqslant 0,b\geqslant 0.$)

解　(1)当 a,b 有一为0时,比如 $a=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{2^n}=0=\sqrt{ab}.\qquad ①$$

(2)当 $a>0,b>0$ 时,令 $y=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$,则 $\ln y=\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{a^x+b^x}{2}$.

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{a^x+b^x}{2}=\lim_{x\to0}\frac{2}{a^x+b^x}\cdot\left(\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}.$$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}$,即有$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}$.　②

由①,②两式即证结论.

74.(中国地质大学,2002年)　求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^2)^n dx$.

解:当 $x\in\left[0,1-\frac{\varepsilon}{2}\right]$时,则$0<1-x^2<1$,所以对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$.当 $n>N$ 时,有$(1-x^2)^n<\frac{\varepsilon}{2}$.

$$0\leqslant\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2}}(1-x^2)^n dx+\int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1(1-x^2)^n dx\leqslant\int_0^{1-\frac{\varepsilon}{2}}\frac{\varepsilon}{2}dx+\int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 dx=\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

由于 ε 可任意小. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^2)^n dx = 0$.

75.(华中师范大学,1999 年)　设 $\{a_n\}$ 为单调递增数列,若 $\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\}$,且 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k} = a$,试证:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$.

证　证明见第 36 题(1).

76.(华东师范大学,2000 年)　证明:(1)$\left\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$为递减数列;

(2) $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}, n = 1,2\cdots\cdots$.

证　(1) 因为$[(1+\frac{1}{x})^{1+x}]' =$

$$[e^{(1+x)\ln(1+\frac{1}{x})}]' = e^{(1+x)\ln(1+\frac{1}{x})}[\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}]. \quad ①$$

$\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$, $\therefore \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}) < 0$.

再由 ① 式知$[(1+\frac{1}{x})^{1+x}]' < 0$.

$\therefore (1+\frac{1}{n})^{1+n}$ 为递减数列.

(2) 由于 $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

$$\therefore \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) < 0, \quad ②$$

$$\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$= \frac{n-1}{2n^2(n+1)} + o(\frac{1}{n^2}) > 0. \quad ③$$

由 ②,③ 即证

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}.$$

77.(中国科学院,2000 年)　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}}, (a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0)$;

(2)(东北师范大学) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x + b^x + c^x}{3})^{\frac{1}{x}}. (a > 0, b > 0, c > 0)$.

解　(1) 令 $d = \max\{a,b,c\}$,则

$$(d^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant (3d^n)^{\frac{1}{n}}. \quad ①$$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(d^n)^{\frac{1}{n}} = d, \lim\limits_{n\to\infty}(3d^n)^{\frac{1}{n}} = d,$

由 ① 式及两边夹法则:

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} = d = \max\{a, b, c\}.$

注:还可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots\cdots + a_k^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_1, a_2, \cdots\cdots a_k\}$,其中 $a_i \geqslant 0(i = 1,2\cdots\cdots k)$. 证明可见第 82 题.

(2) 令 $y = (\frac{a^x + b^x + c^x}{3})^{\frac{1}{x}}$,则 $\ln y = \frac{1}{x}\ln\frac{a^x + b^x + c^x}{3}$,

$$\lim_{x\to0}\ln y = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x + b^x + c^x}{3}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{3}{a^x + b^x + c^x}\cdot\frac{1}{3}(a^x\ln a + b^x\ln b + c^x\ln c)$$

$$= \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c) = \ln\sqrt[3]{abc}.$$

$$\therefore \lim_{x\to0}(\frac{a^x + b^x + c^x}{3})^{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{abc}.$$

78.【中国科学院,2002 年】 设 $a_{n+1} = a_n + a_n^{-1}(n > 1), a_1 = 1$,则

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} = +\infty$.

证 (1) 由假设知$\{a_n\}$为单调递增的正数列.

若$\{a_n\}$有界,则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ 存在,且 $l > 0$. $\because a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$

两边取极限得

$l = l + \frac{1}{l}, \therefore \frac{1}{l} = 0$ 矛盾.

即证$\{a_n\}$无界,又由于$\{a_n\}$单调递增,$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(2) 令 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{-1}$,则

$$S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{a_n}$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots\cdots + (a_{n+1} - a_n)$$

$$= a_{n+1} - a_1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} = \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

79.【武汉大学,1996 年】 设 $a_n \to a$(当 $n \to +\infty$),令

$$a_n^+=\begin{cases}a_n, a_n>0,\\0, a_n\leqslant 0,\end{cases}\qquad a^+=\begin{cases}a, a>0,\\0, a\leqslant 0\end{cases}.$$

证明：$a_n^+\to a^+$（当 $n\to+\infty$）.

证 (1) 当 $a>0$ 时，$\because \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a>0$，所以 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $a_n>0$.

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}a_n^+=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a=a^+$.

(2) 当 $a<0$ 时，类似可证

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n^+=\lim\limits_{n\to+\infty}0=0=a^+$.

(3) 当 $a=0$ 时，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. $\forall\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-0|=|a_n|<\varepsilon$.

$\therefore |a_n^+-0|=|a_n^+|\leqslant|a_n|<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}a_n^+=0=a^+$.

80.（华中师范大学，2000 年） 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{3^n\cdot n!}$.

解 令 $a_n=\dfrac{n^n}{3^n n!}$，作级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{e}{3}<1$.

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{3^n\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

注：类似考题还有

①（山东矿业学院）求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n}{n!}=0$.

②（昆明工学院）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

③（中国人民解放军测绘学院）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{k^3(n!)^3}$.

④（上海铁道学院）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n}{n!}$.

81.（中国科学院） 回答下列问题，并简述理由：

(1) 对每个自然数 k，均有自然数 N_k，且当 $n>N_k$ 时，有 $|a_n-a|<\dfrac{1}{k}$，

问是否有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?

(2) 什么叫无界数列,是否有收敛的无界数列?

答 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 成立,因为 $\forall \varepsilon > 0$,则存在自然数 k_0,使 $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$,再由假设存在自然数 N_{k_0},当 $n > N_{k_0}$ 时,有

$$| a_n - a | < \frac{1}{k_0} < \varepsilon.$$

(2) 设数列 $\{a_n\}$,若对 $\forall M > 0$,都存在自然数 n,有 $|a_{n_0}| > M$,则数 $\{a_n\}$ 是无界数列.

可用反证法证明:不存在收敛的无界数列.

82.(陕西师范大学) 设 $A = \max\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m\}$,$a_k > 0(k = 1, 2\cdots\cdots, m)$ 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots\cdots + a_m^n}$.

解 由题设有

$$A^n < a_1^n + a_2^n + \cdots\cdots + a_m^n \leqslant mA^n,$$

$$\therefore A < \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots\cdots + a_m^n} \leqslant \sqrt[n]{m}A, \qquad ①$$

$\because \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{m} = 1$,由两边夹法则及 ① 式

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots\cdots + a_m^n} = A = \max\{a_1, a_2, \cdots\cdots a_m\}.$$

83.(北京大学,1999 年) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots\cdots + \frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

解 因为

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots\cdots + \sin\pi}{n+1} < \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots\cdots + \frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}$$

$$< \frac{\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots\cdots + \sin\pi}{n+\frac{1}{n}} \qquad ①$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots\cdots + \sin\pi}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots\cdots + \sin\pi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\cdots+\sin\pi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$$

类似

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\cdots+\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\cdot\frac{n^2}{n^2+1}\cdot\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\cdots+\sin\pi\right)\right] = \frac{2}{\pi}.$$

由 ① 式及两边夹法则,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

84.(华东师范大学,1998 年)　用定义验证:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n^2+n+1} = \frac{3}{2}$.

证　$\forall\varepsilon>0$,

$$\left|\frac{3n^2+2}{2n^2+n+1}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{1-3n}{4n^2+2n+2}\right| < \frac{3n}{4n^2+2n+2} < \frac{1}{n}. \qquad ①$$

令$\frac{1}{n}<\varepsilon$,则 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,由 ① 式有

$$\left|\frac{3n^2+2}{2n^2+n+1}-\frac{3}{2}\right| < \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n^2+n+1} = \frac{3}{2}.$$

85.(武汉大学,1998 年)　设数列$\{a_n\}$有一个子序列$\{a_{n_k}\}$收敛,且$\{a_{n_k}\}\cap\{a_{2n}\}$及$\{a_{n_k}\}\cap\{a_{2n+1}\}$都有无穷多个元,而$\{a_{2n}\}$及$\{a_{2n+1}\}$都为单调数列,问$\{a_n\}$是否收敛?为什么?

答　收敛.设$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=l$.

$\because\{a_{n_k}\}\cap\{a_{2n}\}$与$\{a_{n_k}\}\cap\{a_{2n+1}\}$都有无穷多个元,所以$\{a_{2n}\}$中有子列收敛于 l.同理$\{a_{2n+1}\}$中也有子列收敛于 l.而且$\{a_{2n}\}$和$\{a_{2n+1}\}$都是单调数列,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=l,\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=l.$

此即有：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

86.（中国科技大学，华中师范大学，2002 年） 设数列$\{x_n\}$满足：

$x_0 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, n = 1,2,3\cdots\cdots$，证明：$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证 $x_0 = 1, x_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$,

$x_2 = \sqrt{2x_1} = 2^{\frac{3}{4}}$.

用数学归纳法可证

$$x_n = 2^{\frac{2^n-1}{2^n}} = 2^{1-\frac{1}{2^n}}, (n = 0,1,2\cdots\cdots) \quad ①$$

$\because \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} < \dfrac{2^n-1}{2^n}$.

由 ① 式知 $x_{n-1} < x_n (n = 0,1\cdots\cdots)$ 即$\{x_n\}$单调递增.

再由 ① 式知 $1 \leqslant x_n < 2$，$\therefore \{x_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a \geqslant 1$.

$\because x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$

两边取极限有：$a = \sqrt{2a}$. $\therefore a^2 = 2a$，$\because a \neq 0$.

$\therefore a = 2$，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

87.（华东师范大学，1999 年） 设 $a > 0, 0 < x_1 < a$,

$x_{n+1} = x_n(2 - \dfrac{x_n}{a}), n \in N$,

证明：$\{x_n\}$收敛，并求其极限.

证 先用数学归纳法证明

$$0 < x_n < a, n \in N \quad ①$$

当 $n = 1$ 时，结论成立，归纳假设结论对 n 成立，再证 $n+1$ 时，因为

$x_{n+1} = x_n(2 - \dfrac{x_n}{a}) = -\dfrac{1}{a}(x_n - a)^2 + a$

$\therefore 0 < x_{n+1} < a$

即证 ① 式成立.

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 2 - \dfrac{x_n}{a} > 2 - \dfrac{a}{a} = 1$.

$\therefore \{x_n\}$单调递增，且有上界. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. 由

$x_{n+1} = x_n(2 - \dfrac{x_n}{a})$,

两边取极限得

$$b = b(2 - \frac{b}{a}) \quad ②$$

由 ① 式及$\{x_n\}$单调递增，显然 $b \neq 0$，由 ② 解得 $b = a$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

88.(厦门大学,2001 年)　设 $0 < x_1 < c$(c 是常数),证明:

$x_{n+1} = 2x_n - \frac{x_n^2}{c}, (n = 1,2,\cdots)$ 收敛,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　在上题中,令 $a = c$,可得 $\{x_n\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

89.(武汉大学,1995 年)　设 $\{a_n\}$ 无上界,证明:存在子序列 $\{a_{n_k}\}$,使得 $a_{n_k} \to +\infty$(当 $k \to +\infty$).

证　由 $\{a_n\}$ 无上界,$\therefore$ 存在 $n_1 \in N$,使 $a_{n_1} > 1$,同理,存在 $n_2 \in N(n_2 > n_1)$ 且 $a_{n_2} > 2$,……,这样继续下去,$\forall M \in N$,存在 $n_M \in N$,使 $a_{n_M} > M$,$(M = 1,2,\cdots\cdots)$,其中 $n_1 < n_2 < \cdots\cdots < n_M < \cdots\cdots$,所以对于这个子序列 $\{a_{n_k}\}$,有 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = +\infty$.

90.(厦门大学,2002 年)　证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,其中 $x_1 = 1$,

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n}), n = 1,2\cdots\cdots$

并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证　$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{x_n \cdot \frac{3}{x_n}} = \sqrt{3}.$　①

由 ① 式可知 $\{x_n\}$ 有下界,又

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{x_n^2}) \leqslant \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{3}) = 1.$

$\therefore \{x_n\}$ 单调递减,从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$,存在.

$\therefore b = \frac{1}{2}(b + \frac{3}{b})$,解得 $b = \sqrt{3}$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}.$

91.(华中科技大学)　已知数列 $a_1 = 2, a_2 = 2 + \frac{1}{2}, a_3 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$,

$a_4 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$…… 的极限存在,求此极限.

解　$\because a_n = 2 + \frac{1}{a_{n-1}}$. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ 已知,则

$l = 2 + \frac{1}{l}, \therefore l^2 - 2l - 1 = 0$

$l = 1+\sqrt{2}$ 或 $l = 1-\sqrt{2}$(舍去).

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{2}$.

92.(武汉大学,1999 年) 设 $u_1 = 3, u_2 = 3+\dfrac{4}{3}, u_3 = 3+\dfrac{4}{3+\dfrac{4}{3}}, \cdots\cdots$ 如果数列$\{u_n\}$收敛,计算其极限,并证明数列$\{u_n\}$收敛于上述极限.

证 由假设有

$$u_{n+1} = 3+\frac{4}{u_n}. \qquad ①$$

用数学归纳法可证

$$3 \leqslant u_n \leqslant \frac{13}{3}. \qquad ②$$

$$|u_{n+1}-u_n| = \left|\left(3+\frac{4}{u_n}\right)-\left(3+\frac{4}{u_{n-1}}\right)\right| = \frac{4|u_n-u_{n-1}|}{u_nu_{n-1}} \leqslant \frac{4}{9}|u_n-u_{n-1}|.$$

$\therefore \{u_n\}$是压缩数列一定收敛.(证明见第 128 题).设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ 存在.

由 ① 式两边取极限得 $a = 3+\dfrac{4}{a}$, $\therefore a^2-3a-4=0$

解得 $a = 4$ 或 $a = -1$(舍去).

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.

93.(北京大学,1996 年) 判断下列命题的真(√)伪(×).

(1) 对数列$\{a_n\}$和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,若$\{S_n\}$是有界数列,则$\{a_n\}$是有界数列; ( )

(2) 数列$\{a_n\}$存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充分必要条件是:对任一自然数 p,都有 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+p}-a_n| = 0$. ( )

答:(1)√.设 $|s_n| < M$,则 $|a_n| = |S_n - S_{n-1}| \leqslant 2M$.

(2)×.例:$a_n = \sqrt{n}$, $|a_{n+p}-a_n| = \dfrac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}} \to 0$.

但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

94.(武汉大学,2000 年,内蒙古大学) $y_{n+1} = y_n(2-y_n)$, $0 < y_0 < 1$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

证 $\because y_{n+1} = y_n(2-y_n) = 1-(y_n-1)^2$. ①

由 ① 式可证(用数学归纳法)

$$0 < y_n < 1, n = 0,1,2\cdots \qquad ②$$

$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 2 - y_n > 1.$

$\therefore \{y_n\}$单调递增有上界，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$存在，且$l > 0$，由①式两边取极限得$l = l(2-l)$，$\therefore l^2 = l \because l \neq 0$，$\therefore l = 1$.此即$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

95.（华中师范大学，2002年） 设$x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots\cdots + \frac{2n-1}{2^n}$，$(n = 1,2,3\cdots\cdots)$求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 $x_n - \frac{1}{2}x_n = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{2n-1}{2^n}) -$

$(\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots\cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}})$

$= \frac{1}{2} + 2(\frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$= \frac{1}{2} + 2[1 - (\frac{1}{2})^{n-1}] - \frac{2n-1}{2^n}.$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3.$

96.（华中师范大学，1996年） 设有数列$\{x_n\}$，若有常数q，$0 < q < 1$，使对任何自然数n有$|x_{n+1}| \leqslant q|x_n|$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证 $|x_n| \leqslant q|x_{n-1}| \leqslant q^2|x_{n-2}| \leqslant \cdots\cdots \leqslant q^{n-1}|x_1|$.

又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$收敛，$(\because 0 < q < 1)$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$收敛，从而$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

97.（哈尔滨工业大学） 证明数列$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots\cdots + \sqrt{a}}}$（$n$个根式），$a > 0$，$n = 1,2\cdots\cdots$极限存在，并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证 由假设知$x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ ①

用数学归纳法证明：$x_{n+1} > x_n$，$k \in N$ ②

$\because x_2 = \sqrt{a + x_1} = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1$，当$n = 1$时，②式成立.

假设$n = k$结论成立，即$x_{k+1} > x_k$.

当$n = k + 1$时，由①

$x_{k+2} = \sqrt{a + x_{k+1}} > \sqrt{a + x_k} = x_{k+1}$.

即证②式对$n = k + 1$也成立，从而对一切自然数成立，此即证$\{x_n\}$单

调递增.

用数学归纳法可证 $0 < x_n < \sqrt{a}+1, n \in N$, ③

此即证 $\{x_n\}$ 单调递增有上界,从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$(存在).再对 ① 式两边取极限得 $l = \sqrt{a+l}$, $\therefore l^2 - l - a = 0$,

解得 $l = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ 和 $l = \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$(舍去).

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

98.(中国科学院,2001 年;安徽大学) 设 a_1 和 b_1,是任意两个正数,并且 $a_1 \leqslant b_1$,还设 $a_n = \dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, (n = 2,3\cdots\cdots)$ ①

求证:序列 $a_1, a_2\cdots\cdots$ 和 $b_1, b_2, \cdots\cdots$ 均收敛,并且有相同的极限.

证 令 $c_n = \dfrac{1}{a_n}, d_n = \dfrac{1}{b_n}$,则

$c_n = \dfrac{c_{n-1}+d_{n-1}}{2}, d_n = \sqrt{c_{n-1}d_{n-1}} (n = 2,3\cdots\cdots)$

$c_1 \geqslant d_1$.

$\therefore c_n = \dfrac{c_{n-1}+d_{n-1}}{2} \geqslant \sqrt{c_{n-1}d_{n-1}} = d_n$. ②

由 ② 式有

$c_n = \dfrac{c_{n-1}+d_{n-1}}{2} \leqslant \dfrac{2c_{n-1}}{2} = c_{n-1}$,

$\therefore \{c_n\}$ 单调递减.

而 $c_n \geqslant c_{n-1} \geqslant \cdots\cdots \geqslant c_1 \geqslant d_1$,有下界,$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{1}{l}$(存在).

$\therefore |c_n| < M$(有界),即 $-M < c_n < M$.

$d_n = \sqrt{c_{n-1}d_{n-1}} \geqslant d_{n-1}$,

$\therefore \{d_n\}$ 单调递增.

但 $d_n \leqslant c_n < M$,此即 $\{d_n\}$ 单调递增有上界.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} d_n = \dfrac{1}{s}$(存在.)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{c_n} = l$.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{d_n} = s$.

由 ① 式两边取极限有

$$\begin{cases} l = \dfrac{2ls}{l+s}, \\ s = \sqrt{ls} \end{cases}$$ 解得 $s = l(\because a_n > 0, b_n > 0)$

此即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

99.（大连工学院） 设 a_1, b_1 是二正数，令

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

证明：$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证 把这里的 a_n 和 b_n 看成上题的 d_n 和 c_n 即可.

100.（中国科技大学；北京邮电学院）

已知 $a_1 = \sqrt{6}, a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}(n = 2,3\cdots\cdots)$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求它的值.

证 $\because a_{n+1} - a_n = \sqrt{6+a_n} - \sqrt{6+a_{n-1}} = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{6+a_n} + \sqrt{6+a_{n-1}}}$,

$\therefore a_{n+1} - a_n$ 与 $a_n - a_{n-1}$ 同号，又

$a_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}} > \sqrt{6} = a_1$，即 $a_2 - a_1 > 0$.

$\therefore a_{n+1} - a_n > 0$，即证$\{a_n\}$是单调递增数列.

用数学归纳法可证 $0 < a_n < 3$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$(存在)，且 $l > 0$.

由 $a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$，两边取极限，

所以 $l = \sqrt{6+l}$，$\therefore l^2 - l - 6 = 0, l = 3$ 或 $l = -2$(舍去)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

101.（清华大学） 设连续函数 $f(x)$ 在$[1, +\infty)$上是正的，单调递减的，且 $d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.

证明：数列 $d_1, d_2\cdots\cdots$ 收敛.

证 由假设及积分中值定理，则

$$d_{n+1} - d_n = [\sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x] - [\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x]$$

$$= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(n+1) - f(\xi)，其中 \xi \in (n, n+1)$$

$\therefore d_{n+1} - d_n \leqslant 0$，即$\{d_n\}$单调递减.

又 $d_n = [f(1) + f(2) + \cdots\cdots + f(n)] -$

$[\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x + \cdots\cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x]$

$= [f(1) - f(\xi_1)] + [f(2) - f(\xi_2)] + \cdots\cdots + [f(n-1) - f(\xi_{n-1})] +$ $f(n)$,其中 $\xi_k \in (k, k+1), k = 1,2,\cdots\cdots n-1$.

$\therefore f(k) - f(\xi_k) \geqslant 0$,而 $f(n) > 0$.

$\therefore d_n \geqslant f(n) > 0, (n = 1,2\cdots\cdots)$

$\therefore \{d_n\}$单调递减有下界,$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} d_n$ 存在.

102.(甘肃工业大学) 设 $a_1 = 2$,

$$a_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2}a_{n-1} + \frac{1}{n}(n = 2,3\cdots\cdots) \qquad ①$$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ 存在.

证 由 ① 式可得

$$na_n = \frac{n+1}{2}a_{n-1} + 1, \qquad ②$$

用数学归纳法可证:$2 \leqslant na_n \leqslant 2 + \frac{30}{n}, (n \geqslant 5)$ ③

$2a_2 = \frac{3}{2}a_1 + 1 = 3 + 1 = 4$.

$3a_3 = 2a_2 + 1, \therefore a_3 = \frac{5}{3}, 4a_4 = \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3} + 1, \therefore a_4 = \frac{31}{24}, 5a_3 =$

$3a_4 + 1 = \frac{31}{8} + 1$,即 $2 \leqslant 5a_5 \leqslant 2 + \frac{30}{5}$,$\therefore n = 5$ ③ 式成立.

归纳假设当 $n = k$ 时,③ 式成立,则当 $n = k+1$ 时.由 ② 知

$$(k+1)a_{k+1} = \frac{k+2}{2}a_k + 1 = \frac{k+2}{2k}ka_k + 1, \qquad ④$$

由归纳假设可得

$$2 \leqslant \frac{k+2}{2k}ka_k + 1 \leqslant \frac{k+2}{2k}(2 + \frac{30}{k}) + 1, \qquad ⑤$$

下证:$\frac{k+2}{2k}(2 + \frac{30}{k}) + 1 < \frac{30}{k+1} + 2$, ⑥

只需证:$\frac{k+2}{k} + \frac{15(k+2)}{k^2} - \frac{30}{k+1} - 1 < 0$

只需证 $k(k+1)(k+2) + 15(k+2)(k+1) - 30k^2 - k^2(k+1) < 0$.

只需证 $-13k^2 + 47k + 30 < 0$.只需证 $k(47 - 13k) + 30 < 0$. ⑦

当 $k \geqslant 5$ 时,⑦ 式显然成立,从而 ⑥ 式成立.

再由 ①、⑤

$\therefore 2 \leqslant (k+1)a_{k+1} \leqslant \dfrac{30}{k+1} + 2.$

从而 ③ 式成立，然后由 ③ 式及两边夹法则

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} na_n = 2.$

103.（湖南大学） 数列$\{x_n\}$：$x_0 = a, x_1 = b$，

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), (n \geqslant 2) \quad ①,$$

求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 $x_n - x_{n-1} = [\frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})] - x_{n-1}$

$$= -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}), (n \geqslant 2) \quad ②$$

由 ② 式有

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = b - a, \\ x_2 - x_1 = -\dfrac{1}{2}(x_1 - x_0) = -\dfrac{1}{2}(b-a), \\ x_3 - x_2 = -\dfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = (-\dfrac{1}{2})^2(b-a), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - x_{n-1} = (-\dfrac{1}{2})^{n-1}(b-a). \end{cases}$$

把上面各式相加得

$$x_n - x_0 = [1 + (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})^2 + \cdots\cdots + (-\frac{1}{2})^{n-1}](b-a).$$

两边取极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n - a = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}(b-a) = \frac{2}{3}(b-a),$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}(a+2b).$$

104.（厦门大学，2000 年） (1) 证明不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$，$(x > 0)$；(2) 由(1) 计算$\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + \dfrac{1}{n^x})(1 + \dfrac{2}{n^x})\cdots\cdots(1 + \dfrac{n}{n^x}), x \geqslant 2.$

证 (1) $\because \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots\cdots (x > 0).$

$\therefore \ln(1+x) - x = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2) < 0, (x > 0)$

$\ln(1+x)-(x-\frac{x^2}{2})=\frac{x^3}{3}+o(x^3)>0.(x>0)$

$\therefore x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x.$

(2)(ⅰ)当 $x>2$ 时

$\ln(1+\frac{1}{n^x})(1+\frac{2}{n^x})\cdots\cdots(1+\frac{n}{n^x})=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^x})$

$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^x}=\frac{1}{n^x}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\to 0,(n\to\infty).$

另一方面 $\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^x})\geqslant\sum_{k=1}^{n}[\frac{k}{n^x}-\frac{1}{2}(\frac{k}{n^x})^2]$

$=\frac{n(n+1)}{2n^x}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^{2x}}\to 0(n\to\infty)$

由两边夹法则得

$\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n^x})(1+\frac{2}{n^x})\cdots\cdots(1+\frac{n}{n^x})=0.$

$\therefore\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^x})(1+\frac{2}{n^x})\cdots\cdots(1+\frac{n}{n^x})=1.$

(ⅱ)当 $x=2$ 时

$\ln(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots\cdots(1+\frac{n}{n^2})=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})$

$\leqslant\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\to\frac{1}{2},(n\to\infty).$

$\ln(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots\cdots(1+\frac{n}{n^2})\geqslant$

$\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{n(n-1)(2n+1)}{12n^2}\to\frac{1}{2},(n\to\infty).$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots\cdots(1+\frac{n}{n^2})=\frac{1}{2},$

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots\cdots(1+\frac{n}{n^2})=e^{\frac{1}{2}}.$

105.【广西师范大学】 若 $a>0,a_1=(a+a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}},a_2=(a_1+a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}},\cdots\cdots,a_n=(a_{n-1}+a_{n-2}^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots$ 试证:

(1)数列$\{a_n\}$为单调有界数列;

(2)数列$\{a_n\}$收敛于方程 $x^3=x+x^{\frac{1}{3}}$ 的一个正根.

证 (1)分两种情况:

(ⅰ)当 $a_1\geqslant a$ 时,用第二数学归纳法可证 $a_{n+1}\geqslant a_n,(n\in N)$ ①

当 $n=1$ 时

$a_2^3 - a_1^3 = (a_1 + a^{\frac{1}{3}}) - (a + a^{\frac{1}{3}}) = a_1 - a \geqslant 0,$ ②

由于 $y = x^3$ 是增函数,由 ② 知 $a_2 \geqslant a_1$,即 $n = 1$ 时,① 式成立,归纳假设结论对 $n \leqslant k$ 都成立,再证 $n = k + 1$ 时

$a_{k+2}^3 - a_{k+1}^3 = (a_{k+1} - a_k) + (a_k^{1/3} - a_{k-1}^{1/3}) \geqslant 0.$

$\therefore a_{k+2} \geqslant a_{k+1}$,即 ① 式对 $n = k + 1$ 也成立,从而 ① 式对一切自然数都成立,此即$\{a_n\}$是单调递增数列.

令 $f(x) = x^3 - x - x^{\frac{1}{3}}$,则 $f(x)$ 是奇函数.

$\because f(1) < 0, f(2) > 0, \therefore f(x)$ 在$(1,2)$ 内有一个正根,而且

$f(x)$ 在$(2, +\infty)$ 无根,设 x_0 是 $f(x)$ 最大的正根.

再由 $a_1 \geqslant a, \therefore a + a^{\frac{1}{3}} \geqslant a^3, \therefore f(a) \leqslant 0$,又 $a > 0, \therefore a \leqslant x_0$,但是

$x_0 + x_0^{\frac{1}{3}} = x_0^3$,所以用数学归纳法可证

$a_n \leqslant x_0, (n \in N)$ ③

当 $n = 1$ 时,$a_1^3 = a + a^{\frac{1}{3}} \leqslant x_0 + x_0^{\frac{1}{3}} = x_0^3, \therefore a_1 \leqslant x_0$,即 $n = 1$ 时,③式成立,归纳假设对论对 $n \leqslant k$ 都成立,当 $n = k + 1$ 时,

$a_{k+1}^3 = a_k + a_{k-1}^{\frac{1}{3}} \leqslant x_0 + x_0^{\frac{1}{3}} = x_0^3, \therefore a_{k+1} \leqslant x_0.$

从而 ③ 对一切自然数成立,此即证$\{a_n\}$单调递增有上界.

(ⅱ) 当 $a_1 < a$ 时,类似可证$\{a_n\}$单调递减有下界.

(2) 由上面(1) 知,$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l > 0$(存在)

$\because a_n = (a_{n-1} + a_{n-2}^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}$

$\therefore a_n^3 = a_{n-1} + a_{n-2}^{\frac{1}{3}}$

两边取极限 $l^3 = l + l^{\frac{1}{3}}$,即 $f(l) = 0$,

$\therefore l$ 为 $x^3 = x + x^{\frac{1}{3}}$ 的正根.

106.(福建师范大学) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,数列$\{y_n\}$: $y_1 = 1$,

$2y_{n+1} = y_n + \sqrt{y_n^2 + a_n} (n = 1,2,3\cdots\cdots)$

证明:$\{y_n\}$是递增的收敛数列.

证 $2y_{n+1} - 2y_n = \sqrt{y_n^2 + a_n} - y_n$

$= \dfrac{a_n}{\sqrt{y_n^2 + a_n} + y_n} > 0.$ ①

$\therefore y_{n+1} \geqslant y_n$,此即$\{y_n\}$单调递增.用归纳法证明:$y_n > 1$.

$\because y_1 = 1, 2y_2 = y_1 + \sqrt{y_1^2 + a_1} = 1 + \sqrt{1 + a_1} > 2.$

$\therefore y_2 > 1.$

$2y_n = y_{n-1} + \sqrt{y_{n-1}^2 + a_{n-1}} \geqslant 1 + \sqrt{1 + a_{n-1}} > 2.$

$\therefore y_n > 1.$ ②

由 ② 有

$\sqrt{y_n^2 + a_n} + y_n > \sqrt{1 + a_n} + 1 > 2.$

再由 ①

$$y_{n+1} - y_n = \frac{a_n}{2(\sqrt{y_n^2 + a_n} + y_n)} < \frac{a_n}{4}. \qquad ③$$

设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n = c$,那么由 ③ 式有

$\sum\limits_{k=1}^{n}(y_{k+1} - y_k) < \frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n} a_n < \frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n = \frac{c}{4}, y_n - y_1 < \frac{c}{4},$

$\therefore y_n < \frac{c}{4} + y_1.$

即$\{y_n\}$递增有上界,$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 存在,即证.

107.(华中师范大学)解下列各题.

(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots\cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$;

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时}, \end{cases}$

证明:$f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

解 (1) 由施笃兹公式有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots\cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n - (n-1)} = 1.$$

(2) 由罗必塔法则有:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[\int_0^x e^{t^2} dt\right]^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\left[\int_0^x e^{t^2} dt\right] \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}$$

$$= 2\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0.$$

(3) 当 $x \neq 0$ 时，$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$，

当 $x = 0$ 时，$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = 0.$

又 $\lim_{x\to 0}f'(x) = \lim_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})$ 不存在，所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

108.（南京大学，1998 年） 讨论由 $x_1 = a, x_n = px_{n-1} + q(p > 0)$ 所定义的数列的敛散性.

解 $x_n = px_{n-1} + q$， ①

$x_{n-1} = px_{n-2} + q$， ②

由 ① − ② 可得 $x_n - (1+p)x_{n-1} + px_{n-2} = 0.$ ③

构造 $y^2 - (1+p)y + p = 0$ ④

解得 $y_1 = p, y_2 = 1.$

(1) 当 $p \neq 1$ 时

$\therefore x_n = Ap^{n-1} + B.$ ⑤

当 $n = 1$ 时，由 ⑤ 有 $a = A + B$，⑥

当 $n = 2$ 时，$x_2 = pa + q$，$\therefore pa + q = Ap + B.$ ⑦

由 ⑥，⑦ 解得 $A = a - \frac{q}{1-p}, B = \frac{q}{1-p}.$

$\therefore x_n = \left(a - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1} + \frac{q}{1-p}.$

当 $0 < p < 1$ 时，$\lim_{n\to\infty}x_n = \frac{q}{1-p}.$

当 $p > 1$ 时，$\lim_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

(2) 当 $p = 1$ 时，$x_n = A + nB.$

$$\begin{cases} a = A + B. & ⑧ \\ a + q = A + 2B. & ⑨ \end{cases}$$

解得 $A = a - q, B = q.$

$\therefore x_n = a - q + nq$

$\therefore$ 当 $p = 1, q \neq 0$ 时，$\lim_{n\to\infty}x_n$ 不存在；当 $p = 1, q = 0$ 时，$\lim_{n\to\infty}x_n = a.$

109.（工程兵工程学院） (1) 设 $x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$，证明：

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 必存在，并求出此极限值；

(2) 设 $y_{n+1} > y_n (n = 1,2\cdots\cdots)$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$，及 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$(有限数)。

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

证 (1) 由假设可知，$x_n > 0, (n = 0,1,2\cdots\cdots)$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{1}{x_n}} = 1. (n = 0,1,2\cdots\cdots) \quad ①$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1 - x_n^2}{2x_n} \leqslant 0. \quad ②$$

由 ①,② 知 $\{x_n\}$ 单调下降且有下界，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \geqslant 1$(存在)。

由 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$，两边取极限得

$l = \frac{1}{2}(l + \frac{1}{l})$，即 $l^2 = 1$，$\therefore l = 1$ 或 $l = -1$(舍去)。

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

(2) 证明见本节第 40 题。

110. (**复旦大学**) 对于数列 $x_0 = a, 0 < a < \frac{\pi}{2}$，

$x_n = \sin x_{n-1} (n = 1,2,\cdots\cdots)$

证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$.

证 (1) $\because 0 < a < \frac{\pi}{2}$，则 $0 < x_n < \frac{\pi}{2}, (n = 0,1,2,\cdots\cdots)$. ①

$\therefore x_n = \sin x_{n-1} < x_{n-1}$. ②

由 ①,② 两式和 $\{x_n\}$ 为单调递减数列且有下界，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

由 $x_n = \sin x_{n-1}$，两边取极限有 $b = \sin b$，$\therefore b = 0$. 此即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(2) 要证：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$，只需证明：$\lim\limits_{n\to\infty} n x_n^2 = 3$. ③

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2} = +\infty$.

由施笃兹公式：



$$\lim_{n\to\infty} nx_n^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}.$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\sin^2 x_{n-1}}{x_{n-1}^2-\sin^2 x_{n-1}}.$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4+o(x_{n-1}^4)}{x_{n-1}^2-\left(x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^3}{6}+o(x_{n-1}^3)\right)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4+o(x_{n-1}^4)}{\frac{x_{n-1}^4}{3}+o(x_{n-1}^4)} = 3.$$

从而③式得证，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}\,x_n = 1$.

111.（南京大学） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

（1）若 a 为有限数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+2x_2+\cdots\cdots+nx_n}{n(n+1)} = \dfrac{a}{2}$；

（2）若 a 为 $+\infty$，证明：$\dfrac{x_1+2x_2+\cdots\cdots+nx_n}{n(n+1)} = +\infty$.

证　令 $b_n = x_1+2x_2+\cdots\cdots+nx_n,\ y_n = n(n+1)$.

（1）$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n-b_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx_n}{n(n+1)-n(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{2} = \dfrac{a}{2}$.

由 *Stolz* 公式：

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{x_1+2x_2+\cdots\cdots+nx_n}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = \frac{a}{2}.$$

（2）由于 *Stolz* 公式对 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n-b_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = \infty$ 也成立.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{x_1+2x_2+\cdots\cdots+nx_n}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = +\infty.$$

112.（中国科技大学） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，且 $f(a)\cdot f(b) < 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0, \forall x\in[a,b]$.　①

证明：序列 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, x_1\in[a,b], n = 1,2\cdots\cdots$　②

有极限，且此极限为方程 $f(x) = 0$ 之根.

证　由已知条件知 $f(x) = 0$，在 $[a,b]$ 内有唯一根，记为 c，则 $a < c < b$.

（1）若 $x_1 > c$，下证 $\{x_n\}$ 为单调递减数列且 c 为下界. 事实上，

$$0 < f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-x_2} = \frac{f'(\xi_1)(x_1-c)}{x_1-x_2}, c < \xi_1 < x_1.$$

③

$\therefore x_1 - x_2 > 0$，即 $x_1 > x_2$， ④

$\because f''(x) > 0, \therefore f'(x_1) > f'(\xi_1)$ 由 ③ 式知

$\dfrac{x_1 - c}{x_1 - x_2} > 1$，解得 $x_2 > c$， ⑤

由 ④，⑤ 有 $c < x_2 < x_1$.

用数学归纳法可证 $\{x_n\}$ 为单调递减数列，且 $x_n > c$.

(2) 若 $x_1 = c$，由 ② 式

$x_2 = c - \dfrac{f(c)}{f'(c)} = c$. 从而 $x_n = c, n \in N$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ 即证.

(3) 若 $x_1 < c$，类似(1)可证 $\{x_n\}$ 仍为单调递减数列，且有下界 c.

综上可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$(存在).

$$\therefore l = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = l - \frac{f(l)}{f'(l)}$$

$\therefore f(l) = 0$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

113.（北京大学，1996 年） 设 $a_n \neq 0 (n = 1,2\cdots\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，若存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$，证明：$|l| \leqslant 1$.

证 用反证法，若 $|l| > 1$，取 C 满足 $|l| > C > 1$，由题意有

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |l|$. $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时有 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > C$，

$\therefore |a_{n+1}| > C|a_n| > C^2|a_{n-1}| > \cdots\cdots > C^{n-N+1}|a_N|$ ①

由 $C > 1$，① 式两边取极限可得

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}| = +\infty$，

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的假设矛盾，$\therefore |l| \leqslant 1$.

114.（南京航空学院） 设 $x_0 > 0, x_{n+1} = \dfrac{2(1 + x_n)}{2 + x_n} (n = 0,1,2\cdots\cdots)$ 证明数列 $x_n (n = 1,2\cdots\cdots)$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 的值.

证 $\because x_0 > 0$，可得 $x_n > 0 (n = 0,1,2\cdots\cdots)$

令 $f(x) = \dfrac{2(1 + x)}{2 + x}, (x > 0)$，则 $0 < f'(x) = \dfrac{2}{(2 + x)^2} < \dfrac{1}{2}$.

$f(x_n) = \dfrac{2(1 + x_n)}{2 + x_n} = x_{n+1}, (n = 0,1\cdots\cdots)$

考虑级数 $\Sigma|x_{n+1} - x_n|$，由于

$\therefore \left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}\right| = \left|\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\right| = \left|\frac{f'(\xi)(x_n-x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\right| < \frac{1}{2}.$

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛.

令 $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(x_{k+1}-x_k) = x_{n+1}-x_0$

由于 $a = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a + x_0 = l$(存在)

再由 $x_{n+1} = \dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$,两边取极限有

$l = \dfrac{2(1+l)}{2+l}$, $\therefore l^2 = 2, l = \sqrt{2}$ 或 $l = -\sqrt{2}$(舍去)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}.$

115.(东北师范大学) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right),(a>1).$

解 令 $x = \dfrac{1}{a}$, $\therefore |x|<1$,考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$,

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = x < 1$, $\therefore$ 此级数收敛.

令 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$,则, $s(x) = x\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$,再令 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$,

$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}.$

$\therefore f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}.$

0而 $s(x) = x\cdot f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2} = \dfrac{a^{-1}}{(1-a^{-1})^2}.$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right) = s(x) = \dfrac{a^{-1}}{(1-a^{-1})^2}.$

116.(内蒙古大学) (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n\sin^n x}$;

(2) 已知 $a_1 = \alpha, b_1 = \beta, (\alpha > \beta)$,

$a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}+b_n}{2} \quad (n = 1,2,\cdots).$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在且相等,并求出极限值.

解 (1) 令 $a = 2\sin x$,解 $|a| \leqslant 2$,则由第46题.

(Ⅰ)当 $a = 2\sin x \geq 1$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + 2^n\sin^n x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + a^n} = a = 2\sin x$.

(Ⅱ)当 $0 \leq a = 2\sin x < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^n\sin^n x} = 1$.

(Ⅲ)当 $-1 < a = 2\sin x < 0$,这时 $|a| < 1$.

$1 + \frac{1}{n}a^n \leq \sqrt[n]{1 + a^n} \leq \sqrt[n]{1 + |a|^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}a^n\right) = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + |a|^n}$.

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^n\sin x} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + a^n} = 1$.

(Ⅳ)当 $a = 2\sin x = -1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^n\sin^n x}$ 不存在.

(Ⅴ)当 $-2 \leq a = 2\sin x < -1$ 时,因为

$$\begin{cases} 2^n\sin^n x < 1 + 2^n\sin^n x < 2^n\sin^n x - \dfrac{2^n\sin^n x}{2} = \dfrac{1}{2}2^n\sin^n x, (n\text{ 为奇数}) \\ 2^n\sin^n x < 1 + 2^n\sin^n x < 2^n\sin^n x + \dfrac{2^n\sin^n x}{2} = \dfrac{3}{2}2^n\sin^n x, (n\text{ 为偶数}) \end{cases}$$

由两边夹法则,

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^n\sin^n x} = 2\sin x$.

(2) $\because a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_n}{2}$,可得

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{4}(a_{n-1} - a_{n-2}) = \frac{1}{4^2}(a_{n-2} - a_{n-3})$$
$$= \cdots = \frac{1}{4^{n-2}}(a_2 - a_1)$$
$$= \frac{1}{4^{n-2}}\left(\frac{a_1 + b_1}{2} - a_1\right) = \frac{1}{4^{n-2}} \cdot \frac{\beta - \alpha}{2} < 0. \qquad ①$$

$\therefore \{a_n\}$ 单调递减.

$a_1 = \alpha > \beta$

$a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = \dfrac{\alpha + \beta}{2} > \beta$.

由数学归纳可证 $\quad a_n > \beta, (n = 1,2,\cdots\cdots)$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$(存在).

又 $\quad b_n = 2a_{n+1} - a_n$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2l - l = l$,即 $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

其次,由 ① 可知

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{4^{n-2}}\frac{\beta-\alpha}{2} = a_{n-2} + \frac{1}{4^{n-3}}\cdot\frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{1}{4^{n-2}}\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$= \cdots = a_1 + \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-2}}\right)\frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad ②$$

② 两边取极限得

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = a_1 + \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$= \alpha + \frac{4}{3}\cdot\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\alpha+2\beta}{3}.$$

117.（北京大学，2001年） 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}}{1+a^{2n}}.$$

解 当 $|a| = 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}}{1+a^{2n}} = \frac{1}{2}.$$

当 $|a| < 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}}{1+a^{2n}} = 0.$$

当 $|a| > 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}}{1+a^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}+1} = 1.$$

118.（东北师范大学） 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = +\infty$，$p_k \geqslant 0 \quad (k = 1,2,\cdots)$，则

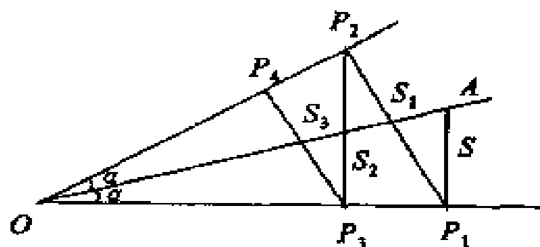
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} = a.$$

证 由施笃兹有公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_{k-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{p_n a_n}{p_n} = a.$$

119.（西北电讯工程学院） 如图，有一束光线从一条射线上任一点对与其夹角为 α 的射线作垂线，设其长为 S，再从垂足对下一条夹角为 α 的射线作垂线，设其长为 S_1，如此继续下去，试求

$\lim\limits_{n\to\infty}(S+S_1+\cdots S_n)$.



第 119 题图

解　如图,设 $OA=l$,则,

$S=l\sin\alpha$,

$S_1=OP_1\sin 2\alpha$

$\quad=l\cos\alpha\sin 2\alpha$

$S_2=OP_2\sin 2\alpha=(l\cos\alpha\cos 2\alpha)\sin 2\alpha$

$\quad=(l\cos\alpha\sin 2\alpha)\cos 2\alpha$

$S_3=OP_3\sin 2\alpha=(l\cos\alpha\sin 2\alpha\cos 2\alpha)\sin 2\alpha=(l\cos\alpha\sin 2\alpha)\cos^2 2\alpha$,

……

一般

$S_n=(l\cos\alpha\sin 2\alpha)\cos^{n-1}2\alpha$

$$\therefore S+S_1+\cdots+S_n=l\sin\alpha+(l\cos\alpha\sin 2\alpha)(1+\cos 2\alpha+\cdots+\cos^{n-1}2\alpha) \quad ①$$

(1) 若 $\alpha=0$ 或 π 时,$\sin\alpha=\sin 2\alpha=0$,由 ① 知

$S+S_1+\cdots+S_n=0$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(S+S_1+\cdots+S_n)=0$.

(2) 若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时,$\sin 2\alpha=0$,由 ① 知

$\lim\limits_{n\to\infty}(S+S_1+\cdots+S_n)=l$.

(3) 若 $\alpha\neq 0,\frac{\pi}{2},\pi$ 时,则 $|\cos 2\alpha|<1$,由 ① 式

$$S+S_1+\cdots+S_n=l\sin\alpha+l\cos\alpha\sin 2\alpha\frac{1-\cos^n 2\alpha}{1-\cos 2\alpha},$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(S+S_1+\cdots+S_n)=l\sin\alpha+\frac{l\cos\alpha 2\sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos 2\alpha}$$

$$=l\sin\alpha\left(1+\frac{2\cos^2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\right).$$

120.(中国科学院,1999 年,北京师范大学,1999 年)　求出使得下列不等式对所有自然数 n 都成立,此最大的数 α 及最小的数 β:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}. \quad ①$$

解　由 ① 式得

$$(n+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant 1\leqslant(n+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\therefore \alpha\leqslant\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\leqslant\beta. \quad ②$$

令 $$f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x},x\in(0,1],\qquad ③$$

则 $$f'(x)=-\frac{\frac{1}{1+x}}{\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.\qquad ④$$

再令

$$g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2,x\in[0,1]\qquad ⑤$$

则

$$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$

$$g''(x)=[2\ln(1+x)]\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2$$
$$=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}<0$$

故 $g'(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递减，$\therefore g'(x)<0$，但 $g(0)=0$，

$\therefore\quad g(x)<g(0)=0,(x>0)$，

$$(1+x)\ln^2(1+x)-x^2<0.\qquad ⑥$$

由 ④⑥ 两式知

$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 内严格递减. 令 $x=\frac{1}{n}$，由 ②,③ 知

$$\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta.$$

$$\therefore\max\alpha=\inf_{x\in(0,1]}f(x)=\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{\ln2}-1.$$

$$\min\beta=\sup_{x\in(0,1]}f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x+(1+x)\ln(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\ln(1+x)+1}=\frac{1}{2}.$$

121.(长沙铁道学院)　若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续且恒正，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}=exp\left\{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}[\ln f(\frac{1}{n})+\ln f(\frac{2}{n})+\cdots+\ln f(\frac{n}{n})]}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln f(\frac{1}{n})+\cdots+\ln f(\frac{n}{n})]} = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}.$$

122.(中国地质大学,2002年) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 令 $y=\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$,则,$\ln y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\dfrac{i}{n}$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}=\int_0^1\ln x\,dx=-1.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}.$$

123.(清华大学,2001年) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,其中$b\neq 0$,

用$\varepsilon-N$语言证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$.

证 $\because b\neq 0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1>0$,当$n>N_1$时有

$|b_n|>C$,其中$C=\dfrac{1}{2}|b|$.

又存在正数N_2,N_3,使得

$$|a_n-a|<\frac{C\varepsilon}{2},\ |b_n-b|<\frac{|b|\varepsilon}{2},$$

$$\therefore \left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{a_nb-ab_n}{b_nb}\right|<\left|\frac{a_nb-ab+ab-ab_n}{C|b|}\right|$$

$$\leqslant\frac{|a_n-a|}{C}+\left|\frac{a}{b}\right||b-b_n|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|a|\varepsilon}{2}=\frac{1+|a|}{2}\varepsilon.$$

由于a是常数,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}.$$

124.(北京航空航天大学,2000年) (1)叙述数列收敛的柯西原理;

(2)证明:数列$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin k}{2^k}(n=1,2,\cdots)$为收敛列.

解 (1)柯西原理:数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是:对$\forall\varepsilon>0$,总存在自然数N,使当$n,m>N$,都有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon.$$

(2)设$n>m$,则

$$|x_n-x_m|=\left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$< \frac{1}{2^{m+1}}\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n-m}}}{1-\frac{1}{2}}\right) < \frac{1}{2^m} < \frac{1}{m}.$$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n > m > N$ 时，有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

由柯西原理，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

125.（哈尔滨工业大学，2000 年） 设 $\{x_n\}$ 是一个无界数列，但非无穷大量，证明：存在两个子列，一个是无穷大量，另一个是收敛子列.

证 取充分大的数 $M > 0$，则数列 $\{x_n\}$ 中不超过 M 的个数一定有无穷多个，（否则 $\{x_n\}$ 是无穷大量了），记 A 为 $\{x_n\}$ 中不超过 M 的元素所成集合，则 A 是无限集.

同理，由于 $\{x_n\}$ 是无界数列，因此，数列 $\{x_n\}$ 绝对值大于 M 的个数也有无穷多个.

(1) 设大于 M 的 x_n 有无穷多个，取一个记为 x_{i_1}，那么 $\{x_n\}$ 中大于 x_{i_1} 的仍有无穷多个（只要把 x_{i_1}，看成 M 即可），取一个为 x_{i_2}，…，继续下去可得子列

$$x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_m} < \cdots$$

则 $\lim\limits_{m\to+\infty} x_{i_m} = +\infty$

(2) 若小于 $-M$ 的有无穷多个，可取 $x_{j_1} < -M$，仿上再取 $x_{j_2} < x_{j_1}\cdots$，这样继续下去可得子列

$$-M > x_{j_1} > x_{j_2} > \cdots > x_{j_m} > \cdots\cdots$$

则 $\lim\limits_{m\to+\infty} x_{j_m} = -\infty$.

综上可知，在 $\{x_n\}$ 中存在一个子列是无穷大量.

再证 A 中存在一个收敛子列. $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

先考虑在 $(-\delta,\delta)$ 中若含 A 的无穷子集，则将它们按 $\{x_n\}$ 的原来次序可得到收敛子列.

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots \quad ①$$

因为 $\forall x_{k_m}, x_{k_s}$

$$|x_{k_m} - x_{k_s}| < 2\delta < \varepsilon.$$

∴① 收敛.

若在 $(-\delta,\delta)$ 中只含 A 有限多个元素，再考虑 $(\delta,3\delta)$ 和 $(-3\delta,-\delta)$，如果其中有一个含 A 的无穷多个元素，仿上即证.

这样继续下去，由于 M 是常数，总存在 k 使 $M < k\delta$，因此

上述 $(s\delta, s+2\delta)$ 或 $(s\delta-2\delta, s\delta)$ 中，不可能都只含 A 中有限集，即证.

126.（浙江大学，2001 年） 用"$\varepsilon - N$ 语言"证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}=\dfrac{1}{3}$.

证 $\left|\dfrac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}-\dfrac{1}{3}\right| = \left|\dfrac{-5n+6}{3(3n^2+2n-3)}\right|$.

当 $n \geqslant 2$ 时，$5n-6>0$，

$$3n^2+2n-3 > 3n^2-3n > 0,$$

$$\therefore \left|\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}-\frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{5n-6}{3(3n^2-3n)} < \frac{5(n-1)}{9(n^2-1)} = \frac{5}{9n} < \frac{1}{n}. \quad ①$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon}]$，当 $n > N$ 时，由 ① 式有

$$\left|\frac{n_2-n+1}{3n^2+2n-3}-\frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{3n^2+2n-3}=\frac{1}{3}.$$

127.（有界变差数列收敛定理） 若数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$|x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\cdots+|x_2-x_1| \leqslant M \qquad (n=2,3\cdots) \quad ①$$

则称 $\{x_n\}$ 为有界变差数列，试证明：有界变差数列一定收敛.

证 令 $y_1=0, y_n=|x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\cdots+|x_2-x_1|$，$(n=2,3\cdots)$.

那么 $\{y_n\}$ 单调递增，由 ① 知 y_n 有界，$\therefore \{y_n\}$ 收敛，从而对 $\forall \varepsilon>0$，存在 $N>0$，使当 $n>m>N$ 时，有

$$|y_n-y_m|<\varepsilon.$$

此即 $|x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\cdots+|x_{m+1}-x_m|<\varepsilon$

而 $|x_n-x_m| \leqslant |x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\cdots+|x_{m+1}-x_m|<\varepsilon$.

由柯西准则，$\therefore \{x_n\}$ 收敛.

128.（压缩数列） 若数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$|x_n-x_{n-1}| \leqslant r|x_{n-1}-x_{n-2}| \qquad n=3,4,\cdots(0<r<1) \quad ①$$

则称它为压缩变差数列（简称为压缩数列）. 试证明：任意压缩数列一定收敛.

证 由 ① 有

$$|x_n-x_{n-1}| \leqslant r^2|x_{n-2}-x_{n-3}| \leqslant \cdots \leqslant r^{n-2}|x_2-x_1|.$$

$\therefore \quad |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_2 - x_1|$

$\leqslant (r^{n-2} + r^{n-3} + \cdots + 1)|x_2 - x_1|$

$< \dfrac{|x_2 - x_1|}{1 - r} = M,$ ②

其中 $M = \dfrac{|x_2 - x_1|}{1 - r}$ 为常数,然后由上题知数列$\{x_n\}$收敛.

129.(浙江大学,2002 年) 设$f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$,数列$\{x_n\}$由如下递推公式定义:$x_0 = 1, x_{n+1} = f(x_n),(n = 0,1,2,\cdots)$.求证:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

证 由 $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} = 1 + \frac{1}{x_n + 1} \geqslant 1. \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \quad ①$$

$|f'(x)| = \left| -\dfrac{1}{(x+1)^2} \right| \leqslant \dfrac{1}{2}$(当 $x \geqslant 1$).

$\therefore |x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - x_{n-1}|$

$\leqslant \dfrac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$.

则$\{x_n\}$为压缩数列,$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$,则由 ① 得

$l = \dfrac{l+2}{l+1}$,即 $l^2 = 2$,

$\therefore l = \sqrt{2}$ 或 $l = -\sqrt{2}$(舍去),此即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

130.(武汉大学,1994 年) 设函数在点 x_0 的空心领域 U^0 有定义,并且对任意以 x_0 为极限且含于 U^0 的数列$\{x_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在(有限数).

(1) 试证:相对于一切满足上述条件中的数列$\{x_n\}$来说,数列$\{f(x_n)\}$的极限是唯一确定的,即如果$\{x_n\}$和$\{x_n'\}$是任意两个以 x_0 为极限且含于 U^0 的数列,那么总有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n);$$

(2) 记(1)中$\{f(x_n)\}$的唯一确定的极限为 A,试证:$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

证 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A, \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = B$,用反证法,若 $A \neq B$,作新数列

$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \cdots x_n, x'_n \cdots\cdots$

它仍以 x_0 为极限,但数列

$$f(x_1), f(x'_2), \cdots f(x_n), f(x'_n) \cdots$$

的极限不存在,这与假设矛盾,$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$.

(2) 用反证法　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$,则存在$\varepsilon_0>0,\forall\delta>0$,

依次取,$\delta=\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n}\cdots$ 则存在相应的$x_1,\cdots,x_n,\cdots\in U^0$使当

$0<|x_1-x_0|<\frac{1}{2}$,但$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$,

$0<|x_2-x_0|<\frac{1}{2^2}$,但$|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$,

……

$0<|x_n-x_0|<\frac{1}{2^n}$,但$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$,

……

显然$\{x_n\}\subset U^0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$,这与假设矛盾.

131.(哈尔滨工业大学,1999年,华中理工大学,西北纺织工学院)

设$x_1=1$,

$$x_{n+1}=\frac{1+2x_n}{1+x_n},(n=1,2,\cdots)\qquad ①$$

证明:$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　由①知$0<x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}<2$.　②

再用数学归纳法,可证$\{x_n\}$单调递增,$\because x_1=1$,

$x_2=\frac{1+2x_1}{1+x_1}=\frac{3}{2}>x_1$,

归纳假设　$x_n\geqslant x_{n-1}$,则

$$x_{n+1}-x_n=(1+\frac{x_n}{1+x_n})-(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}})=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}\geqslant 0,$$

$\therefore\{x_n\}$单调递增.

由②式$\{x_n\}$有界,$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$存在.

再由①,两边取极限有

$l=\frac{1+2l}{1+l},\therefore l^2-l-1=0$

$\therefore l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$l=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去).

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

132.(华中理工大学,2000年)　求$l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\sqrt{2}(1-\cos\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

解 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1-\cos\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to\infty}[x^3(1-\cos\frac{1}{x^2})(\sqrt{x^2+1}+x)]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-\cos\frac{1}{x^2})(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}{\frac{1}{x^4}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x^2}\cdot(-\frac{2}{x^3})}{(-\frac{4}{x^5})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$\therefore l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\frac{n^3(1-\cos\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^2+1}-n}=1.$$

133.(太原工业大学) 求下列极限

(1) $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]$;

(2) $\lim_{n\to\infty}[(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})],(|x|<1)$;

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2x-2\tan x}{1+\cos 4x}$;

(4) $\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{2}{x})^x$.

解 (1)$\because$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,因此$\forall\varepsilon>0$,存在$N>0$,使当$n>N$时,

$$\left|\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right|<\varepsilon,$$

此即

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\varepsilon.$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]=0.$$

(2) 令 $f_n(x)=(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$,

$\therefore(1-x^2)f_n(x)=1-x^{2^{n+1}}$.

$$f_n(x)=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^2}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2^{n+1}} = 0$,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x^2}.$$

(3) 由罗必达法则

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2\tan x}{1+\cos 4x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sec^2 x\tan x - 2\sec^2 x}{-4\sin 4x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2\cos^3 x}\cdot\frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x}\right)$$

$$= -\sqrt{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin 4x}$$

$$= -\sqrt{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{4\cos 4x} = \frac{1}{2}.$$

(4) 令 $y = (\cos\frac{2}{x})^x$,则 $\ln y = x\ln\cos\frac{2}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\cos\frac{2}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\cos\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos\frac{2}{x}}\left(-\sin\frac{2}{x}\right)\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}(\cos\frac{2}{x})^x = e^0 = 1.$$

134.(华中理工大学,2000 年) 设 $f(x)$ 可微且 $|f'(x)| \leqslant r < 1$,r 是常数. 给定 x_0,令 $x_n = f(x_{n-1})$,$(n = 1,2,\cdots\cdots)$. 证明:序列 $\{x_n\}$ 收敛.

证 因为

$$\begin{aligned}|x_n - x_{n-1}| &= |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})|\\ &= |f'(\xi)(x_{n-1}-x_{n-2})|\\ &\leqslant r|x_{n-1}-x_{n-2}|, \qquad (n = 2,3,\cdots).\end{aligned} \quad ①$$

由 ① 知序列为压缩变差序列,由第 128 题知 $\{x_n\}$ 收敛.

135.(华中理工大学,1998 年) 设 $x_0 = 2$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), n = 0,1,2,\cdots \quad ①$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 令 $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$,$(x \geqslant 2)$,则

$$0 \leqslant f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{x^2}) \leqslant \frac{1}{2}, (x \geqslant 2).$$

$\because x_{n+1} = f(x_n)$

$\therefore |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2} < 1$

由上题知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$(存在).

再对 ① 式两边求极限

$\therefore l = \frac{1}{2}(l + \frac{2}{l})$,

解得 $l = \sqrt{2}$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$

136.(武汉大学,1992 年) 给定数列 $\{x_n\}$ 如下:

$$x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right], n = 0,1,2,\cdots \quad ①$$

其中 a 为一给定的正数,$k(\geqslant 2)$ 为一给定的自然数.

(1) 证明:数列 $\{x_n\}$ 收敛;

(2) 求出其极限值.

证 (1) 可证 $x_n > 0$,因为

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \cdots + x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{k} \geqslant \sqrt[k]{a} > 0. \quad ②$$

② 式说明 $\{x_n\}$ 有下界.

其次由 ② 式,有 $x_n^k \geqslant a$,再由 ① 式有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{k-1}{k} + \frac{a}{kx_n^k} \leqslant \frac{k-1}{k} + \frac{a}{ka} \leqslant 1.$$

$\therefore x_{n+1} \leqslant x_n$,此即 $\{x_n\}$ 单调下降.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$(存在).

(2) 由 ① 式两边取极限有

$$l = \frac{1}{k}[(k-1)l + \frac{a}{l^{k-1}}]$$

解得 $l = \sqrt[k]{a}$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[k]{a}$.

137.(东北师范大学) 若 $f(x)$ 在 R 上可微,具 $|f'(x)| \leqslant r < 1$,则存在一点 a,使 $f(a) = a$.

证 取 $x_1 \in R$,规定

$$x_{n+1} = f(x_n), x = 1,2,\cdots \quad ①$$

由第 135 题知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 存在.

其次由于 $f(x)$ 在 R 上可微，从而连续，再对 ① 式两边取极限有

$$a = f(a).$$

138.（吉林工业大学）　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可微且 $|f'(x)| \leqslant q < 1$，任取 x_0，令 $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots x_n = f(x_{n-1}), \cdots\cdots$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$ 存在，且 x^* 为方程 $x = f(x)$ 的根.

证　由上题可得.

139.（北京科技大学，1998 年）　设 E 是实数集 R 的子集，$\beta \in R$，且 $\beta = sup\{E\}$，试证：存在数列 $\{x_n\}$，$x_n \in E (n = 1,2,\cdots)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

证　由于 $\beta = \sup\limits_{x\in E} x$，由上确界定义，对 $\forall \varepsilon_n = \dfrac{1}{n} > 0$，$\exists x_n \in E$，使得 $x_n > \beta - \varepsilon_n$，即

$0 \leqslant \beta - x_n < \dfrac{1}{n}, (n = 1,2,\cdots).$

从而　$\lim\limits_{n\to\infty}(\beta - x_n) = 0$，即　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta.$

140.（华中师范大学）　已知：$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8\cdots$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, (n = 3,4,5,\cdots) \qquad ①$$

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, (n = 1,2,\cdots) \qquad ②$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$，证明：

$$B = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

证　$b_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a_n}{a_n + a_{n-1}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}} = \dfrac{1}{1 + b_{n-1}},$

即　$b_n(1 + b_{n-1}) = 1.$

两边取极限得

$B(1 + B) = 1,$

解得　$B = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$

由于　$b_n > 0$，　$\therefore B \geqslant 0$，所以

$B = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}.$

141.（华中师范大学）　设 $x_1 > 0$，

$$x_{n+1} = \frac{3(1 + x_n)}{3 + x_n}, n = 1,2,\cdots \qquad ①$$

证明:此数列有极限,并求其极限值.

证　由①式知　$x_n>0,(n=1,2,\cdots)$.其次由①知

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{3+\frac{3}{x_n}}{1+\frac{3}{x_n}}>1,$$

$\therefore\{x_n\}$ 单调递增.仍由①

$$x_{n+1}=3-\frac{6}{3+x_n}<3.$$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$(存在)　由①式两边取极限有:

$l=\dfrac{3(1+l)}{3+l},\therefore l^2=3,$

$l=-\sqrt{3}$(舍去),$l=\sqrt{3}$.

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

142.(北京师范大学,1996年)(1)设　$0<x_1<1$,

$$x_{n+1}=x_n(1-x_n),n=1,2,\cdots \qquad ①$$

证明:1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$;

(2)已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$\{p_n\}$ 为单调增加的正序列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=+\infty$,$p_{n+1}\neq p_n$,$n=1,2,\cdots$.求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0.$$

证　(1)1) 由 $0<x_1<1$,可证得

$$0<x_n<1,(n=1,2,\cdots) \qquad ②$$

$\therefore\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1-x_n<1,x_{n+1}<x_n\qquad(n=1,2,\cdots)$

此即$\{x_n\}$单调递减,由②式知$\{x_n\}$有下界,

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$(存在).

由①式可得

$l=l(1-l),\therefore l^2=0,l=0$,此即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{x_n}}$,

由施笃兹公式

$$\therefore \lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{x_{n-1}-x_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2(1-x_{n-1})}{x_{n-1}-x_{n-1}(1-x_{n-1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(1-x_{n-1})=1.$$

(2) 令 $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，由已知条件知

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s \quad (\text{存在}). \qquad ③$$

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}$$
$$=\frac{p_1s_1+p_2(s_2-s_1)+\cdots+p_{n-1}(s_{n-1}-s_{n-2})+p_n(s_n-s_{n-1})}{p_n}$$
$$=\frac{(p_1-p_2)s_1+\cdots+(p_{n-1}-p_n)s_{n-1}+p_ns_n}{p_n}$$
$$=\frac{(p_1-p_2)s_1+\cdots+(p_{n-1}-p_n)s_{n-1}}{p_n}+s_n. \qquad ③$$

由施笃兹公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(p_1-p_2)s_1+\cdots(p_{n-2}-p_{n-1})s_{n-2}+(p_{n-1}-p_n)s_{n-1}}{p_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(p_{n-1}-p_n)s_{n-1}}{p_n-p_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}(-s_{n-1})$$
$$=-s.$$

由③式

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(p_1-p_2)s_1+\cdots+(p_{n-1}-p_n)s_{n-1}}{p_n}+s_n\right]$$
$$=s-s=0.$$

143.(北京大学,2002 年) 设 $a\geqslant 0, x_1=\sqrt{2+a}$,

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, n=1,2,\cdots \qquad ①$$

证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求极限值.

证 令 $f(x)=\sqrt{2+x}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}<1. \qquad (\text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时})$$

$\because x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

由第 134 题知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$(存在).

再由 ① 式有 $l = \sqrt{2 + l}$ 即 $l^2 - l - 2 = 0$.

解得 $l = -1$(舍去)或 $l = 2$. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

144.(华中师范大学,1996 年) 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}$.

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2^x \ln 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2^x (\ln 2)^2} = 0,$$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$.

(2) 由第 42 题知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(3) 由第 107 题知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

145.(复旦大学,1996 年) 下列命题是真的,请给出严格证明,否则给出反例,且作必要的说明:

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$,则在两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中至少有一个为无穷小量;

(2) 如果 $f(x)$ 是偶函数,且 $f'(0)$ 存在,则 $f'(0) = 0$;

(3) 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少(指对任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$),且可导,则 $f'(x) < 0$;

(4) 如果函数 $f(x)$ 在 $x \in (a,b)$ 上可微,且 $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = +\infty$,则 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$.

答 (1) 命题假. 比如

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数}, \\ 0, & n \text{ 为偶数}, \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}, \\ 1, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$,但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

(2) 命题真 $\because f(x) = f(-x)$, $\therefore f'(x) = -f'(-x)$

$f'(0) = -f'(0)$, $\therefore f'(0) = 0$.

(3) 命题假. 比如 $f(x)=-x^3, x\in[-1,1]$ 是严格单调减少,
但 $f'(0)=0$,并不满足 $f'(x)<0, x\in[-1,1]$.

(4) 命题假. 比如 $f(x)=-\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)$,

$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\therefore \lim\limits_{x\to0+0}f'(x)=+\infty$.

但 $\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=-\infty$.

146. (天津大学, 1999 年) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$, 则 ( )

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ (B) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 时, $\{y_n\}$ 有界 (D) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

答 (D). 其中(A)、(B) 错, 可见上题反例.

(C) 也错, 反例如下, $x_n=\dfrac{1}{n^2}, y_n=n$.

(D) 对. $\because \lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$, 故存在 $M>0$, 使

$$|x_ny_n|\leqslant M.$$

从而 $0\leqslant|y_n|\leqslant\dfrac{M}{|x_n|}$, 但

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{|x_n|}=0$,

由两边夹法则

$\lim\limits_{n\to\infty}|y_n|=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

147. (复旦大学, 1999 年) 下列命题正确的请给出严格证明, 否则举出反例, 且作必要说明.

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$, 则两数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中至少有一个为无穷小量(即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$);

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 为无穷大量, 又数列 $\{b_n\}$ 满足 $|b_n|>0$, 当 $n\geqslant1$. 则数列 $\{a_nb_n\}$ 为无穷大量;

(3) 设函数 $f(x), x\in(a,b)$, 如果 $f(x)$ 对该区间内任意两点 x_1 和 x_2 恒有:
$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant|x_2-x_1|^2$,
则 $f(x)$ 在开区间内是一个常函数;

(4) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛, 且 $v_n>0$, 当 $n=2,3,4\cdots$,
则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛.

解 (1) 命题假. 证明见第 145 题.

(2) 命题假. 比如 $a_n = n, (n = 1,2,\cdots)$.

$$b_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

则 $a_n b_n = 1, (n = 1,2,\cdots)$, 即数列 $\{a_n b_n\}$ 不是无穷大量.

(3) 命题真. 在 (a,b) 内任取一点 x_0, 有 $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |x - x_0|^2$

所以 $\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leqslant |x - x_0| \to 0 \quad (x \to x_0)$ 由此可知

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$ 由 x_0 的任意性推得在 (a,b) 内 $f'(x) \equiv 0$, 因此 $f(x)$ 是一个常数.

(4) 命题真. $\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1})$ 收敛, 令

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n,$$

$\therefore \lim\limits_{n \to \infty} s_n = \lim\limits_{n \to \infty} u_n = a$, 存在, 且为有限数.

$\therefore |u_n| < c, (n = 1,2,\cdots)$.

再考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$, 令前 n 项和为

$$\sigma_n = |u_1 v_1| + \cdots + |u_n v_n|$$

$\therefore \sigma_n < c\sum\limits_{k=1}^{n} v_k < c\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = l$, (有限数).

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.

148. **(浙江大学,2001 年)** 求 $\lim\limits_{n \to \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n})$.

解

$$\lim_{n \to \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n}) = \lim_{n \to \infty} \sin^2[\pi(\sqrt{n^2 + n} - n)]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \to \infty} \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

149. **(湖北大学,2001 年)** 计算极限:

(1) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{n^2 - n}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n \to +\infty}[(n + 1)^a - n^a]$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

解 (1) 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{n-1}{\sqrt{n^2-n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}<$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{n-1}{\sqrt{n^2-2}}, \qquad ①$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{n-1}{\sqrt{n^2-n}}\right)=-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{n-1}{\sqrt{n^2-2}}\right)=-1.$$

再由 ① 式及两边夹法则

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right)=-1.$$

(2) 考虑 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^\alpha-1}{t^\alpha}$,

(ⅰ) 若 $\alpha>1$,由罗必塔法则

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t^\alpha}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(1+t)^{\alpha-1}}{\alpha t^{\alpha-1}}$$

$$=\lim_{t\to 0}(1+\frac{1}{t})^{\alpha-1}=\infty. \qquad ①$$

(ⅱ) 若 $\alpha=1$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t^\alpha}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)-1}{t}=1. \qquad ②$$

(ⅲ) 若 $0\leqslant\alpha<1$,由罗必塔法则

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t^\alpha}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(1+t)^{\alpha-1}}{\alpha t^{\alpha-1}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^{1-\alpha}}{(1+t)^{1-\alpha}}=0. \qquad ③$$

(ⅳ) 若 $\alpha<0$,则令 $\alpha=-\beta$ $(\beta>0)$,则

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t^\alpha}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{-\beta}-1}{t^{-\beta}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{[1-(1+t)^\beta]t^\beta}{(1+t)^\beta}=0. \qquad ④$$

$$\lim_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=\lim_{n\to+\infty}n^\alpha\left[(1+\frac{1}{n})^\alpha-1\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{\alpha}-1}{\frac{1}{n^{\alpha}}}. \quad ⑤$$

令 $t = \frac{1}{n}$,则由 ①,②,③,④,⑤ 式可得

$$\lim_{n\to+\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}] = \lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t^{\alpha}}$$

$$= \begin{cases} 0, & \alpha < 1, \\ 1, & \alpha = 1, \\ \infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

(3) 令 $y = x^{\sin x}$,则

$\ln y = \sin x \cdot \ln x$,

$$\lim_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\csc x}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}$$

$$= -\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = 0.$$

$\therefore \lim_{x\to0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1.$

150.(天津大学,1999 年) 利用确界存在原理证明:若实数列$\{x_n\}$单调递减、有下界,则$\{x_n\}$收敛,且$\lim_{n\to\infty} x_n = a$,(其中 $a = \inf_{n\in N}\{x_n\}$).

证 由于$\{x_n\}$有下界,从而由确界原理,$\{x_n\}$有下确界,令 $a = \inf_{n\in N}\{x_n\}$.

再由确界定义,$\forall \varepsilon > 0$,存在 $n_0 \in N$,有 $x_{n_0} < a + \varepsilon$,又由于$\{x_n\}$单调减,所以

$$x_n < x_{n_0} < a + \varepsilon, (n > n_0). \quad ①$$

另一方面 a 是下确界,故有

$$x_n \geq a > a - \varepsilon, (n \in N), \quad ②$$

$\therefore a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, (n > n_0).$

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = a.$

151.(上海交通大学,1999 年) 计算下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!3^n}$;

(2) $\lim\limits_{p\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 px}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $a_n = \frac{n^n}{n!3^n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!3^{n+1}}\cdot\frac{n!3^n}{n^n}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{3} < 1.$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!3^n}$ 收敛,$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!3^n} = 0$.

(2) 先计算

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos 2px}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos 2px\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + p\int_0^{\frac{1}{2}}\sin 2px\arcsin x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2p\arcsin\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2px\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos 2px}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

解得$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos^2 px}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 0$. ①

$\because \sin^2 px = \frac{1-\cos^2 px}{2}$, ②

由①,②式

$$\therefore \lim_{p\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin^2 px}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty}\Big[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos^2 px}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\Big]$$

$$= \lim_{p\to\infty}\frac{1}{2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}.$$

152.(天津大学,1999年) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}$.

解 令 $a_n = \frac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot(n+1)!(2n)^n}{(2n+2)^{n+1}\cdot 5^n n!}$$

$$= \frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n = \frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$= \frac{5}{2e} < 1.$$

那么$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,从而$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}=0$.

153.(清华大学,2001年) 设 R 中数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足

$a_{n+1}=b_n-qa_n, n=1,2,\cdots$,其中$0<q<1$. ①

证明:(1) 若$\{b_n\}$有界,则$\{a_n\}$有界;

(2) 若$\{b_n\}$收敛,则$\{a_n\}$收敛.

证 (1) 由①有

$$\begin{aligned}a_n&=b_{n-1}-qa_{n-1}\\&=b_{n-1}-q(b_{n-2}-qa_{n-2})=b_{n-1}+(-q)b_{n-2}+(-q)^2a_{n-2}\\&=\cdots=b_{n-1}+(-q)b_{n-2}+(-q)^2b_{n-3}+\cdots+(-q)^{n-2}b_1\\&\quad+(-q)^{n-1}a_1.\end{aligned} \quad ②$$

若$\{b_n\}$有界,则$\exists M_1>0$,使

$$|b_n|<M_1\quad(n\in N)$$

再令$M=\max\{M_1,|a_1|\}$,那么由②式知

$$|a_n|\leqslant M(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})<\frac{M}{1-q},(n\in N).$$

所以$\{a_n\}$有界.

(2) 若$\{b_n\}$收敛,设$\lim_{n\to\infty}b_n=b$.则存在$c>0$,使$|b_n-b|\leqslant c,(n\in N)$,
$|a_1|\leqslant c,\frac{1}{1-q}\leqslant c$.

下证 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{b}{1+q}$.

$$\begin{aligned}&\left|a_n-[b+(-q)b+(-q)^2b+\cdots+(-q)^{n-2}b]\right|\\&\leqslant|b_{n-1}-b|+|b_{n-2}-b|q+\cdots+|b_1-b|q^{n-2}+|a_1|q^{n-1}\end{aligned} \quad ③$$

对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N_1>0$,当$n>N_1$时,

$$|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2c}, \quad ④$$

对上述ε,$\exists N_2>0$,当$n>N_2$时,$\sum_{n=N_2+1}^{\infty}q^n<\frac{\varepsilon}{2c}$, ⑤

取$N=N_1+N_2+2$,则当$n>N$时,由③式

$$\begin{aligned}&\left|a_n-[b+(-q)b+(-q)^2b+\cdots+(-q)^{n-2}b]\right|\\&\leqslant(1+|q|+\cdots+|q|^{n-N_1})\frac{\varepsilon}{2c}+c(|q|^{n-N_1+1}+\cdots+|q|^{n-1})\\&\leqslant\frac{1}{1-q}\cdot\frac{\varepsilon}{2c}+c\cdot\frac{\varepsilon}{2c}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}[b + (-q)b + \cdots + (-q)^{n-2}b] = \frac{b}{1+q}.$$

故$\{a_n\}$收敛.

§2 函数的极限

【考点综述】

一、综述

1. 定义(1) 函数$f(x)$在点$x = a$的空心邻域$U^\circ(a)$有定义,A是一个确定的数,若$\forall \varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$,使得当$0 < |x - a| < \delta$时,都有$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称x趋向于a时极限存在,且以A为极限,记作$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

(2) 函数$f(x)$在$U(+\infty)$[或$U(-\infty)$或$U(\infty)$]上的函数,A是一个确定的数,若$\forall \varepsilon > 0$,总存在$M > 0$,使得当$x > M$[或$x < -M$或$|x| > M$]时,都有$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称函数$f(x)$当x趋于$+\infty$[或$-\infty$或∞]时极限存在,并以A为极限,记为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$[或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$,或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$].

(3) 设函数$f(x)$在$U_+^\circ(a,\delta')$[或$U_-^\circ(a,\delta')$]内有定义,A是一个确定的常数,若$\forall \varepsilon > 0$,总存在$\delta > 0$,使当$a < x < a + \delta$(或$a - \delta < x < a$)时,都有$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称函数$f(x)$在x趋于$a+$(或$a-$)时右(或左)极限存在,并以A为右或(左极限)记作$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$(或$\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$).有时也记$f(a+0) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$或$f(a-0) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

2. 性质 (1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$.

(2) 唯一性 若$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在,则它只有一个极限.

(3) 局部有界性 若$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在,则$f(x)$在$a$的某个空心邻域$U^\circ(a)$内有界.

(4) 局部保号性 若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > 0$(或$< 0$),则对任意正数$r(0 < r < |A|)$,存在$a$的某一空心邻域$U^\circ(a)$,使对$\forall x \in U^\circ(a)$,恒有$f(x) > r > 0$(或$f(x) < -r < 0$).

(5) 不等式 若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$,$\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$,且有$\delta' > 0$

$$f(x) \leqslant g(x), \forall x \in U^\circ(a,\delta')$$

成立,则$A \leqslant B$,即$\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

(6) 迫敛性(两边夹)　若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$,且有 $\delta'>0$,

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)\qquad \forall x\in U(a,\delta')$$

则$\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$.

3. 运算　(1) 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B.$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=AB.$$

(2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\lim\limits_{x\to a}g(x)=B\neq 0$,则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}.$$

4. 充要条件　(1) 归结原则　设 $f(x)$ 在 a 的某空心邻域 $U^{\circ}(a)$ 有定义,则$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在的充要条件是对任何以 a 为极限且含于 $U(a)$ 的数列 $\{x_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在且相等.

(2) 柯西准则　设 $f(x)$ 在 a 的空心邻域 $U^{\circ}(a,\delta')$ 内有定义,则极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在的充要条件是:$\forall\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使对任何 $x_1,x_2\in U^{\circ}(a,\delta)$ 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

5. 单调有界定理　设 $f(x)$ 为定义在 $U_+(a)$[或 $U_-(a)$] 上的单调有界函数,则$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在[或$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$存在].

6. 两个重要极限　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x=e^a=\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$.

7. 不定式极限　(1) 不定式极限的类型包括$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^{\infty},0^0,\infty^0$, $\infty-\infty$ 等,但都可经过变换化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$.

(2) 罗比塔法则

(ⅰ) 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$.

$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 的某空心邻域 $U^{\circ}(a)$ 内可导,且 $g'(x)\neq 0$.且

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$,则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

(ⅱ) 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$.

$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 U° 内可导,且 $g'(x)\neq 0$,且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$,

则
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

(ⅲ)类似有单侧极限的不定式的罗比塔法则.

8. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量 (ⅰ) 若函数 $f(x)$ 的极限等于零,则称这个函数为无穷小量.

(ⅱ)有限个(相同类型的)无穷小量之和仍为无穷小量.

(ⅲ)无穷小量乘有界量仍为无穷小量.

(ⅳ)若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,若

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\left[\text{或}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1,\text{或}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C,\text{或}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty\right]$

则称 $f(x)$ 为比 $g(x)$ 高阶[或等价,或同价或低价]无穷小.

(2) 无穷大量 (ⅰ)所有以 ∞, $+\infty$ 和 $-\infty$ 为极限的函数都仍为无穷大量.

(ⅱ)若 $f(x)$ 为 $x\to a$ 的无穷小量,则$\dfrac{1}{f(x)}$ 为 $x\to a$ 时的无穷大量(其中 $f(x)$ 在 $U^{\circ}(a)$ 内都不为 0),反之亦然.

(3) 当 $x\to 0$ 时,有下列常用的一组等价无穷小:

$\sin x\sim x$; $\tan x\sim x$; $\arcsin x\sim x$

$\arctan x\sim x$; $e^x-1\sim x$; $\ln(1+x)\sim x$;

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$; $a^x-1\sim x\ln a$; $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$;

$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$ 等.

在求极限时,常可应用等价无穷小代换.

二、解题方法

1. 考点 1 判断函数极限的敛散性.

常用方法:(1) 定义法(见下面第 156 题);(2) 柯西准则;(3) 左右极限法(见下面第 161 题).

2. 考点 2 求函数的极限.

常用方法:(1) 定义法(见下面第 156 题);(2) 两边夹法则(见下面第 169 题);(3) 放缩法(见下面第 190 题);(4) 罗比塔法则(见下面第 167 题);(5) 通过等式变形化为已知极限(见下面第 164 题);(6) 级数法(见下面第 166 题);(7) 用等价无穷小替换(见下面第 173 题);(8) 自然对数法(见下面第 173 题);(9) 利用积分中值定理(见下面第 183 题);(10) 因式分解法(见下面第 158

题);(11) 用变量替换(见下面第 189 题).

【经典题解】

154.(武汉大学,2003 年)　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)e^x-\dfrac{1}{1+x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2e^x-1}{2x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+x)e^x+(1+x)^2e^x}{4x+2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

155.(浙江大学,2001 年)　$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

解　令　$y=(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$,则

$$\ln y=\tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)=\frac{\ln(2-x)}{\cot\dfrac{\pi x}{2}}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\dfrac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{2-x}}{\dfrac{-\dfrac{\pi}{2}}{\sin^2(\dfrac{\pi x}{2})}}=\frac{2}{\pi}.$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

156.(北京大学,1994年)　设$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$　($|A|<+\infty$),用$\varepsilon-\delta$语言证明:$\lim\limits_{x\to x_0-0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{A}$.

证　(1) 当 $A=0$ 时

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,有

$|f(x)|<\varepsilon^3$, $\therefore\ |\sqrt[3]{f(x)}|<\varepsilon$,

此即 $\lim\limits_{x\to x_0-0}\sqrt[3]{f(x)}=0=\sqrt[3]{A}$.

(2) 当 $A\neq 0$ 时,由于

$$(\sqrt[3]{f(x)})^2+(\sqrt[3]{f(x)})(\sqrt[3]{A})+(\sqrt[3]{A})^2=[\sqrt[3]{f(x)}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{A}]^2+\frac{3}{4}(\sqrt[3]{A})^2$$

$$\geqslant\frac{3}{4}(\sqrt[3]{A})^2>0.$$

令 $C=\dfrac{3}{4}(3\sqrt[3]{A})^2$,则 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,有

$|f(x)-A| < C\varepsilon.$

而 $\left|\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{A}\right| = \dfrac{|f(x)-A|}{\left|(\sqrt[3]{f(x)})^2+\sqrt[3]{f(x)}\sqrt[3]{A}+(\sqrt[3]{A})^2\right|}$

$$\leqslant \frac{|f(x)-A|}{C} < \varepsilon.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0-0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{A}.$

157.（华中师范大学，2001 年） 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}.$$

解 $\because e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2),$

$$\cos\sqrt{x} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4!}+o(x^2),$$

$$\sqrt{1-x} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2).$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{-(\frac{1}{8}+\frac{1}{24})x^2+o(x^2)} = -3.$$

158.（北京农业大学，南京农业大学，华南农业大学，浙江农业大学，华中农业大学） 计算下列各题：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2x-2\cos x-1}{2\cos^2x+\cos x-1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{5\cos^2x-2\cos x-1}{2\cos^2x+\cos x-1} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{(4\cos x+1)(2\cos x-1)}{(\cos x+1)(2\cos x-1)}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\cos x+1}{\cos x+1} = 2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2+\sin x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{6x} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

159.(北京大学,1995 年)　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解　由上题(3)的证明过程知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

160.(厦门大学)　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}\cdot\frac{\tan x}{e^x-1}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{e^x} = 1.$$

161.(上海工业大学)　若 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x < 0, \\ 5, & x = 0, \\ \dfrac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{x}, & x > 0. \end{cases}$

求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 x}{1} = 1.$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

162.（四川联合大学，2000年） 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, x<0,\\ 0, x=0,\\ \dfrac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{2x}, x>0.\end{cases}$

求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

解 由上题知

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\cos x^2=\frac{1}{2},$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}.$

163.（湖南大学） 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，又设函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}, x<0,\\ \dfrac{\sin\frac{1}{2}x}{x}, x>0,\end{cases}$$

求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)(1+x)^{-\frac{x+1}{x}}+\varphi(x)\int_0^{2x}\cos t^2 \mathrm{d}t}{x\varphi(x)}$.

解 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\dfrac{1}{(1+x)\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\int_0^{2x}\cos t^2 \mathrm{d}t}{x}\right]$ ①

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)}=\dfrac{f(0)}{\frac{1}{2}}=2f(0).$ ②

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$ ③

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}\cos t^2 \mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2\cdot\cos(2x)^2=2.$ ④

将②，③，④代入①得

$$I=\frac{2f(0)}{\mathrm{e}}+2.$$

164.(武汉水利电力学院) (1) 用定义证明：$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$.

证 (1) $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则，当 $|x-(-3)|<\delta$ 时

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3}-(-6)\right|=|x-3+6|=|x+3|<\varepsilon.$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6.$

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\cos x}{x}}=1.$$

165.(国防科技大学) (1) 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x-\sin x}$;

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，求 a,b.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\sec^2x}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos^2x}\cdot\dfrac{\cos^3x-1}{1-\cos x}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3x}{1-\cos x}$

$=-\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x+\cos^2x)=-3.$

(2) $\because\ \lim\limits_{x\to2}(x^2-x-2)=0$，又已知分数极限存在.

$\therefore 0=\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b$，$\therefore b=-4-2a.$ ①

$2=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax-4-2a}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+a+2)}{(x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+a+2}{x+1}$

$=\dfrac{a+4}{3}.$

$\therefore a=2$ 代入 ① $\therefore b=-8.$

166.(华中师范大学,2002年) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[(1+\dfrac{1}{x})^{\frac16}-(1-\dfrac{1}{x})^{\frac16}\right].$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left\{\left[1+\dfrac{1}{6x}+o(\dfrac{1}{x^2})\right]-\left[1-\dfrac{1}{6x}+o(\dfrac{1}{x^2})\right]\right\}=\dfrac{1}{3}.$

167.(北京大学,1998年) 计算 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}$$
$$= \frac{1}{3}.$$

168.(中国科学院,2002 年) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$,$(a>0,a\neq 1)$.

解 令 $y=\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$,

$$\therefore \ln y = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1} = -\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\frac{a^x-1}{a-1}. \quad ①$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0. \quad ②$$

(1) 当 $a>1$ 时,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{a^x-1}{a-1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a-1}{a^x-1}\cdot\dfrac{1}{a-1}a^x\ln a = \ln a$. ③

由 ①,②,③

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\ln y = \ln a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = a$.

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} y = a$.

(2) 当 $0<a<1$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x-1}{a-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{1-a} = 0. \quad ④$$

由 ①,②,④

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\ln y = 0$, $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$.

169.(天津大学) 设函数 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的连续函数,证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

证 分两步证明.

(1) 设 $f(x)\geqslant 0$,则对任意 $x>0$,必存在自然数 n 使得

$$nT\leqslant x\leqslant (n+1)T \quad (n=0,1,2\cdots)$$

成立.由函数的周期性与非负性有下面的不等式:

$$\int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t. \quad ①$$

但

$$\int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t = n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

代入①得

$$n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant (n+1)\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

$$\therefore \frac{n}{(n+1)T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{n+1}{nT}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t. \qquad ②$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt. \qquad ③$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\,\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt. \qquad ④$$

由②,③,④及两边夹法则

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

即结论成立.

(2) 当 $f(x)$ 为任意以 T 周期的连续函数时,取 $[0,T]$,则 $|f(x)|\leqslant M$ 有界,由周期性从而 $f(x)$ 在整个定义域内有 $|f(x)|\leqslant M$.

令 $g(x)=M-f(x)$,则 $g(x)$ 是以 T 为周期的非负连续函数由上面(1)知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\mathrm{d}t,$$

即 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x [M-f(t)]\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T [M-f(t)]\mathrm{d}t.$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

170.(华东师范大学,2000年) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+2} = \frac{1}{2}.$$

171.(北京科技大学,1998年) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解 因为$((1+x)^{\frac{1}{x}})'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right].$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

由罗比塔法则

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right]$$

$$=e(-1+\frac{1}{2})=-\frac{e}{2}.$$

172.(中国科学院) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\sin 2x}$.

解 用等价无穷小作替换:$\sin x\sim x,e^x-1\sim x\quad(x\to0)$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-e^{x^2}}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{6x^2}=-\frac{1}{6}.$$

173.(北京邮电学院) 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-\cos x)}{(1-e^x)\sin x^2}$;

(2)(北京大学,2002年) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解 (1) 同等价无穷小替换

$$\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)}{(1-e^x)\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot(\frac{1}{2}x^2)}{(-x)\cdot x^2}=-\frac{1}{2}.$$

(2) 用自然对数法,令

$$y=(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

取自然对数得

$$\ln y=\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}.$$

$$\because\ \lim_{x\to0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\frac{x^2}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

174.(华中师范大学,2000 年)　计算下列各题:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\sin\dfrac{3}{x}$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^{\frac{x}{n}}\cdot(1+\frac{x}{n})^n}dx$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\cdot\sin\dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\cdot\dfrac{3}{x}$.

$$= 3\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2}{1+2^x} = 3\ln 2.$$

(2) 令 $y=\dfrac{1}{n}$, $f(x,y)=\dfrac{1}{e^{xy}(1+xy)^{\frac{1}{y}}}$,则 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续,

$$\therefore \lim_{y\to 0^+}\int_0^1\frac{1}{e^{xy}(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx = \int_0^1\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{e^{xy}(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx$$

$$= \int_0^1\frac{1}{e^x}dx = \int_0^1 e^{-x}dx = 1-\frac{1}{e}.$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1}{e^{\frac{x}{n}}(1+\frac{x}{n})^n}dx = 1-\frac{1}{e}.$$

175.(北京大学,1999 年)　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{\alpha\log(1-x)+\beta(1-e^{x^2})}$, $(\alpha^2+a^2\neq 0)$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{\alpha\log(1-x)+\beta(1-e^{x^2})} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sec^2 x+b\sin x}{-\dfrac{\alpha}{(1-x)\ln 10}-2\beta x e^{x^2}}$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)\ln 10(a+b\sin x\cos^2 x)}{\cos^2 x[\alpha+2\beta x e^{x^2}(1-x)]} = -\frac{a\ln 10}{\alpha}.$$

176.(华中师范大学,1998 年)　求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x+e^x\cos x-2x-1}{3x^2}$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x+2e^x\cos x-e^x\sin x-2}{x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}(e^x\cos x-e^x\sin x)=\frac{1}{3}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-\left[1-x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)\right]}{x(2x)^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)}{8x^4}=-\frac{1}{16}.$$

177.(山东海洋学院)　求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\ln(1+\sin x)}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$.

解　(1) 利用等价无穷小, $\arctan x\sim x,\ln(1+\sin x)\sim\sin x(x\to 0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\ln(1+\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$

(2) 当 $x=0$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{nx}}=0.$$

当 $x>0$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{e^{nx}}}{1+\dfrac{1}{e^{nx}}}=1.$$

当 $x<0$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=-1.$$

178.(上海交通大学)　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+x\sin x)^{1/x^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin^{\frac{3}{2}}t\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\mathrm{d}t}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+x\sin x)^{1/x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\{[1+(\cos x-1+\sin x)]^{\frac{1}{\cos x-1+x\sin x}}\}^{\frac{\cos x-1+x\sin x}{x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m-mx^n-n+nx^m}{1-x^m-x^n+x^{m+n}}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{nmx^{m-1}-mnx^{n-1}}{(m+n)x^{n+m-1}-nx^{n-1}-mx^{m-1}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{nm(m-1)x^{m-2}-mn(n-1)x^{n-2}}{(m+n)(m+n-1)x^{m+n-2}-n(n-1)x^{n-2}-m(m-1)x^{m-2}}$$

$$=\frac{nm(m-1)-mn(n-1)}{(m+n)(m+n-1)-n(n-1)-m(m-1)}=\frac{m+n}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin^{\frac{3}{2}}t\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\sin^{\frac{3}{2}}x^2}{x(x-\sin x)}$

$$=2\lim_{x\to0^+}\frac{(x^2)^{\frac{3}{2}}}{x-\sin x}=2\lim_{x\to0^+}\frac{3x^2}{1-\cos x}=6\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\frac{1}{2x^2}}=12.$$

179.(兰州大学) 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}\right)^{x-1}\cdot a\left(1+\dfrac{b}{100x}\right)^x$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]^{(x-1)^2}\right\}^{1/(x-1)}=(\mathrm{e}^{-1})^0$
$=1$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{100x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{\frac{100x}{b}}\right]^{100x/b}\right\}^{100b}=\mathrm{e}^{\frac{b}{100}}.$$

$$\therefore\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x^2-2x+1}\right)^{x-1}\cdot a\left(1+\frac{b}{100x}\right)^x=a\mathrm{e}^{\frac{b}{100}}.$$

180.(华东师范大学,2001年) 验证:当 $x\to+\infty$ 时,$2x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 与 e^{x^2} 为等价无穷大量.

证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt+2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}+e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+2x^2}{1+2x^2}=1.$

$\therefore 2x\int_0^x e^{x^2}dt$ 与 e^{x^2} 为等价无穷大量.

181.(东北工学院) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)^{\frac{n}{x}}$,$(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$

解 令 $y=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$

$\ln y=\dfrac{n}{x}[\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n]$

$=n\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}.$

$\lim\limits_{x\to0}\ln y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{n}{x}[\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n]$

$=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n=\ln(a_1,a_2,\cdots a_n).$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x}{n})^{\frac{n}{x}}=\lim\limits_{x\to0}y=a_1a_2\cdots a_n.$

182.(西北工业大学) 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdots\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}=\dfrac{1}{n!}.$

183.(山东工业大学) 求极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_0^1\dfrac{1}{\varepsilon x^3+1}dx.$

解 由积分中值定理

$\int_0^1\dfrac{1}{\varepsilon x^3+1}dx=\dfrac{1}{\varepsilon\alpha^3+1},(0<\alpha<1),$

$\therefore \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_0^1\dfrac{1}{\varepsilon x^3+1}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\dfrac{1}{\varepsilon\alpha^3+1}=1.$

184.(北京大学,1990年) 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_x^{x^2}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy}{\arctan x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_x^{x^2}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy}{\arctan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_x^{x^2}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy}{x}$.

$=\lim\limits_{x\to0}\left[2xe^{x\sqrt{1-x^4}}-e^{x\sqrt{1-x^2}}+\int_x^{x^2}e^{x\sqrt{1-y^2}}\cdot\sqrt{1-y^2}dy\right]=-1.$

185.(华中师范大学,2002年) 设a,b,A均不为零的有限数,证明:$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$的充分必要条件是:$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)}-e^b}{x-a}=Ae^b$.

证 $\because\ \dfrac{e^{f(x)}-e^b}{x-a}=\dfrac{f(x)-b}{x-a}\cdot e^b\cdot\dfrac{e^{f(x)-b}-1}{f(x)-b}$, ①

当$x\to0$,$e^x-1\sim x$.

先证必要性,$\because\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$,$\therefore\ \lim\limits_{x\to a}(f(x)-b)=0$.

$\therefore e^{f(x)-b}-1\sim f(x)-b$ (当$x\longrightarrow a$时)

$\therefore\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)}-e^b}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}\cdot e^b\cdot\dfrac{e^{f(x)-b}-1}{f(x)-b}$

$=Ae^b\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)-b}-1}{f(x)-b}=Ae^b$.

再证充分性 $\because\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)}-e^b}{x-a}=Ae^b$.

$\therefore\ \lim\limits_{x\to a}[f(x)-b]=0$.

由①式有

$\dfrac{f(x)-b}{x-a}=\dfrac{e^{f(x)}-e^b}{x-a}\cdot e^{-b}\cdot\dfrac{f(x)-b}{e^{f(x)-b}-1}$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=e^{-b}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)}-b}{x-a}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{e^{f(x)-b}-1}$

$=e^{-b}\cdot Ae^b\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{f(x)-b}=A$.

186.(中国科学院,2001年) (1)已知 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{c}{x}}=\int_{-\infty}^c te^tdt$,求$c$;

(2)设$x>0$且$x\neq1$,则有$\dfrac{\ln x}{x-1}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

解 (1)$\because\ \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{c}{x}}=e^c$,

$\int_{-\infty}^c te^tdt=te^t|_{-\infty}^c-\int_{-\infty}^c e^tdt$

$$= ce^c - e^t \Big|_{-\infty}^{c} = (c-1)e^c.$$

由假设有 $e^c = (c-1)e^c$,解得 $c = 2$.

(2) 令 $f(x) = \sqrt{x}\ln x - (x-1)$.

$$f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{\ln x + 2 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

令 $g(x) = \ln x + 2 - 2\sqrt{x}$,则

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

当 $x > 1$ 时,$g'(x) < 0$,则 $g(x)$ 单调递减,从而 $g(x) < g(1) = 0$ 故 $f'(x) < 0$,$f(x)$ 单调递减.从而 $f(x) < f(1) = 0$ 即$\sqrt{x}\ln x - (x-1) < 0$, $\frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}}$.当 $0 < x < 1$ 时 $g'(x) > 0$.$\therefore g(x)$ 在$(0,1)$上单调递增,在$(0,1]$上连续.

$\ln x + 2 - 2\sqrt{x} = g(x) < g(1) = 0$,即 $f'(x) = \dfrac{\ln x + 2 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} < 0$,

$f(x)$ 单调递减.

$\therefore \sqrt{x}\ln x - (x-1) = f(x) > f(1) = 0$,

$\sqrt{x}\ln x > x - 1$,$\therefore \dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,$(0 < x < 1)$.

综上两种情况都有

$\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,$(x > 0$ 且 $x \neq 1)$.

187.(中国科技大学) 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-4\sin^2\frac{\pi}{6}x}{1-x^2}$.

解
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-4\sin^2\frac{\pi}{6}x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{-\left[8\sin\frac{\pi}{6}x\cdot\cos\frac{\pi}{6}x\right]\cdot\frac{\pi}{6}}{-2x}$$

$$= \frac{\pi}{3}\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{3}x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

188.(上海交通大学) 计算 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

解 令 $y = \left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$,则

$$\ln y = x\ln\frac{2}{\pi}\arctan x.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arctan x}\cdot\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}=-\frac{2}{\pi}.$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}y=e^{-\frac{2}{\pi}}.$

189.（北京科技大学，1996 年，中国科技大学）　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}(1+\frac{1}{x})^{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}(1+\frac{1}{x})^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x}$.

令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-\lim_{t\to0}\frac{1}{2+2t}=-\frac{1}{2}.$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\cdot(1+\frac{1}{x})^{x^2}=e^{-\frac{1}{2}}.$

190.（昆明工学院）　设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续导数，且

$$\lim_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=0. \qquad ①$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证　由 ① 式，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $M>0$，使当 $x>M$ 时有，

$$|f'(x)+f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad ②$$

又 $[e^xf(x)]'=e^xf(x)+e^xf'(x)$. ③

将 ③ 式两边从 M 到 x 积分（$x>M$），得

$$e^xf(x)=e^Mf(M)+\int_M^x e^t[f(t)+f'(t)]dt. \qquad ④$$

由 ② 式

$$\left|\int_M^x e^t[f(t)+f'(t)]dt\right|\leqslant\int_M^x e^t|f(t)+f'(t)|dt$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}(e^x-e^M)$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}e^x. \qquad ⑤$$

由 ④⑤ 两式

$$|f(x)| \leqslant \left|\frac{e^{M}f(M)+\int_{M}^{x}e^{t}[f(t)+f'(t)\mathrm{d}x]}{e^{x}}\right|$$

$$\leqslant |e^{-x+M}f(M)|+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{|f(M)|}{e^{x-M}}+\frac{\varepsilon}{2} \qquad ⑥$$

存在 $N > M$，使当 $x > N$ 时有

$$\frac{|f(M)|}{e^{x-m}} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad ⑦$$

由 ⑥，⑦ 知当 $x > N$ 时有 $|f(x)| < \varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

191.（清华大学，2000 年） （1）用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明：$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x}=\frac{1}{1}$；

（2）设函数 $f(x)$ 在点 a 可导，且 $f(a)\neq0$，求

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^{n};$$

（3）求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^{p}+2^{p}+\cdots+n^{p}}{n^{1+p}}$，其中 $p>0$.

解 （1）$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\min(\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2})$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，则 $|x|>1-\delta>0$.

$$\left|\frac{1}{x}-1\right|=\frac{|1-x|}{|x|}<\frac{\delta}{1-\delta}<\frac{\delta}{\frac{1}{2}}=2\delta\leqslant\varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{1}{x}=1.$$

（2）$\because f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o[|x-a|]$

令 $x=a+\frac{1}{n}$，

$$\therefore f(a+\frac{1}{n})=f(a)+f'(a)\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})$$

$$\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}=1+\frac{f'(a)}{f(a)}\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}).$$

$$[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}]^{n}=[1+\frac{f'(a)}{f(a)}\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})]^{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{f'(a)}{f(a)}\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right]^{n}$$

$$= e^{\left[\frac{f'(a)}{f(a)}\right]}.$$

(3) $\because \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^p + \left(\dfrac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\dfrac{n}{n}\right)^p\right]$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right]$$

$$= \int_0^1 x^p \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}.$$

192.(北京师范大学,1993 年,西北电讯工程学院,大连铁道学院) 解答下列问题:

(1) 求极限 $\quad I = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$;

(2) 设 $f''(0)$ 存在,$f(0) = 0$,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, 当\ x \neq 0 时, \\ f'(0), 当\ x = 0 时, \end{cases}$$

求 $g'(0)$.

解 (1) 令 $y = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$

$\therefore \ln y = \dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^3} \quad \left(\because \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2} = -\frac{1}{6}.$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

$$(2)\ g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}f''(0).$$

193.(湖北大学,2001 年,天津大学 1998 年) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上满足 $f(2x) = f(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,证明:

$f(x) \equiv A, x \in (0, +\infty)$.

证　$\forall x_0 \in (0, +\infty)$，任取自然数 n，有

$f(x_0) = f(2x_0) = f(2^2x_0) = \cdots = f(2^nx_0)$.

两边取极限得

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(2^nx_0). \qquad ⑤$$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} f(2^nx_0) = A$，

由 ⑤ 式得　$f(x_0) = A$，再由 x_0 的任意性，则

$f(x) \equiv A, x \in (0, +\infty)$.

194.（华中理工大学，1997 年）　(1) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$.

(2) 给定数列 $a_0 = 0$，

$$a_n = \frac{1+2a_{n-1}}{1+a_{n-1}}, (n = 1,2,\cdots) \qquad ①$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求此极限值.

解　(1) $\because \sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$.

$\therefore \frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$.

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$,

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$,

$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + \cdots = x^2 + o(x^4)$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{\left[-\frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{24}x^4 + o(x^4)\right][x^2 + o(x^4)]}$$

$= -\frac{1}{12}$.

(2) 先用数学归纳法证明

$$a_n \geqslant a_{n-1} \qquad n = 1,2,\cdots \qquad ②$$

当 $n = 1$ 时，$a_0 = 0$，

$a_1 = \frac{1+2a_0}{1+a_0} = 1 > a_0$.

即当 $n = 1$ 时 ② 式成立，归纳假设 $a_{n-1} \geqslant a_{n-2}$，再证 n 时，

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1+2a_{n-1}}{1+a_{n-1}} - \frac{1+2a_{n-2}}{1+a_{n-2}}$$

$$= \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{(1+a_{n-1})(1+a_{n-2})} \geqslant 0.$$

$\therefore a_n \geqslant a_{n-1}$.

从而 ② 式成立,即$\{a_n\}$单调递增.

$$a_n = \frac{1+2a_{n-1}}{1-a_{n-1}} \leqslant \frac{2(1+a_{n-1})}{1+a_{n-1}} = 2.$$

即$\{a_n\}$有上界. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ 存在.

再由 ① 式有 $\quad l = \dfrac{1+2l}{1+l}$,解得

$l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $l = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

195(北京大学,1991 年) 不用 *Hospitale* 法则,用变量替换求极限

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

解 令 $x = \dfrac{1}{n}$,则

$$\lim_{n\to+\infty}\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e - e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e - e^{\frac{x-\frac{x^2}{2}+0(x^2)}{x}}}{x}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}+0(x)}}{x}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1-\frac{x}{2}+o(x)\right]}{x}$$

$$= \frac{e}{2}.$$

196.(北京师范大学,1998 年) 设 $\quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\cos 2^n x$,求

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-1}[f(x) - f(0)].$$

解 令 $\quad u_n(x) = 2^{-n}\cos 2^n x$,

$\therefore |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad (n = 0,1,\cdots)$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\cos 2^n x$ 一致收敛.从而由罗比塔法则及逐项微分可得

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-1}[f(x) - f(0)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} (-\sin x - \sin 2x - \cdots - \sin 2^n x - \cdots)$$
$$= 0.$$

197.(华中师范大学) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导,求

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r}[f(t + \frac{r}{a}) - f(t - \frac{r}{a})],$$

其中 r 与 a,t 无关.

解 $\lim_{r\to 0} \frac{1}{r}[f(t + \frac{r}{a}) - f(t - \frac{r}{a})]$

$$= \lim_{r\to 0}\left\{\frac{1}{a}\left[\frac{f(t+\frac{r}{a}) - f(t)}{\frac{r}{a}}\right] + \frac{1}{a}\left[\frac{f(t-\frac{r}{a}) - f(t)}{-\frac{r}{a}}\right]\right\}$$
$$= \frac{2}{a}f'(t),$$

198.(北京大学,2002 年) 叙述定义:

(1) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$;

(2) 当 $x \to a - 0$ 时,$f(x)$ 不以 A 为极限.

解 (1) $\forall M > 0$,总存在 $N > 0$,使得当 $x < -N$ 时,总有 $f(x) > M$.则称 $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

(2) 存在 $\varepsilon_0 > 0$,对 $\forall \delta > 0$,都存在 $x_0 \in (a - \delta, a)$,有 $|f(x_0) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

199.(北京大学,2000 年) 求极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2}, a > 0.$$

解 $\because \lim_{x\to 0}(a + x)^x = 1$,由罗必塔法则

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(a + x)^x\left[\ln(a + x) + \frac{x}{a + x}\right] - a^x\ln a}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a + x)^x[\ln(a + x) + \frac{x}{a + x}]^2 + (a + x)^x[\frac{1}{a + x} + \frac{a}{(a + x)^2}] - a^x(\ln a)^2}{2}$$

$= \frac{1}{a}$.

200.(华中师范大学) 求下列极限、

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2},(a>0,b>0)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

(3) 设函数列

$$y_n = y_n(x),(0\leqslant x\leqslant 1),(n=1,2,\cdots)$$

用以下方法确定

$y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2}+\frac{y_{n-1}^2}{2},(n=2,3,\cdots)$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

解 (1) 由罗比塔法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2xa^{x^2}\ln a-2xb^{x^2}\ln b}{2(a^x-b^x)(a^x\ln a-b^x\ln b)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{a^x-b^x}\cdot\frac{a^{x^2}\ln a-b^{x^2}\ln b}{a^x\ln a-b^x\ln b}$$

但$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}\ln a-b^{x^2}\ln b}{a^x\ln a-b^x\ln b}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{a^x-b^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{a^x\ln a-b^x\ln b}=\frac{1}{\ln a-\ln b}$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}=\frac{1}{\ln a-\ln b}$.

(2) 令 $y=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$,则

$\ln y = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=-1$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$.

(3) 先用数学归纳法,证明

$0\leqslant y_n\leqslant 1,(n\in N)$. ①

当 $n=1$ 时,$y_1=\frac{x}{2}\in[0,\frac{1}{2}]$,$\therefore 0\leqslant y_1\leqslant 1$ 成立.

归纳假设结论对 $n-1$ 成立,再证 n 时

$0 \leqslant y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

从而 ① 式对一切自然数成立.

$$y_{n+1} - y_n = \frac{y_n^2}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) \qquad ②$$

由 ①② 知 $y_{n+1} - y_n$ 与 $y_n - y_{n-1}$ 同号.

而 $y_2 - y_1 = (\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}) - \frac{x}{2} = \frac{x^2}{8} \geqslant 0,$

$\therefore y_{n+1} - y_n \geqslant 0,$

此而 $\{y_n\}$ 单调递增,再由 ① 式知 $\{y_n\}$ 单调递增有上界,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$(存

在). 又

$y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2}$,两边取极限得

$l = \frac{x}{2} + \frac{l^2}{2},$

$\therefore l^2 - 2l + x = 0$

$l = 1 \pm \sqrt{1-x}$

但 $l \leqslant 1, \therefore l = 1 - \sqrt{1-x},$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1 - \sqrt{1-x}.$

201.(哈尔滨工业大学,2002 年) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义且在每一点处函数的极限存在,求证:$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证 $\forall x_0 \in [a,b]$ 由于极限存在,设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,取 $\varepsilon = 1$,则存在 $\delta_{x_0} > 0$,使当 $x \in U(x_0,\delta_{x_0})$ 时有

$|f(x) - A| < 1$

$\therefore A - 1 < f(x) < A + 1$

令 $M_{x_0} = \max\{|A+1|, |A-1|\}$,令 $U(x_0,\delta_{x_0}) = (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})$,则

$$|f(x)| < M_{x_0}, x \in U(x_0,\delta_{x_0}), \qquad ①$$

即 $\forall x_0 \in [a,b]$,存在 $\delta_{x_0} > 0$,使 ① 式成立.

设 $\{U(x,\delta_x) \mid x \in (a,b)\}$ 是 $[a,b]$ 上的一个开覆盖,从而存在有限个,不失一般设为

$U(x_1,\delta_{x_1}), U(x_2,\delta_{x_2}), \cdots U(x_m,\delta_{x_m})$

也构成$[a,b]$的一个开覆盖，且

$|f(x)|<M_i(i=1,2,\cdots,m),x\in U(x_i,\delta_{x_i}).$ ②

再令 $M=\max\{M_1,M_2,\cdots M_m\}$，则

$$|f(x)|<M,x\in[a,b].$$

202.(复旦大学，1999年) (1) 求极限

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\sin x}+\left(\frac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}\right];$$

(2) 当 $x\to0$ 时，求 $1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)$ 是多少阶无穷小量(a 为参数).

解 (1) $\because \lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\sin x}=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}$

$=0.$

令 $y=\left(\frac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}$,

$\ln y=\frac{1}{\sin x}\cdot\ln\frac{3-e^x}{2+x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{3-e^x}{2+x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2+x}{3-e^x}\cdot\frac{-e^x(2+x)-(3-e^x)}{(2+x)^2}}{\cos x},$$

$=-1,$

$\therefore \lim_{x\to0}\left(\frac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}=e^{-1}.$

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\sin x}+\left(\frac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}\right]=e^{-1}.$$

(2) 当 $a\neq-\frac{1}{2}$ 时

$\because \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cdot\cos x+\frac{2ax}{1+x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)\cdot\cos^2x-\sin(\sin x)\cdot\sin x+\frac{2d(1+x^2)-4ax}{(1+x^2)^2}}{2}$$

$$=\frac{1+2a}{2}\neq0.$$

当 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 时，

$\because 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ln(1+x)\sim x$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2}x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{2x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{8x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos 2x-1)}{24x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{(2x)^2}{2}}{24x^2}=-\frac{1}{6}.$$

由上可知，当 $x\to 0$ 时，若 $\alpha\neq-\frac{1}{2}$ 时，则 $1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$ 是 2 阶无穷小量，当 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 时，$1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$ 是 4 阶无穷小量.

203.（复旦大学，1996） 求极限 $\lim\limits_{x\to+0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 令 $y=(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$，则

$\ln y=\frac{\ln\cot x}{\ln x}$，

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{\tan x\cdot(-\csc^2 x)}{\frac{1}{x}}=-1.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to+0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$.

204.（南京大学） 求下面二极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x^{\ln(e^x-1)}}=?$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=?$

解 (1) 令 $y=x^{\ln(e^x-1)}$，则

$\ln y=\ln(e^x-1)\ln x$

$\because \lim\limits_{x\to 0+}\ln(e^x-1)\cdot\ln x=+\infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0+}x^{\ln(e^x-1)}=e^{+\infty}=+\infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x^{\ln(e^x-1)}}=0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1.$$

205.(复旦大学,1997年) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}$.

解 令 $y=(x+e^x)^{\frac{2}{x}}$,则 $\ln y=\frac{2}{x}\ln(x+e^x)$ 而

$$\lim_{x\to0}\frac{2\ln(x+e^x)}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{1+e^x}{x+e^x}=4.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}=e^4$.

206.(四川联合大学,1999年) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{-\frac{1}{x}}$.

解 令 $y=(x+e^x)^{-\frac{1}{x}}$,则 $\ln y=-\frac{1}{x}\ln(x+e^x)$,而

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right]=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=-1.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{-\frac{1}{x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

207.(北京科技大学,2001年) 计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{x[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]}{1-\cos x}$.

解 当 $x\to0$ 时,$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$,$\sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{4}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{x[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]}{1-\cos x}=2\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}.$$

$\because [(1+x)^{\frac{1}{x}}]'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{x[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]}{1-\cos x}=2\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$=2e\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=2e.$$

208.(四川联合大学,2000年) 填空题

(1) 设 $f(x)=e^{\sin(2x-3)x}$,则$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}=$ ________;

(2) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\lambda x}=\int_{-\infty}^{\lambda}te^t\mathrm{d}t$,则 $\lambda=$ ________.

解 (1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(2-x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{\sin(1-2x)\pi}-1}{x-1}$
$=\lim\limits_{x\to1}e^{\sin(1-2x)\pi}\cdot\cos(1-2x)\pi\cdot(-2\pi)$
$=2\pi.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+x}{x})^{\lambda x}=e^{\lambda}$,

$\int_{-\infty}^{\lambda}te^{t}dt=te^{t}\Big|_{-\infty}^{\lambda}-\int_{-\infty}^{\lambda}e^{t}dt=\lambda e^{\lambda}-e^{\lambda}.$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+x}{x})^{\lambda x}=\int_{-\infty}^{\lambda}te^{t}dt$,

$\therefore e^{\lambda}=\lambda e^{\lambda}-e^{\lambda}$,

$2e^{\lambda}=\lambda e^{\lambda}$, $\lambda=2.$

209.(浙江大学,2002年) 用"$\varepsilon-\delta$语言"证明:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0.$$

证 设 $|x-1|<1$,则

$|x-2|=|x-1-1|\leqslant|x-1|+|-1|<2$

$|x-3|=|x-1-2|\geqslant|-2|-|x-1|>2-1=1.$

$\therefore\left|\dfrac{x-2}{x-3}\right|<2.$

$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta<\min\{1,2\varepsilon\}$,则当 $|x-1|<\delta$ 时

$\left|\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}-0\right|=\left|\dfrac{x-2}{x-3}\right|\cdot|x-1|<2\cdot\delta<\varepsilon.$

$\therefore\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0.$

210.(浙江大学,2002年) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}})^{1/x^2}$

解 令 $y=(\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}})^{1/x^2}$,则

$\ln y=\dfrac{1}{2x^2}\ln\cos\dfrac{1}{x}$,

但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^2}\ln\cos\dfrac{1}{x}=0$,

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}})^{1/x^2}=e^0=1.$

第三章 函数的连续性

§1 连续与一致连续

【考点综述】

一、综述

1. 连续(1) 设函数 $f(x)$ 在点 a 的邻域内有定义,且 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$,则称 $f(x)$ 在点 a 连续.

(2) 设 $f(x)$ 在 a 的右(或左)邻域 $U_+(a)$(或 $U_-(a)$)内有定义.若 $\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$(或 $\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$),则称 $f(x)$ 在点 a 右(或左)连续.

显然 $f(x)$ 在 a 连续的充要条件是:函数 $f(x)$ 在点 a 既左连续又右连续.

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续,则称 $f(x)$ 为 I 上连续函数.对于区间端点上的连续性,按左、右连续来确定.

(4) 函数 $f(x)$ 的不连续点统称为间断点,间断点又分为两类

(ⅰ) 第一类间断点:$\lim_{x\to a+}f(x)$ 与 $\lim_{x\to a-}f(x)$ 都存在,

1) 若 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)\neq f(a)$,称 a 为可去间断点.

2) 若 $\lim_{x\to a+}f(x)\neq\lim_{x\to a-}f(x)$,称 a 为跳跃间断点.

(ⅱ) 第二类间断点:$\lim_{x\to a+}f(x)$ 与 $\lim_{x\to a-}f(x)$ 至少有一不存在.

2. 一致连续 (1) 设 $f(x)$ 为定义在区间 I 上的函数,若对 $\forall\varepsilon>0$,总存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,只要 $x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta$,都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

(2) $f(x)$ 在区间 I 上一致连续,则 $f(x)$ 在 I 上连续,反之不然.

(3) $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

二、解题方法

1. 考点 1 判断连续性

解题方法 (1) 定义法(见下面第 214 题);(2) 判定左、右连续法(见下面第 218 题);(3) 放缩法(见下面第 216 题)

2. 考点2　判断一致连续性

解题方法　(1) 定义法(见下面第213题)；(2) 放缩性(见下面第241题)；(3) 用利普希兹条件(见下面第250题)

【经典题解】

211.(复旦大学,1999年)　严格表达下列概念

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$；

(2) $y = f(x)$ 在 $x \in [a,b]$ 上不一致连续.

答　(1) $\forall M > 0, \exists N > 0$, 当 $x > N$ 时,有 $f(x) < -M$.

则称 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(2) $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall \delta > 0$, 存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$, 而 $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon$.

212.(浙江大学,2001年)　给出一个一元函数 f, 在有理数都不连续,在无理点都连续.并证明之.

证　先作黎曼函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, \text{当 } x = \dfrac{1}{q}\,(p、q \text{ 为正整数}, \dfrac{p}{q} \text{ 为既约分数}), \\ 0, \text{当 } x = 0,1 \text{ 及无理数}, \end{cases}$$

则可证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的有理点都不连续,在无理点连续(见第214题).再定义

$F(x) = f(x_1)$　　其中 $x = k + x_1$, k 为整数, $x_1 \in [0,1]$

则 $F(x)$ 是以1为周期的函数.但在 $[0,1]$ 上 $F(x) = f(x)$. 从而 $F(x)$ 在有理点都不连续,在无理点都连续.

213.(南开大学,2000年)　(1) 叙述 $f(x)$ 于区间 I 一致连续的定义；(2) 设 $f(x), g(x)$ 都于区间 I 一致连续且有界,证明: $F(x) = f(x)g(x)$ 也于 I 一致连续.

解　(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

(2) 由题设 $f(x), g(x)$ 有界,从而存在 $M > 0$, 使

$|f(x)| < M$, $|g(x)| < M$, $\forall x \in I$.

再由 $f(x), g(x)$ 都一致连续,则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ 和 $\delta_2 > 0$ 使 $\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta_1$, $|x_3 - x_4| < \delta_2$ 时有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $|g(x_3) - g(x_4)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $\forall x_5, x_6 \in I$, 且 $|x_5 - x_6| <$

δ 时，$|F(x_5)-F(x_6)|=|f(x_5)g(x_5)-f(x_6)g(x_6)|\leq|f(x_5)|\cdot|g(x_5)-g(x_6)|+|g(x_6)|\cdot|f(x_5)-f(x_6)|< M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$.

$\therefore F(x)$ 在 I 上一致连续.

214.【复旦大学】 讨论 *Riemann* 函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q},当\ x=\frac{p}{q},(q>0,p,q\ 是互质整数),\\ 0,当\ x=0,1\ 及无理数,\end{cases}$$

在区间[0,1]上的不连续点的类型.

解 (1) 先证 $f(x)$ 在[0,1]上无理点都连续，设无理数 $\xi\in[0,1]$

$\because |f(x)-f(\xi)|=f(x)$.

$\forall\varepsilon>0$，若 x 为无理数，总有 $|f(x)-f(\xi)|=f(x)=0<\varepsilon$.

若 $x=\frac{p}{q}$，在[0,1]中既约分数的分母不大于 n 的仅有有限个，选其中最接近于 ξ 的，记为 x'，取 $\delta=|\xi-x'|$，则当 $|\frac{p}{q}-\xi|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(\xi)|=\frac{1}{q}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

(2) 再证 $f(x)$ 在(0,1)上有理点，均为第二类间断点，设有理数 $\frac{q}{p}\in[0,1]$ 取无理数列 $\{x_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{p}{q}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$.

再取有理数列 $\{y_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{p}{q}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\frac{1}{q}$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\frac{p}{q}}f(x)$ 不存在. 即证 $\frac{p}{q}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

(3) 类似可证 1 不是 $f(x)$ 的左连续点.

(4) 可证 0 是 $f(x)$ 的右连续点.

215.【清华大学】 已知 $f(x)=\begin{cases}x^{2x},x>0,\\ x+1,x\leq 0\end{cases}$

(1) 研究 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性；

(2) 问 x 为何值时，$f(x)$ 取得极值.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(x+1)=1=f(0)$. ①

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}x^{2x}=\lim\limits_{x\to0+}e^{2x\ln x}$,

$$\because \lim_{x\to0+}2x\ln x=2\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = e^0 = 1 = f(0)$. ②

由①,②知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = x^{2x}(2\ln x + 2)$.

令 $f'(x) = 0$,解得 $x = e^{-1}$.

当 $x < e^{-1}$ 时, $f'(x) < 0$;当 $x > e^{-1}$ 时, $f'(x) > 0$,当 $x = e^{-1}$ 时, $f(x)$ 有极小值 $(e^{-1})^{2e^{-1}} = f(e^{-1})$.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) = 1 > 0$. 在 $0 < x < e^{-1}$ 内 $f'(x) < 0$. $\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 有极大值 $1 = f(0)$.

216.(内蒙古大学) 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), x \text{ 为有理数}, \\ x(1+x), x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

的连续性与可微性.

解 先证 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. $\forall \varepsilon > 0$,当 $|x| < \delta$ 时,则 $1 + |x| < C$, $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leqslant |x|(1 + |x|) < C \cdot \delta$,

因此取 $\delta < \dfrac{\varepsilon}{C}$,即有 $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

再证 $f(x)$ 在任何非零点 x_0 均不连续. 分别取有理数 $\{r_n\}$ 收敛于 x_0,再取无理数 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 x_0. 则

$\lim\limits_{n \to \infty} f(r_n) = \lim\limits_{n \to \infty} r_n(1 - r_n) = x_0(1 - x_0)$,

$\lim\limits_{n \to \infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n(1 + \alpha_n) = x_0(1 + x_0)$

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续,则有 $x_0(1 - x_0) = x_0(1 + x_0)$, $\therefore x_0 = 0$,这与 $x_0 \neq 0$ 矛盾.

由于 $f(x)$ 在任意非零点不连续,从而也不可微.

最后证明: $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可微.

$$0 \leqslant \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 1 \right| \leqslant \left| \frac{f(x) - x}{x} \right| \leqslant |x|.$$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

$$\therefore \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 1 \right| = 0,$$

即 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$,

$\therefore f'(0) = 1$.

217.(天津大学,1999 年) 选择题:下列函数在开区间 $(0,1)$ 内一致连续的是(   )

$A. f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad$ $B. g(x)=\sin\frac{1}{x}$

$C. h(x)=\frac{x}{2-x^2}$ $\quad$ $D. s(x)=\ln x$

答 C.因为若$f(x)$在开区间(a,b)上连续,则$f(x)$在(a,b)上一致连续$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a+0}f(x)$及$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$都存在.

根据上述结论.故选 C.

218.(东北重型机械学院) 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$$

试研究$f(x)$在$x=0$点的连续性.

解 $$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1\neq f(0).$$

$\therefore f(x)$在$x=0$处不连续.

219.(成都科技大学) 研究函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}$的连续性.

解 当$|x|>1$时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=1.$$

当$|x|<1$时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}=-1.$$

当$x=1$时,$f(x)=0$.

当$x=-1$时,$f(x)$无定义.

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-1, & |x|<1,\\ 0, & x=1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$$

$\because \lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(-1)=-1\neq f(1)$.$\therefore f(x)$在$x=1$处不连续.

在$x=-1$处$f(x)$无定义,从而也不连续.$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$上都连续.

220.(长沙铁道学院)　设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续且恒大于零,按ε-δ定义证明:$\frac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上连续.

证　$\because f(x)$在$[a,b]$上连续,$\therefore f(x)$在$[a,b]$上有最小值$m>0$. $\forall x_0\in(a,b)$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-f(x_0)|<m^2\varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}\right|=\frac{|f(x_0)-f(x)|}{f(x)f(x_0)}\leqslant\frac{1}{m^2}|f(x_0-f(x)|<\varepsilon.$$

$\therefore\frac{1}{f(x)}$在点x_0处连续.

当$x_0=a$(或$x_0=b$)时,只需将上面$|x-x_0|<\delta$,改为$a<x_0<a+\delta$(或$b-\delta<x_0<b$)即可.

综上可知,$f(x)$在$[a,b]$上连续.

221.(上海化工学院)　已知$f(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 1,\\ ax+b, x>1.\end{cases}$试确定常数$a,b$的值使$f(x)$处处连续,且可微.

解　$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}(ax+b)=a+b=f(1)=1,$

$$\therefore a+b=1.\qquad ①$$

$f'_-(1)=2,$

$f'_+(1)=a$,由$f'_-(1)=f'_+(1)$.

$\therefore a=2$

代入①得$b=-1$.

222.(湖南大学)　设$f(x)=\begin{cases}1, x\geqslant0,\\ -1, x<0,\end{cases}$ $g(x)=\sin x$,讨论$f[g(x)]$的连续性.

解　当$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$时,$\sin x\geqslant0$.

当$(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$时,$\sin x<0$.

$\therefore f[g(x)]=\begin{cases}1 & 当2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\\ -1 & (2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi,\end{cases}$其中$k\in Z$

$\lim\limits_{x\to2k\pi-0}f(g(x)]=-1\neq f[g(2k\pi)]$.

$\lim\limits_{x\to(2k+1)\pi+0}f[g(x)]=-1\neq f[g(2k+1)\pi)]$.

$\therefore f[g(x)]$在$x=k\pi(k\in Z)$点都不连续,在其它点上都连续.

223. 若$f(x)$在$[a,b]$和$[b,c]$上连续,求证:$f(x)$在$[a,c]$上一致连续.

证　由假设知$f(x)$在$[a,c]$上连续,从而在$[a,c]$上一致连续.详细证明见第259题.

224.(中国人民大学2001年,新疆大学)　若$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 存在,则 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上一致连续.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,由柯西准则,$\forall \varepsilon > 0$,存在 $M > 0$,当 $x_1, x_2 > M$ 时,有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. ①

又由于 $f(x)$ 在$[0, M+1]$上连续,从而一致连续.故对上述 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta_1 > 0$,当 $x_3, x_4 \in [0, M+1]$,且 $|x_3 - x_4| < \delta_1$ 时,有

$$|f(x_3) - f(x_4)| < \varepsilon. \quad ②$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$,则 $\forall x', x'' \in [0, +\infty)$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时,由①,②均有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

此即证 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上一致连续.

225.(哈尔滨工业大学,2002年) 求证:$f(x) = \dfrac{x^{314}}{e^x}$ 在$[0+\infty)$上一致连续.

证 $\because f(x)$ 在$[0,+\infty]$上连续,又由罗比塔法则可证 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{314}}{e^x} = 0$.

由上题可得 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$一致连续.

226.(中国科学院,2001年) 证明:$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在$[a,+\infty)$(其中 $a > 0$)上一致连续,$g(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$上不一致连续.

证 (1)$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 是初等函数,所以在$[a,+\infty)$上连续.又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

则由第224题可知 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上一致连续.

(2)$g(x) = \sin\dfrac{1}{x}$,在$(0,1)$内取 $x_n = \dfrac{1}{n\pi}, x_n' = \dfrac{2}{(n+1)\pi}$

取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$,对任意 $\delta > 0$,只要 n 充分大总有

$|x_n - x'_n| = \dfrac{2}{n(n+1)\pi} < \delta$,

$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left|\sin\dfrac{n\pi}{2} - \sin\dfrac{(n+1)\pi}{2}\right| = 1 > \varepsilon_0$.

$\therefore f(x)$ 在$(0,1)$上不一致连续.

227.(华中师范大学) 设函数 $f(x)$ 定义在区间(a,b)上.

(1) 用 $\varepsilon - \delta$ 方法叙述 $f(x)$ 在(a,b)上一致连续的概念;

(2) 设 $0 < a < 1$,证明:$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ 在$(a,1)$上一致连续;

(3) 证明：函数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在(0,1)上非一致连续.

解 (1) $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对 $\forall x_1, x_2, \in (a, b)$，且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

(2) $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = a^2\varepsilon$，则当 $x_1, x_2 \in (a, 1)$，且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\right| = \left|2\cos\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2} \cdot \sin\frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)\right| \leqslant \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right|$$

$$= \frac{|x_2 - x_1|}{x_1 - x_2} < \frac{1}{a^2}|x_2 - x_1| < \frac{1}{a^2}\delta = \varepsilon.$$

$\therefore f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $(a, 1)$ 上一致连续.

(3) 由上题可知 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在(0,1)上不一致连续.

228.（大连工学院） 已知 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续，证明：$\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ 存在.

证 由假设，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，对 $x_1, x_2 \in (a, b)$，且 $|x_1 - x_2| < \delta$，都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

故当 $a < x_1 < a + \delta$，$a < x_2 < a + \delta$ 时，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

由柯西准则知 $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ 存在.

229.（南开大学，山东大学） 设 $f(x)$ 在有限开区间 (a, b) 上连续，证明：$f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ 都存在.

证 先证充分性，设 $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = c$，$\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = d$，规定

$$F(x) = \begin{cases} c, \text{当 } x = a, \\ f(x), \text{当 } x \in (a, b), \\ d, \text{当 } x = b. \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，从而在 $[a, b]$ 上一致连续，$\therefore f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

再证必要性，由上题可证 $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ 存在，类似上题可证 $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ 存在.

230.（武汉大学，2001年） 证明：$y = \sin\sqrt{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.

证 先证 $f(x) = \sin\sqrt{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

$\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta < \min\left\{2\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right\}$，则当 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$，且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，

$|f(x_1)-f(x_2)|=|\sin\sqrt{x_1}-\sin\sqrt{x_2}|=$

$\left|2\cos\left(\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\right)\sin\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\right|\leqslant|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|$

$\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\leqslant\frac{1}{2}|x_1-x_2|<\varepsilon.$

$\therefore f(x)=\sin\sqrt{x}$ 在$[1,+\infty)$内一致连续.

补充规定$f(0)=0$,则$f(x)=\sin\sqrt{x}$在$[0,1]$上连续,从而一致连续.

由综上可知$f(x)=\sin\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续,从而在$(0,+\infty)$上一致连续.

231.(厦门大学) 证明:如果一个函数$f(x)$在区间$(0,1)$里一致连续,那么存在一个函数$F(x)$在闭区间$[0,1]$里连续,并且对任何$x\in(0,1)$,$F(x)=f(x)$.

证 由第229题知$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=c$(存在),$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=d$(存在),令

$$F(x)=\begin{cases}c, x=0,\\ f(x), x\in(0,1),\\ d, x=1\end{cases}$$

则$F(x)$在$[0,1]$里连续,且$F(x)=f(x),\forall x\in(0,1)$.

232.(内蒙古大学) 用不等式叙述$f(x)$在(a,b)不一致连续.

答 存在$\varepsilon_0>0$,对$\forall\delta>0$,存在$x_1,x_2\in(a,b)$,且$|x_1-x_2|<\delta$时,有$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$.

233.(上海交通大学) 讨论$f(x)=\frac{\sin x}{x}$在$0<x<\pi$上的一致连续性.

解 $\because\lim\limits_{\sin x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\frac{\sin\pi}{\pi}=0$,构作新函数

$$F(x)=\begin{cases}1, x=0,\\ f(x), 0<x<\pi,\\ 0, x=\pi.\end{cases}$$

则$F(x)$在$[0,\pi]$上连续,从而一致连续.$\therefore F(x)$在$(0,\pi)$上一致连续,即$f(x)$在$(0,\pi)$上一致连续.

234.(利普希茨条件) 若函数f在区间I上满足利普希茨条件:

$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|,\forall x_1,x_2\in I,$ ①

则f在I上一致连续.

证 $\forall\varepsilon>0$,取$\delta<\frac{\varepsilon}{L}$,则当$x_1,x_2\in I$,且$|x_1-x_2|<\delta$时

$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|<L\cdot\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon.$

$\therefore f$ 在 I 上一致连续.

235.(武汉大学,1992 年)　设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上,试对"函数 $f(x)$ 在 I 上不一致连续"的含义作一肯定语气(即不使用否定词的)叙述.并且证明:函数 $x\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

解　存在 $\epsilon_0>0$,对 $\forall\delta>0$,存在 $x_1,x_2,\in I$,且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时有 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\epsilon_0$

那么 $f(x)$ 在 I 上不一致连续.

令 $f(x)=x\ln x$, $\because f'(x)=\ln x+1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

236.(湖北大学,2001 年)　证明:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则函数

$$m(x)=\min_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \quad ①$$

在 $[a,b]$ 上连续.

证　$\forall x_0\in[a,b]$ 先证 $\lim\limits_{x\to x_0+0}m(x)=m(x_0)$. ②

$\forall\epsilon>0$,由于 $f(x)$ 在 x_0 连续,所以存在 $\delta>0$,有

$f(x_0)-\epsilon<f(x)<f(x_0)+\epsilon$, $\forall x_0-\delta<x<x_0+\delta$. ③

从而 $f(x)>f(x_0)-\epsilon\geqslant m(x_0)-\epsilon$. ④

由④及 ϵ 任意小有

$m(x)\geqslant m(x_0)-\epsilon$, $x_0<x<x_0+\delta$. ⑤

另一方面,$m(x)$ 是单调递减.所以

$m(x_0)\geqslant m(x)\geqslant m(x_0)-\epsilon$, $x_0<x<x_0+\delta$ ⑥

由⑥及 ϵ 任意性,所以

$m(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}m(x)=m(x_0)$. ⑦

再证 $m(x_0-0)=m(x_0)$.不妨设 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 的最小值在点 $x=x_0$ 达到,即 $m(x_0)=f(x_0)$(否则,若 $f(x_1)=m(x_0)$, $a\leqslant x_1<x_0$,则 $m(x)\equiv m(x_0)$, $\forall x\in(x_1,x_0)$ 从而左连续).

$\forall\epsilon>0$,仿上可证,存在 $\delta>0$,有

$f(x)<f(x_0)+\epsilon=m(x_0)+\epsilon$, $x\in(x_0-\delta,x_0)$.

因此　$m(x)<m(x_0)+\epsilon$.从而

$m(x_0)\leqslant m(x)<m(x_0)+\epsilon$. $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$.

$\therefore\lim\limits_{x\to x_0-0}m(x)=m(x_0-0)=m(x_0)$,即 $m(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续.

综上得证 $m(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,由 x_0 任意性,$\therefore m(x)$ 在 $[a,b]$ 上连

续.

237.(西北电讯工程学院)　设 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 均为 $[a,b]$ 上连续函数,证明:

(1) $g(x) = \max\{f_1(x),f_2(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上连续函数;

(2) 定义 $h(x)$ 表示 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 三者中的中间值,则 $h(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数.

证　(1) $\because g(x) = \frac{1}{2}\{f_1(x)+f_2(x)+|f_1(x)-f_2(x)|\}$.　①

由于 $f_1(x),f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,所以 $f_1(x)-f_2(x)$ 连续,从而 $|f_1(x)-f_2(x)|$ 也在 $[a,b]$ 上连续.由①式所以 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2) $\because h(x) = f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)-\varphi(x)-\psi(x)$.

其中 $\varphi(x) = \max\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}$,

$\psi(x) = \min\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}$.

由于 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),\varphi(x),\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,所以 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

238.(东北工学院)　设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 上单调、有界,且连续,证明:$f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

证　由假设知 $\lim\limits_{x\to b+0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ 都存在,由第229题即证.

239.(北京大学1998年)　设 $f\in C(a,b)$,若存在 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to b-}f(x)=2$,则　(　　)

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 一致连续　　(B) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续

(C) $f(x)$ 在 (a,b) 一致连续　　(D) $f(x)$ 在 (a,b) 可微

答　(C).由第229题知.

240.(北京航空航天大学)　已知

$$f(x)=\begin{cases}x, 0\leqslant x<1,\\ k+1, k\leqslant x<k+1,\end{cases}$$ 其中 $k=1,2,3\cdots\cdots$

求函数 $g(y)=\sup\limits_{f(x)\leqslant y}x$,在 $y\geqslant 0$ 时的具体表达式,并指出 $g(y)$ 在各点处的左右连续性.

解　$$\because f(x)=\begin{cases}x, 0\leqslant x<1\\ 2, 1\leqslant x<2\\ 3, 2\leqslant x<3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$　①

当 $0\leqslant y<1$ 时,由 $f(x)\leqslant y$,得 $x\leqslant y$,$\therefore \sup\limits_{x\leqslant y}x = y$.

当 $1\leqslant y<2$ 时,由 $f(x)\leqslant y$, $\sup\limits_{f(x)\leqslant y}x = 1$.

由此可知当 $k \leq y < k+1$ 时，$\sup\limits_{f(x)\leq y} x = k$，，$k = 1,2,3\cdots$

综上知 $g(y) = \begin{cases} y, 0 \leq y < 1, \\ k, k \leq y < k+1, \end{cases}$ $k = 1,2,3\cdots\cdots$

$g(y)$ 连续点集为 $[0,2) \cup (2,3) \cup (3,4) \cup \cdots$，即不连续点为 $y = k$，($k = 2,3,\cdots$)。

241.（武汉大学，1998 年）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 满足 Lipschitz 条件，即存在 $m > 0$，对任意 $x', x'' \in [0,+\infty)$ 有 $|f(x') - f(x'')| \leq m|x' - x''|$。证明：$f(x^\alpha)$，($0 < \alpha < 1$ 为常数) 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

证 (1) 先证明 $g(x) = x^\alpha$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。$\because g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，从而一致连续，下证 $g(x) = x^\alpha$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续。

$\forall \varepsilon > 0$，考虑 $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$，且 $x_1 < x_2$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 其中 $\delta > 0$，那么

$$\begin{aligned} |g(x_1) - g(x_2)| = |x_1^\alpha - x_2^\alpha| = x_2^\alpha - x_1^\alpha &= g(x_2) - g(x_1) \\ &= g'(x_1)(x_2 - x_1) + o((x_2 - x_1)) \\ &= \alpha \cdot \frac{1}{x_1^{1-\alpha}}(x_2 - x_1) + o((x_2 - x_1)) \\ &\leq \alpha|x_1 - x_2| + o(|x_1 - x_2|). \qquad ① \end{aligned}$$

因此取 $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{2\alpha}, \frac{\varepsilon}{2})$，则当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，由 ① 式有

$|g(x) - g(x_2)| < \delta \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

此即证 $g(x) = x^\alpha$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续。从而得证

$g(x) = x^\alpha$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$，且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时有

$|x_1^\alpha - x_2^\alpha| < \frac{\varepsilon}{m}$ 那么

$|f(x_1^\alpha) - f(x_2^\alpha)| \leq m|x_1^\alpha - x_2^\alpha| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} < \varepsilon$.

即证 $f(x^\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

242.（华东师范大学，1999 年，哈尔滨工业大学，1999 年） 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$，证明：$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非一致连续。

证 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ 知，$\forall \delta > 0$，取 $M = \frac{2}{\delta}$，则存在 $N > 0$，

当 $x > N$ 时，有 $f'(x) > M = \frac{2}{\delta}$.

再取 $x_1, x_2 > N$，且 $x_1 < x_2$ 和 $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$ 时，

$|f(x_2)-f(x_1)| = f'(\xi)(x_2-x_1) \geqslant \frac{2}{\delta}\cdot\frac{\delta}{2} = 1.$

$\therefore f(x)$ 在$[1,+\infty)$上非一致连续.

243.(华中理工大学) 证明:$f(x)$ 在(a,b)为一致连续的充要条件是:对(a,b)内任意两数列$\{x_n\}$,$\{x'_n\}$,只要 $x_n - x'_n \to 0$,

就有 $f(x_n)-f(x'_n)\to 0$.

证 先证必要性.设 $f(x)$ 一致连续,用反证法,若结论不成立,那么必 $\exists\, \epsilon_0>0$,对 $\forall\, \frac{1}{n}>0$,都存在 $x_n, x'_n \in (a,b)$,尽管 $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ 时,但

$$|f(x_n)-f(x'_n)| \geqslant \epsilon_0. \quad ①$$

但对 $\forall\, \delta>0$,存在 N,使当 $n>N$ 时,有$\frac{1}{n}<\delta$,所以

当 $|x_n - x'_n|<\delta$ 时,也有①式成立.这与 $f(x)$ 一致连续矛盾.

再证充分性.$\forall\, \varepsilon>0$,$\exists\, \delta>0$,当 $x,x'\in(a,b)$ 且 $|x-x'|<\delta$ 时,现作两个数列如下:

$\{x_n\}: x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$

$\{x'_n\}: x'_1, x'_2, \cdots\cdots x'_n \cdots\cdots$ 且 $x_n \to x$, $x'_n \to x'$.

那么 $|x_n - x'_n| < \delta$, $\therefore |f(x_n)-f(x'_n)|<\varepsilon$,则可证

$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

$\therefore f(x)$ 在(a,b)为一致连续.

244.(哈尔滨工业大学,2000年) 已知 $f(x)=x^2$.

(1) 证明:对任何实数 $a>0$, $f(x)$ 在$[0,a]$上一致连续;

(2) 证明:$f(x)$ 在$[0,+\infty)$上非一致连续.

证 (1) $\because f(x)$ 在$[0,a]$上连续,$\therefore$ 在$[0,a]$上一致连续.

(2) $\because \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$,由第242题知 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$非一致连续.

245.(中国人民大学,1999年) 用定义证明$\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

证 令 $f(x)=\sqrt{x}$,先证 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上一致连续.

设 $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$,且 $x_1<x_2$

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}| = \frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} < \frac{|x_1-x_2|}{2}.$$

$\forall\, \varepsilon>0$,取 $\delta = 2\varepsilon$,当 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}| < \frac{|x_1-x_2|}{2} < \varepsilon.$$

即证 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

由于 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 上连续,从而一致连续.

综上可知 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

注　此例说明若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不是有限数时,$f(x)$ 也可能一致连续.

246.(北京师范大学,1993 年)　设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续,且

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-cx-d]=0,(c,d\text{ 为常数}).\tag{①}$$

求证:$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

证　由①式有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(cx+d),\tag{②}$$

②式右端极限存在的条件 $c=0$.

$\therefore\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=d.$

再由第 224 题,$\therefore f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

247.(兰州大学)　设 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x}$,$a>0$ 为任一正常数,试证:$f(x)$ 在 $(0,a)$ 内非一致连续,在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证　(1) $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$,$x'_n=\dfrac{1}{2n\pi}$,则

$$|x_n-x'_n|=\frac{\frac{\pi}{2}}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})(2n\pi)}\to0,n\to\infty\text{ 但是}$$

$$|f(x_n)-f(x'_n)|=\left|\frac{4n\pi+\pi+1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}+1}-0\right|>1,$$

所以由第 243 题知 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内不一致连续.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}\sin\frac{1}{x}=0.$$

由第 224 题知 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

248.(清华大学,1999 年)　设实函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,在 $(0,+\infty)$ 内处处可导,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=A$(存在).证明:当且仅当 $A<+\infty$ 时,f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证　(1) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=A<+\infty$,下证 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.因为 $\forall\varepsilon>0$,则存在 $M>0$,当 $x\geqslant M$ 时有

$$||f'(x)|-A|<\varepsilon.\tag{②}$$

再由 ε, A 可知存在自然数 k,使

$kA > \varepsilon$. ③

由 ②,③ 知

$|f'(x)| < A + \varepsilon < A + kA = (k+1)A$. ④

对上述 ε,令 $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{(k+1)}A$,则当 $x_1, x_2 \geqslant M$,且 $|x_1 - x_2| < \delta_1$ 时,则由 ④ 式

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1 - x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2|$$
$$< (k+1)A \cdot \delta_1 = \varepsilon.$$

其中 ξ 在 x_1 与 x_2 之间,从而 $\xi > M$.从而得证 f 在 $[M, +\infty)$ 上一致连续.又 f 在 $[0, +\infty)$ 连续,从而在 $[0, M+1]$ 上连续,也即 f 在 $[0, M]$ 上一致连续,即对上述 ε,存在 $\delta_2 > 0$,当 $x_3, x_4 \in [0, M+1]$,且 $|x_3 - x_4| < \delta_2$ 时,有 $|f(x_3) - f(x_4)| < \varepsilon$.

再取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$ 时,则对上述 ε,且当 $x', x'' \in [0, +\infty)$

$|x' - x''| < \delta$ 时,有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

此即证 f 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.

(2) 再设 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续,下证 $A < +\infty$.用反证法设

$$\lim_{x \to +\infty} |f'(x)| = A = +\infty. \quad ⑤$$

令 $\varepsilon_0 = 1$,对 $\forall \delta > 0$,取 $G = \frac{1}{\delta}$,由 ⑤ 式则存在 $M_1 > 0$ 当 $x > M_1$ 时有 $|f'(x)| > G$.

再令 $M = \max\{G, M_1\}$,取 $x', x'' > M$,且 $|x' - x''| = \delta$,则

$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)(x' - x'')| > G \cdot \delta = 1$.

这与 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续的假设矛盾. $\therefore A < +\infty$.

249.(上海交通大学,2002 年,华中理工大学,1997 年) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续,$\varphi(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x) - \varphi(x)] = 0$.证明:$\varphi(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

证 $\because \lim\limits_{x \to +\infty}[f(x) - \varphi(x)] = 0$. $\therefore \forall \varepsilon > 0$,存在 $M > 0$,当 $x > M$ 时,

$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ①

又 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续,对上述 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $x_1, x_2 \in (a, +\infty)$,且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时有

$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. ②

那么当 $x_1, x_2 > M$,且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,有

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|=|\varphi(x_1)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+f(x_2)-\varphi(x_2)|$$
$$\leqslant|\varphi(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-\varphi(x_2)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由柯西准则，$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=l$(有限)

由第 224 题，$\therefore \varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

250.(北京师范大学，1996 年)　函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有连续的导函数，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f'(x)$ 均存在有限. 试证：

(1) $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续；

(2) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 均存在.

证　(1) 由假设知 $f'(x)$ 在 (a,b) 上连续，定义

$$F(x)=\begin{cases}f'(x), x\in(a,b),\\ \lim\limits_{x\to a^+}f'(x), x=a,\\ \lim\limits_{x\to b^-}f'(x), x=b,\end{cases}$$

从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 因此 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，此即证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即存在 $C>0$，使 $|F(x)|<C$.

从而 $|f'(x)|<C, x\in(a,b)$

$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，则

$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$

$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|$.

从而 $f(x)$ 在 (a,b) 上满足利普希茨条件，由第 234 题所以 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

(2) 由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，由第 229 题知 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在.

251.(哈尔滨工业大学)　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, x\neq 0,\\ a, x=0.\end{cases}$$

其中 $g(x)$ 具有二阶连续导函数，且 $g(0)=1$.

(1) 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续；

(2) 求 $f'(x)$；

(3) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)+\sin x}{1}=g'(0)$,
要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,必须 $a=g'(0)$.
(2) 当 $x\neq0$ 时

$$f'(x)=\frac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}$$

当 $x=0$ 时,

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}[\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}]$$
$$=\frac{1}{2}g''(0)+\frac{1}{2}.$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)+x\sin x-g(x)+\cos x}{x^2},x\neq0,\\ \dfrac{1}{2}g''(0)+\dfrac{1}{2},x=0\end{cases}$$

(3) $$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xg'(x)+x\sin x-g(x)+\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x[g''(x)+\cos x]+g'(x)+\sin x-g'(x)-\sin x}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)+\cos x}{2}=\frac{1}{2}g''(0)+\frac{1}{2}=f'(0).$$

$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

252.(吉林工业大学) 设 $f(x)$ 在[0,1]上连续,且 $f(x)>0$,置

$$R(x)=\sup_{0\leqslant y\leqslant x}f(y),(0\leqslant x\leqslant1), \quad ①$$

$$G(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x)}{R(x)}\right]^n, \quad ②$$

试证:当且仅当 $f(x)$ 在[0,1]上单增时 $G(x)$ 是连续的.

证 设 $f(x)$ 在[0,1]上单调递增,下证 $G(x)$ 连续.因 $f(x)$ 在[0,1]上连续,所以由 ① 知

$R(x)=f(x),x\in[0,1]$.

由 ② 得 $G(x)=1,x\in[0,1]$,$\therefore G(x)$ 在[0,1]上连续.

再设 $G(x)$ 在[0,1]上连续,下证 $f(x)$ 单调递增.

用反证法，若$f(x)$不单调递增．又$f(x)$在$[0,1]$上连续，从而存在$x_0\in(0,1)$，使$x=x_0$为$f(x)$的最大值点，从而

$R(x_0)=\sup\limits_{0\leq y\leq x_0}f(y)=f(x_0)$,

$\therefore G(x_0)=1.$ ①

但存在$\delta>0$，使$|x-x_0|<\delta$时，有

$f(x+\delta)<f(x_0)$,

$\therefore R(x_0+\delta)=f(x_0)$.

$\therefore G(x_0+\delta)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(x_0+\delta)}{f(x_0)}\right]^n=0.$ ②

由①，②知$G(x)$在$x=x_0$处间断，这与假设矛盾，所以$f(x)$在$[0,1]$上单调递增．

253.（北京科技大学1998年） 证明：若$(-\infty,+\infty)$上的连续函数$y=f(x)$有极限

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$及$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$,

则$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续．

证 $\because\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，由第224题知$f(x)$在$[0,+\infty)$一致连续．

再由$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$，类似第224题证明，可证$f(x)$在$(-\infty,0)$一致连续．

再由第223题可证得$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续．

254.（复旦大学，1996年） 如果$y=f(x)$在$x\in[a,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（$A$为有限数），则$y=f(x)$在$[a,+\infty)$上有界．

证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，取$\varepsilon=1$，则存在$M>0$，当$x>M$时，有$A-1<f(x)<A+1$.

$\therefore|f(x)|<C_1,\forall x\in(M,+\infty)$, ①

其中$C_1=\max\{|A+1|,|A-1|\}$.

又$f(x)$在$[a,+\infty)$连续，从而在$[a,M]$上连续，所以有界，即

$$|f(x)|<C_2,\forall x\in[a,M],\quad ②$$

令$C=\max\{C_1,C_2\}$，则

$|f(x)|<C,x\in[a,+\infty)$.

即证$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界．

255.（西北大学） (1) 若函数$f(x)$在D上有界，令

$M_f(x_0,\delta)=\sup\{f(x):x\in D,|x-x_0|<\delta\}$,

$m_f(x_0,\delta)=\inf\{f(x):x\in D,|x-x_0|<\delta\}$,

证明:(ⅰ) 当 $\delta \to 0^+$ 时,$M_f(x_0,\delta) - m_f(x_0,\delta)$ 的极限存在;

(ⅱ) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是

$\lim\limits_{\delta\to0^+}[M_f(x_0,\delta) - m_f(x_0,\delta)] = 0$;

(2) 设函数 $f(x)$ 在[0,1]上连续,并且 $f(1) = 0$,则函数列

$g_n(x) = f(x)\cdot x^n \qquad (n = 1,2\cdots)$

在[0,1]上一致收敛;

(3) 用确界存在原理(非空有界数列必有上、下确界)证明:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f(a)\cdot f(b) < 0$,则存在一点 $c \in (a,b)$ 使 $f(c) = 0$;

(4) 用有限覆盖定理证明:任何有界数列必有收敛子列.

证 (1)(ⅰ) 取 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n = 0$. 由于

$M_f(x_0,\delta_n) > M_f(x_0,\delta_{n+1}),(n = 1,2,\cdots)$

$m_f(x_0,\delta_n) < m_f(x_0,\delta_{n+1}),(n = 1,2,\cdots)$

$M_f(x_0,\delta_n) - m_f(x_0,\delta_n) > M_f(x_0,\delta_{n+1}) - m_f(x_0,\delta_{n+1})(n = 1,2,\cdots)$

$\therefore$ 数列 $\{M_f(x_0,\delta_n) - m_f(x_0,\delta_n)\}$ 是单调递减数列.

$M_f(x_0,\delta_n) - m_f(x_0 - \delta_n) \geqslant 0$.

$\therefore$ 当 $\delta \to 0^+$ 时,$M_f(x_0,\delta_n) - m_f(x_0,\delta_n)$ 的极限存在.

(ⅱ) 先证必要性. 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续,即

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$.

从而当 $\delta \to 0^+$ 时,$x \to x_0$,

$\lim\limits_{\delta\to0^+} M_f(x_0,\delta) == \lim\limits_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$.

$\lim\limits_{\delta\to0^+} m_f(x_0,\delta) = \lim\limits_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$,

$\therefore \lim\limits_{\delta\to0^+}[M_f(x_0,\delta) - m_f(x_0,\delta)] = f(x_0) - f(x_0) = 0$.

再证充分性. 对 $\forall\varepsilon > 0,\exists\delta > 0$,当 $|x - x_0| < \delta$ 时,有 $|M_f(x_0,\delta) - m_f(x_0,\delta)| < \varepsilon$,

从而 $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |\sup f(x) - \inf f(x)| < \varepsilon$.

所以 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(2) $\because g_n(x) = x^n\cdot f(x)$. 所以当 $x = 1$ 时

$\therefore g_n(1) = f(1) = 0$.

从而 $g_n(x)$ 在 $x = 1$ 处一致收敛.

$\forall x \in [0,1)$. 由于 $f(x)$ 在[0,1]上连续,则有最大值 M,从而

$|f(x)| < M$.

因为 $0 \leqslant x < 1, \forall \varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,使当 $n > N$ 时,有 $x^n < \frac{\varepsilon}{M}$.

$\therefore |g_n(x) - 0| = |f(x) \cdot x^n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

$\therefore g_n(x)$ 在$[0,1)$ 内一致收敛.

综上可证 $g_n(x)$ 在$[0,1]$ 上一致收敛.

(3) 用反证法.若 $f(x) \neq 0, x \in [a,b]$,因为 $f(a) \cdot f(b) < 0$,不失一般设 $f(a) < 0, f(b) > 0$(至于 $f(b) < 0, f(a) > 0$ 类似可证).

先将$[a,b]$ 二等分,由于 $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$,从而 $f(\frac{a+b}{2})$ 不是与 $f(a)$ 同号,必与 $f(b)$ 同号.不失一般设 $f(\frac{a+b}{2}) \cdot f(a) < 0$.将$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$记为$[a_1, b_1]$.再将$[a_1, b_1]$ 二等分,同上又可得$[a_2, b_2]$,使 $f(a_2)f(b_2) < 0$,这样继续下去,可得

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots\cdots \qquad ①$$

规定 $a_0 = a, b_0 = b$,则数列$\{a_n\}, \{b_n\}(n = 0,1,\cdots)$

为有界数集,从而$\{a_n\}$ 有上确界,$\{b_n\}$ 有下确界,由于 ①

$\therefore \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \sup a_n = \inf b_n = c$

$\because f(c) \neq 0$.

$\because f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$.

由于 $f(x)$ 连续两边取极限,有

$\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(c) \leqslant 0$,

$\lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) = f(c) \geqslant 0$.

$\therefore f(c) = 0$.矛盾.即证.

(4) 分两种情况

(ⅰ) 若$\{a_n\}$ 中,有无数多个相同,则必存在收敛子列.

(ⅱ) 若$\{a_n\}$ 是有界无限点列,设

$c < a_n < d \qquad (n = 1,2,\cdots\cdots)$

用反证法,若$\{a_n\}$ 没有收敛子列,即$[c,d]$ 中每个点都不是 a_n 的聚点,于是每个 $x \in [c,d], \exists \delta_x > 0$ 及 $U_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$,

使 U_x 中至多只含$\{a_n\}$ 中有限个点.令

$B = \{U_x \mid x \in [c,d]\}$

则 B 是$[c,d]$ 的开覆盖,由有限覆盖定理知,在 B 中可选出有限个开区间,不妨改为

$U_1, U_2, \cdots\cdots U_m$

使它们也构成$[c,d]$的一个开覆盖.由于每个$U_i(1\leqslant i\leqslant m)$只包含$\{a_n\}$中有限个点,从而$\{a_n\}$中只有有限个点.这与假设矛盾,即证.

256.(北京科技大学,2001年1998年)　设$f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)\cdot f(b)<0$,应用闭区间套原理证明:至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=0$.

证　见上题(3)的证法可得.

257.(上海师范大学,江西大学)　设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续,且$\forall x>0$,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$($n$为正整数).试证:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

证　由于$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续,则$\forall\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使当$x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且$|x_1-x_2|<\delta$时,有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad ①$$

$\forall x\in[0,1]$,作邻域$U(x,\delta)$,然后由有限覆盖定理,存在有限个$U(x_i,\delta)$　$(i=1,2,\cdots,m)$也覆盖区间$[0,1]$.

再对$\forall x>0$,总存在自然数n及存在x_i,使

$$|x-x_i-n|<\delta. \qquad ②$$

$$\therefore\ |f(x)-f(x_i+n)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad ③$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$,则对上述$\varepsilon>0$,总存在$N>0$,使当$n>N$时,有

$$|f(x_i+n)|<\frac{\varepsilon}{2},(i=1,2,\cdots,k) \qquad ④$$

因此当$x>N+1$时,由③,④得

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|f(x_i+n)+f(x)-f(x_i+n)|\\&\leqslant|f(x_i+n)|+|f(x)-f(x_i+n)|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

258.(南开大学,云南大学)　设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续,则存在非负实数a与b,使对一切$x\in(-\infty,+\infty)$都有

$$|f(x)|\leqslant a|x|+b.$$

证　由于$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续,故取$\varepsilon=1$时,存在$\delta>0$,使当$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$且$|x_1-x_2|<\delta$时,有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<1. \qquad ①$$

对$\forall x\in R$,且$x\neq0$,存在自然数n,有

$$\frac{1}{n}|x|<\delta\leqslant\frac{1}{n-1}|x|, \qquad ③$$

即用点 $\frac{1}{n}x,\frac{2}{n}x,\cdots\cdots,\frac{n-1}{n}x$

分线段$[0,x]$(当 $x>0$ 时,若 $x<0$,则线段为$[x,0]$).则

$$|f(x)-f(0)|\leqslant\left|f(x)-f(\frac{n-1}{n}x)\right|+$$
$$\left|f(\frac{n-1}{n}x)-f(\frac{n-2}{n}x)\right|$$
$$+\cdots\cdots+\left|f(\frac{1}{n}x)-f(0)\right|. \qquad ④$$

由 δ 的选法,不等式 ④ 右边每一项都小于 1,所以

$|f(x)|-|f(0)|\leqslant|f(x)-f(0)|<n,$

$\therefore |f(x)|<|f(0)|+n.$ ⑤

又因为$\frac{1}{n-1}|x|\geqslant\delta,\therefore n\leqslant\frac{|x|}{\delta}+1$,由 ⑤ 得

$|f(x)|<|f(0)|+\frac{|x|}{\delta}+1=a|x|+b.$

其中 $a=\frac{1}{\delta},b=|f(0)|+1.$

259.(北京大学,2000 年) 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上一致连续,又在$[b,c]$上一致连续,$a<b<c$.用定义证明:$f(x)$ 在$[a,c]$上一致连续.

证 由 $f(x)$ 在$[a,b]$一致连续,故 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$ 使当 $x_1,x_2\in[a,b]$,且 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时,有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad ①$$

同理,$f(x)$ 在$[b,c]$上一致连续,对上述 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_2>0$,

使当 $x_3,x_4,\in[b,c]$,且 $|x_3-x_4|<\frac{\varepsilon}{2}$. ②

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则对 $\varepsilon>0$,当 $x_5,x_6\in[a,c]$且 $|x_5-x_6|<\delta$ 时,

(1) 若 $x_5,x_6\in[a,b]$,由 ① 式有

$|f(x_5)-f(x_6)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$

(2) 若 $x_5,x_6\in[b,c]$,由 ② 式也有

$|f(x_5)-f(x_6)|<\varepsilon.$

(3) 若 $x_5\in[a,b],x_6\in[b,c]$时,则 $|x_5-b|<\delta,\ |x_6-b|<\delta$

$\therefore |f(x_5)-f(x_6)|\leqslant|f(x_5)-f(b)|+|f(b)-f(x_6)|$

$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

从而得证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

260.(北京大学,2001 年) 证明:函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

证 $\because f(x)=\sqrt{x}\ln x$,

$\therefore f'(x)=\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}>0, x\in[1,+\infty)$,

$f''(x)=\dfrac{\ln x}{4x\sqrt{x}}<0, x\in[1,+\infty)$.

故 $f'(x)$ 单调递减,

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

$\lim\limits_{x\to1}f'(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}=1$,

$\therefore f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界,设

$|f'(x)|<M, x\in[1,+\infty)$.

$\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$,那么当 $x_1,x_2,\in[1,+\infty)$,且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)(x_1-x_2)|<M|x_1-x_2|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

其中 ξ 在 x_1,x_2,之间, ①

由①式 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

261.(湖北大学,2001 年) 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$f(0)=f(1)$,则对任何自然数 n,存在 $\xi\in[0,1]$,使得

$$f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi). \quad ①$$

证 任取自然数 n,固定 n,令

$g(x)=f(x+\dfrac{1}{n})-f(x), x\in[0,1-\dfrac{1}{n}]$.

(1) 若存在 $x_1,x_2\in[0,1]$ 使 $g(x_1)g(x_2)<0$,

则由连续函数零值定理,存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $g(\xi)=0$,从而①式成立.

(2) 若 $g(x)>0, x\in[0,1-\dfrac{1}{n}]$,则

$g(0)=f(\dfrac{1}{n})-f(0)>0, \therefore f(0)<f(\dfrac{1}{n})$.

$0<g(\dfrac{1}{n})=f(\dfrac{2}{n})-f(\dfrac{1}{n}), \therefore f(\dfrac{2}{n})>f(\dfrac{1}{n})$,这样继续下去可证得

$f(0) < f(\frac{1}{n}) < f(\frac{2}{n}) < \cdots\cdots < f(\frac{n-1}{n}) < f(1)$.

这与 $f(0) = f(1)$ 矛盾.

(3) 若 $g(x) < 0, x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$,仿上面(2)可得矛盾.综上得证.

262.(北京科技大学,1999年) 用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明:如果 $y = f(\mu)$ 在点 μ_0 连续,$\mu = \varphi(x)$ 在点 x_0 连续,且 $\mu_0 = \varphi(x_0)$,则 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 连续.

证 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$,当 $|\mu - \mu_0| < \delta_1$ 时,有 $|f(\mu) - f(\mu_0)| < \varepsilon$.

对上述 δ_1,$\exists \delta > 0$,当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时有 $|\mu - \mu_0| < \delta_1$,

即 $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta_1$

$\therefore$ $|f[\varphi(x)] - f[\varphi(x_0)]| = |f(\mu) - f(\mu_0)| < \varepsilon$.

因此 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

263.(上海交通大学,1999年) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$,且 $f_n(x)$ 在 I 上一致连续($n \in N$).证明:$f(x)$ 在 I 上也一致连续.

证 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 > 0$,当 $n \geqslant N_0$ 时,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in I. \quad ①$$

又 $f_{N_0}(x)$ 在 I 上一致连续,对上述 ε,$\exists \delta > 0$,当 $x_1, x_2 \in I$ 且

$$|x_1 - x_2| < \delta \text{时}, |f_{N_0}(x_1) - f_{N_0}(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad ②$$

则由①,②两式有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f_{N_0}(x_1) + f_{N_0}(x_1) - f_{N_0}(x_2) + f_{N_0}(x_2) - f(x_2)|$$

$$\leqslant |f(x_1) - f_{N_0}(x_1)| + |f_{N_0}(x_1) - f_{N_0}(x_2)| + |f_{N_0}(x_2) - f(x_2)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

即证 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

264.(北京航空航天大学,1999年) 证明:函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ 在每个区间 $J_1 = \{x \mid -1 < x < 0\}$,$J_2 = \{x \mid 0 < x < 1\}$ 内一致连续.但在 $J_1 \cup J_2 = \{x \mid 0 < |x| < 1\}$ 非一致连续.

证 先证 $f(x)$ 在 $J_1 = (-1, 0)$ 内一致连续,由于

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = -\frac{\sin x}{x}, x \in (-1, 0),$$

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内连续.构造新函数,令

$$F(x) = \begin{cases} -1, x = 0, \\ f(x), x \in (-1, 0), \\ -\sin 1, x = -1. \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续，从而一致连续，即证 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内一致连续.

类似可证 $f(x)$ 在 $J_2=(0,1)$ 内一致连续，只需构造.

$$G(x)=\begin{cases}1, x=0\\ f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, x\in(0,1),\\ \sin 1, x=1.\end{cases}$$

最后证明 $f(x)$ 在 $J_1\cup J_2=(-1,0)\cup(0,1)$ 内非一致连续.

由于

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\sin x}{x}, x\in(-1,0),\\ \dfrac{\sin x}{x}, x\in(0,1).\end{cases}$$

再由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, ① 那么由 ① 式存在 $\varepsilon=1$, 对 $\forall\delta>0$, 都存在 $x_1\in(0,\dfrac{\delta}{2})\cap(J_1\cup J_2)$, 使

$$\frac{\sin x_1}{x_1}>0.5.$$

令 $x=x_1, x'=-x_1$, 那么 $x,x'\in J_1\cup J_2$, 且 $|x-x'|<\delta$ 而

$$|f(x)-f(x')|=\left|\frac{|\sin x_1|}{x_1}-\frac{|\sin(-x_1)|}{-x_1}\right|$$

$$=2\frac{\sin x_1}{x_1}>1.$$

故 $f(x)$ 在 $J_1\cup J_2$ 内非一致连续.

§2　连续函数的性质

【考点综述】

一、综述

1. 局部有界性　若函数 $f(x)$ 在点 a 连续，则 $f(x)$ 在点 a 的某个邻域有界.

2. 局部保号性　若函数 $f(x)$ 在点 a 连续，且 $f(a)\neq 0$, 则存在 a 的某个邻域 $U(a)$, 使得 $f(a)f(x)>0$, 其中 $\forall x\in U(a)$. 并存在某个正数 b, 使 $|f(x)|\geq b>0, \forall x\in U(a)$.

3. 四则运算连续性　若 $f(x), g(x)$ 都在点 a 连续，则 $f(x)\pm g(x)$,

$f(x)\cdot g(x),\dfrac{f(x)}{g(x)}$(其中 $g(a)\neq 0$)在点 a 也连续.

4. 复合函数连续性　若 $f(x)$ 在点 a 连续，$g(y)$ 在点 b 连续，其中 $b=f(a)$，则复合函数 $g[f(x)]$ 在点 a 连续.

5. 有界性　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

6. 最值定理　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值与最小值.

7. 介值定理　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<f(b)$(或 $f(a)>f(b)$)，$\forall c\in(f(a),f(b)]$(或 $c\in(f(b),f(a))$)

则存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=c$.

8. 根的存在性定理　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

9. 反函数连续性　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增(或减)且连续，则其反函数 $f^{-1}(x)$ 在相应定义域 $[f(a),f(b)]$(或 $[f(b),f(a)]$)上连续.

10. 初等函数连续性　任意初等函数都是它在定义区间上的连续函数.

二、解题方法

1. 考点 1　连续函数的性质

解题方法：(1) 利用连续函数的性质(见下面第 265 题)

(2) 构造辅助函数法(见下面第 266 题)；(3) 利用区间套原理(见下面第 272 题)；(4) 利用有限覆盖定理(见下面第 269 题)；(5) 用罗比塔法则(见下面第 275 题)；(6) 反证法(见下面第 274 题)

2. 考点 2　闭区间上连续函数的性质

解题方法：(1) 利用闭区间上连续函数的性质(见下面第 288 题)；

(2) 反证法(见下面第 294 题)；(3) 用区间套原理(见下面第 274 题)

【经典题解】

265.(北京大学，1999 年)　判断题：设 $f\in C((a,b))$，若存在

$$\lim_{x\to a+}f(x)=A<0,\ \lim_{x\to b-}f(x)=B>0 \qquad ①$$

则必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.　　(　　)

答　√. $\because f(x)$ 在 (a,b) 内连续，又有①式成立，从而 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

由①式可选 $\varepsilon>0$ 使

$$\begin{cases}A+\varepsilon<0,\\ B-\varepsilon>0,\\ a+\varepsilon<b-\varepsilon,\end{cases}$$

同时成立，对于上述 ε，由一致连续性，$\exists\delta>0$ 使当满足不等式 $\begin{cases}a<x<a+\varepsilon,\\ b-\varepsilon<x<b,\end{cases}$ 的一切 x 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,\ |f(x)-B|<\varepsilon$$

$$\therefore\begin{cases}f(x)<A+\varepsilon<0\\ f(x)>B-\varepsilon>0\end{cases} \quad ②$$

由 ② 式选 $f(x_1)<0$，其中 $x_1\in(a,a+\varepsilon)\subset(a,b)$，$f(x_2)>0$，其中 $x_2\in(b-\varepsilon,b)\subset(a,b)$.

则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 内连续. $\therefore$ 存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，有 $f(\xi)=0$. 故命题正确.

266.（上海交通大学） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且 $f(0)=f(1)=0$. 则对任意一个实数 $l(0<l<1)$，必有实数 $x_0(0\leqslant x_0\leqslant 1)$ 使

$$f(x_0)=f(x_0+l) \quad ①$$

证 构选辅助函数，令

$$F(x)=f(x)-f(x+l).$$

$$\therefore F(0)=f(0)-f(l)=-f(l)\leqslant 0$$

$$F(1-l)=f(1-l)-f(1)=f(1-l)\geqslant 0.$$

分三种情况讨论：

(1) 当 $F(0)=0$ 时，则取 $x_0=0$，有 ① 式成立.

(2) 当 $F(1-l)=0$，则取 $x_0=1-l$，也有 ① 式成立.

(3) 当 $F(0)<0$，$F(1-l)>0$ 时，由于 $F(x)$ 在 $[0,1-l]$ 上连续，两端点函数值反号，从而存在 $x_0\in(0,1-l)$（即 $0<x_0<1-l<1$）使 $F(x_0)=0$，所以

$$0=f(x_0)-f(x_0+l) \qquad \text{即 } f(x_0)=f(x_0+l).$$

267.（华中理工大学，长春光机学院） 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明：在 (a,b) 内存在点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

证 由题设知 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续，令

$$M=\max_{x_1\leqslant x\leqslant x_n}f(x),\ m=\min_{x_1\leqslant x\leqslant x_n}f(x),$$

则有 $m\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M.$

由连续函数介值定理，必有 $\xi\in[x_1,x_n]\subset(a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

268.（华中师范大学，2000 年，西安交通大学，上海机械学院，昆明工学院，无锡轻工业学院，北方交通大学，国防科技大学） 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$. 又 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$.

证明：(1) $F'(x)\geqslant 2$；(2) $F(x)=0$在$[a,b]$内有且仅有一个实根.

证 (1) $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geqslant 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2$.

(2) $\because F'(x)\geqslant 2>0$，$\therefore F(x)$单调增加，因此$F(x)$在$[a,b]$内至多有一个实根.

又 $F(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}dt=-\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt<0$.

$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$.

$\therefore F(x)$在$[a,b]$内至少有一个实根，从而证明$F(x)$在$[a,b]$内有且仅存一个实根.

269.（四川大学） 用有限覆盖定理证明连续函数的零点定理：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$.

证 用反证法. 若$f(x)\neq 0$，$x\in(a,b)$. 由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，因此$\forall x'\in[a,b]$，都有一个$U(x',\delta_{x'})$，对$\forall x\in U(x',\delta_{x'})\cap[a,b]$，使$f(x)$恒正或恒负. 所有$U(x',\delta_{x'})$覆盖了$[a,b]$，由有限覆盖定理可知，从这组开区间簇中可选取有限个开区间同样覆盖$[a,b]$，设这有限个开区间为

$U(a,\delta_a),U(x_1,\delta_{x_1})\cdots\cdots U(x_n,\delta_{x_n})$，

并设 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n$，令

$$\delta=\min\left\{\frac{\delta_a}{2},\frac{\delta_{x_1}}{2},\cdots,\frac{\delta_{x_n}}{2}\right\}.$$

再将$[a,b]$等分为k份，使每份长小于δ，并设这些分点依次为

$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_k=b$.

由于$f(a)f(b)<0$，不失一般设$f(a)<0$，$f(b)>0$（至于$f(a)>0$，$f(b)<0$类似可证），$\because a_0,a_1\in U(a,\delta_a)\cap[a,b]$，

$\therefore f(a)<0$，$f(a_1)<0$.

又 $a_1,a_2\in U(x_i,\delta_{xi})\cap[a,b]$（某个$i$），$\therefore f(a_1)<0$，$f(a_2)<0$.

这样继续下去可证得$f(a_{k-1})<0$，$f(a_k)=f(b)<0$. 矛盾，故命题得证.

270.（厦门大学，2002 年） 设函数$f(x)$在有限区间I上有定义，满足$\forall x\in I$，存在x的某个开邻域$(x-\delta,x+\delta)$，使得

$f(x)$ 在 $(x-\delta, x+\delta) \cap I$ 上有界.

(1) 证明:当 $I=[a,b](0<b-a<+\infty)$ 时,$f(x)$ 在 I 上有界;

(2) 当 $I=(a,b)$ 时,$f(x)$ 在 I 上一定有界吗?

证 (1) $\forall x \in I$,存在 $\delta_x>0$,令 $(x-\delta_x, x+\delta_x) \cap I = I_x$,由假设 $f(x)$ 在 I_x 上有界.再令

$H=\{I_x \mid x \in [a,b]\}$,

H 为 $[a,b]$ 的一个开覆盖,由有限覆盖定理,则存在 H 中有限多个开区间 $I_{x_1}, I_{x_2}, \cdots, I_{x_m}$ 它也覆盖 $[a,b]$.且 $f(x)$ 在每个 I_{x_i} 上有界,所以

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2) 当 $I=(0,1)$,令 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $f(x)$ 满足假设,但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上无界.即命题不一定成立.

271.(北京师范大学) $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的函数,满足条件:对每一点 $x_0 \in [a,b]$,任取 $\varepsilon>0$,有 $\delta>0$,对一切 $x \in [a,b] \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \qquad ①$$

成立.

(1) 证明:$f(x)$ 有最大值;

(2) 举例说明 $f(x)$ 未必有下界.

证 (1) 仿上题取 $\varepsilon=1$,那么 $\bigcup\limits_{x \in [a,b]} (x, \delta_x)$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖,由有限覆盖定理知,存在有限开覆盖 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (x_k, \delta_{x_k})$,使

$f(x) < \max\limits_{1 \le k \le n} f(x_k) + 1$,

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在上界,从而存在上确界 M.故存在 $\{x_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$.

在 $\{x_n\}$ 中存在收敛子序列 $\{x_{n_k}\}$ 有

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$,且 $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = M$.

显然 $x_0 \in [a,b]$,下证 $f(x_0)=M$.显然 $f(x_0) \le M$.

再由 ① 式知,$\forall \varepsilon = \dfrac{1}{m}$,$\exists \{x_{n_k}\}$ 的子序列 $\{x_{n_{k_m}}\}$ 使得

$$M - \frac{1}{m} < f(x_{n_{k_m}}) < f(x_0) + \frac{1}{m} \qquad ②$$

由 ② 式及 m 的任意性有 $M \le f(x_0)$

$\therefore f(x_0) = M$,即 $f(x)$ 有最大值 M.

(2) 令 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x},0<x\leqslant 1,\\ 0,x=0.\end{cases}$

则 $f(x)$ 满足题设条件,但 $f(x)$ 无下界.

272.(山东大学) 设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的增函数,但不一定连续,如果 $f(a)\geqslant a,f(b)\leqslant b$,试证:$\exists x_0\in[a,b]$,使得 $f(x_0)=x_0$.

证 作第1,3象限的角平分线 $y=x$.

由题设知 $A(a,f(a))$ 在直线 $y=x$ 上方,$B(b,f(b))$ 在直线下方.

第272题图

取 $[a,b]$ 中点 $c_1=\dfrac{a+b}{2}$,若点 $C(c_1,f(c_1))$ 在直线 $y=x$ 上,即证.否则点 C 或在直线上方,或在直线下方,总之,存在 $[a_1,b_1]$ 使两端点在直线 $y=x$ 上、下方各一个.

这样继续下去存在区间套

$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots\cdots$

使两端点位于直线 $y=x$ 上、下方各一点.

由区间套原理 $\exists\xi\in[a_n,b_n],n=1,2\cdots\cdots$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=f(\xi)$.

但 $\begin{cases}f(a_n)\geqslant a_n\\ f(b_n)\leqslant b_n\end{cases}$ $\left(\begin{matrix}(\text{或 } f(a_n)\leqslant a_n\\ f(b_n)\geqslant b_n)\end{matrix}\right)$

$\begin{cases}\therefore\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}a_n\\ \lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}f(\xi)\geqslant\xi\\ f(\xi)\leqslant\xi\end{cases}$ $\therefore f(\xi)=\xi$.

273.(福建师范大学) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调不减,且 $f(0)>0,f(1)<1$.证明:$\exists x_0\in(0,1)$,使得 $f(x_0)=x_0^2$.

证 仿上题证法,作曲线 $y=x^2$.类似 $A(0,1)$ 在曲线 $y=x^2$ 的上方,$B(0,1)$ 在曲线 $y=x^2$ 的下方.再利用区间套原理仿上题可证.

274.(华中师范大学,2000年) 用闭区间套定理证明连续函数有界性定理,即若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则存在 $M>0$,对一切 $x\in[a,b]$,$|f(x)|\leqslant M$.

证　用反证法. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 取 $[a,b]$ 的中点 $\frac{a+b}{2}$, 则 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2},b]$ 中至少有一个区间使 $f(x)$ 无界, 记此区间为 $[a_1,b_1]$. (若两个都使 $f(x)$ 无界, 则任取一个即可).

这样继续下去可得一个区间套

$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$

且存在唯一一点 ξ, 使

$\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

而且 $f(x)$ 在 $[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$ 无界, 但由 $f(x)$ 在点 ξ 的连续性知对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$ 时有

$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$

$f(\xi)-\varepsilon<f(x)<f(\xi)+\varepsilon$

$\therefore |f(x)|<M_0$　①

取 n 充分大可使 $[a_n,b_n]\subset(\xi-\delta,\xi+\delta)$, ①式与 $f(x)$ 在 $[a_n,b_n]$ 上无界矛盾.

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

275.(中国科学院,2002年,西北电讯工程学院)　设 $f(x)$ 是二次连续可微函数, $f(0)=0$, 定义函数

$$g(x)=\begin{cases}f'(0), & 当\ x=0,\\ \dfrac{f(x)}{x}, & 当\ x\neq 0\end{cases}$$

证明: $g(x)$ 连续可微.

证: (1) $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)=g(0)$.

$\therefore g(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 再当 $x\neq0$ 时 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 是连续的, $\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(2) 在 $x\neq0$ 处, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, 显然可微. 下证 $g(x)$ 在 $x=0$ 处可微.

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}.$$

276.(云南大学,吉林工业大学)　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续

的导数，且 $f(0)=0$，令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0.\end{cases}$$

证明：(1) $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

(2) $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微；

(3) $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

证　(1)，(2) 在上题已证.

(3) 由上题知

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{f''(0)}{2}, & x=0.\end{cases} \qquad ①$$

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-xf''(x)-f'(x)}{2x}$$

$$=\frac{f''(0)}{2}=g'(0).$$

$\therefore g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 由 ① 知 $g'(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 也连续.

$\therefore g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

277.（华东师范大学，1999 年）　证明：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上处处连续且为一一映射，则 $f(x)$ 在 I 上必为严格单调.

证　用反证法.(1) 若存在 $x_1,x_2,x_3\in I$，且 $x_1<x_2<x_3$ 使得

$f(x_1)<f(x_2)>f(x_3)$

这时考虑 $f(x_1)$ 和 $f(x_3)$，

(ⅰ) 若 $f(x_1)<f(x_3)(<f(x_2))$. 由于 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，由介值定理，必存在 $x_4\in[x_1,x_2]$，使 $f(x_4)=f(x_3)$，这与一一映射矛盾.

(ⅱ) 若 $f(x_3)<f(x_1)(<f(x_2))$. 这时考虑 $[x_2,x_3]$，必存在 $x_5\in[x_2,x_3]$ 使 $f(x_5)=f(x_1)$，也得到矛盾.

(2) 若存在 $x_1,x_2,x_3\in I$，且 $x_1<x_2<x_3$，

$f(x_1)>f(x_2)<f(x_3)$

由介值定理存在 $x_4\in[x_1,x_2]$，$x_5\in[x_2,x_3]$，使得 $f(x_4)=f(x_5)$

这与一一映射也矛盾.

综上可知 $f(x)$ 在 I 上必为严格单调.

278.（北京师范大学）　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 求证：存在一个函数 φ 在 $(0,+\infty)$ 上具有下述性质：

(1)φ 在$(0,+\infty)$上单调上升,且当 $t \geq (b-a)$ 时,$\varphi(t)=$ 常数;
(2) 对任意 $x',x'' \in [a,b]$ 有 $|f(x')-f(x'')| \leq \varphi(|x'-x''|)$;
(3) $\lim\limits_{t\to 0+} \varphi(t)=0$.

证　令 M,m 分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值.再令

$$\varphi(t)=\begin{cases} M-m, t\geq b-a, \\ \sup\limits_{|x_1-x_2|\leq t}\{|f(x_1)-f(x_2)|\}, 0<t\leq b-a. \end{cases} \quad ①$$

(1) 由 ① 知,当 $t\geq b-a$ 时,$\varphi(t)=M-m$(常数).
$\forall t_1,t_2 \in (0,b-a)$,且 $t_1<t_2$ 时

$$\because \varphi(t_1)=\sup_{|x_1-x_2|\leq t_1}\{|f(x_1)-f(x_2)|\}$$
$$\leq \sup_{|x_1-x_2|\leq t_2}\{|f(x_1)-f(x_2)|\}=\varphi(t_2),$$

即　$\varphi(t_1)\leq\varphi(t_2)\leq M-m$.
$\therefore \varphi$ 在$(0,+\infty)$上单调上升.
(2) 当 $x',x''\in[a,b]$ 时,$|x_1-x_2|\leq b-a$

$$\therefore \varphi(|x'-x''|)=\sup_{|x_1-x_2|\leq|x'-x''|}\{|f(x_1)-f(x_2)|\}$$
$$\geq |f(x')-f(x'')|.$$

(3) $\because f(x)$ 是连续函数,所以

$$\lim_{t\to 0+}\varphi(t)=\lim_{t\to 0+}\sup_{|x_1-x_2|\leq t}\{|f(x_1)-f(x_2)|\}=0.$$

279.　证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in R \quad ①$$

则 $f(x)=kx$(其中 k 为常数).

证　(1) 先用数学归纳法可证

$$f(mx)=mf(x), m\in N. \quad ②$$

(2) 再证 $f(\frac{n}{m}x)=\frac{n}{m}f(x), \forall n, \in Z, m\in N$ 　③

在 ② 式中,用$\frac{x}{m}$ 换 x 得,

$$f(x)=mf\left(\frac{x}{m}\right)$$
$$\therefore f\left(\frac{x}{m}\right)=\frac{1}{m}f(x).$$

当 $n,m\in N$ 时

$$f\left(\frac{n}{m}x\right)=f\left(\frac{x}{m}+\cdots+\frac{x}{m}\right)(n\text{ 个})$$

$$= nf\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{n}{m}f(x). \qquad ④$$

又　$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0), \therefore f(0) = 0.$ ⑤

$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$

$\therefore f(-x) = -f(x).$ ⑥

当 $n \in Z, m \in N$,且 $n < 0$ 时.

$$f\left(\frac{n}{m}x\right) = f\left(-\frac{|n|}{m}x\right) = -f\left(\frac{|n|}{m}x\right) = -\frac{|n|}{m}f(x) = \frac{n}{m}f(x).$$

综上得证 ③ 式.

(3) 再证　$f(ax) = af(x)$, a 是无理数 ⑦

存在有理数列 $\{a_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

$f(ax) - a_n f(x) = f(ax) - f(a_n x) = f[(a - a_n)x].$ ⑧

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f[(a - a_n)x] = f(\lim\limits_{n\to 0}(a - a_n)x) = f(0) = 0.$ ⑨

由 ⑧,⑨ 式

$f(ax) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n f(x) = af(x).$

(4) $\forall x \in R$

$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = kx.$

其中 $k = f(1)$.

280. 证明:方程 $x^3 - \sin x = \cos x$ 在 $[-2,2]$ 内至少有一根.

证　令 $f(x) = x^3 - \sin x - \cos x$,则由 $f(2) > 0, f(-2) < 0$,可知 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 内至少有一根.

281. (东北师范大学)　证明:若 $f(x)$ 在 R 上连续,对任意 $x, y \in R$,有

$$f(x + y) = f(x)f(y). \qquad ①$$

则 $f(x)$ 在 R 上可微.

证　(1) 若 $f(x) \equiv 0$,则 $f(x)$ 在 R 上可微.

(2) 若 $f(x) \equiv 1$,则 $f(x)$ 在 R 上可微.

(3) 若 $f(x) \equiv c$,且 $c \neq 0$ 且 $c \neq 1$. 则

$c = f(0+0) = c^2, \therefore c = 0$ 或 $c = 1$. 矛盾.

(4) 若 $f(x) \neq c$. 则存在 $a \in R$,使 $f(a) \neq 0$. $\forall x \in R$

$f(x) \cdot f(a - x) = f[x + (a - x)] = f(a) \neq 0, \therefore f(x) \neq 0.$

$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) > 0.$ 特别令 $a = f(1)$ 则 $a > 0$.

再令　$F(x) = \log_a f(x)$,则 $\forall x, y \in R$,有

$$F(x+y)=\log_a f(x+y)=\log_a f(x)\cdot f(y)$$
$$=\log_a f(x)+\log_a f(y)=F(x)+F(y).$$

由上题知

$F(x)=kx$,其中 $k=F(1)$.

但 $F(1)=\log_a f(1)=\log_a a=1$.

$x=F(x)=\log_a f(x)$,此即 $f(x)=a^x$.从而 $f(x)$ 在 R 上可微.

282.(南开大学) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$f(a)<f(b)$.又设对一切 $x\in(a,b)$,$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x+t)-f(x-t)}{t}$ 存在,用 $g(x)$ 表示这个极限值,试证:存在 $c\in(a,b)$,使 $g(c)\geqslant0$.

证 用反证法.若

$g(x)<0,\forall x\in(a,b)$.

$$g(x)=\lim_{t\to0}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}+\lim_{t\to0}\frac{f[x+(-t)]-f(x)}{-t}$$
$$=2f'(x)<0$$

$\therefore f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$ 在$[a,b]$上单调递减,特别有 $f(a)\geqslant f(b)$.这与假设矛盾.$\therefore$ 存在 $c\in(a,b)$ 使 $g(c)\geqslant0$.

283.(中国地质大学,2002 年) 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,证明:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 te^{-t^2x^2}f(x)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0). \quad ①$$

$$\left(\text{已知}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right).$$

证 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.令 $tx=u$,则$\displaystyle\int_0^1 te^{-t^2x^2}f(x)\,dx=\int_0^t e^{-u^2}f\left(\frac{u}{x}\right)du$.

从而证明 ① 式,只要证明:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-u^2}\left[f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right]du=0. \quad ②$$

由于 $f(x)$ 连续,$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$\left|\dfrac{u}{t}\right|<\delta$ 时

$$\left|f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right|<\frac{2}{\sqrt{\pi}}\varepsilon. \quad ③$$

$$0\leqslant\left|\int_0^t e^{-u^2}\left[f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right]du\right|\leqslant\int_0^t e^{-u^2}\left|f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right|du$$

$\leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\varepsilon\int_0^t e^{-u^2}du \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\varepsilon \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \varepsilon.$

由于 ε 可以任意小，从而得证 ② 式成立，此即有 ① 成立.

284.（华东师范大学，1998 年） 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数，其周期可小于任意小的正数. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，则 $f(x) \equiv$ 常数.

证 设 M 是 f 所有正周期阶所组成的集合，由假设知

$inf\{f$ 的正周期$\} = 0$.

由下确界定义，$\exists\{T_n\} \to 0$，其中 $T_n \in M$.

$\forall x \in R, \exists\{x_n\} \longrightarrow x$，其中 x_n 是 T_m 的整数倍.

$\therefore f(x) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n<\infty} f(0 + x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(0) = f(0).$

$\therefore f(x) \equiv$ 常数 $(f(0))$.

285.（南京大学） 证明：（非常数）连续周期函数，必有最小正周期.

证 用反证法，若 $f(x)$ 无最小正周期. 由上题可证 $f(x) \equiv$ 常数与题设矛盾.

286.（北京师范大学，1992 年） 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中任意一点有有穷导数，且

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A.$

证明：存在某点 $c \in (0, +\infty)$，使得 $f'(c) = 0$.

证 由 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = A$. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $0 < x < \delta$ 时

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \qquad ①$$

再由 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A, \exists M > 0$，使当 $x > M$ 时

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \qquad ②$$

从而 $\exists x_1 \in (0, \delta)$ 和 $x_2 \in (M, +\infty)$ 有

$$f(x_1) = f(x_2) = A.$$

再由罗尔定理 $\exists c \in (x_1, x_2)$，使 $f'(c) = 0$.

287. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 连续，且 $f(a+0)$，$f(b-0)$ 存在，则 $f(x)$ 可以取到 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 之间的一切值，但可能取不到 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 的值.

证 令 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b), \\ f(a+0), & x = a, \\ f(b-0), & x = b. \end{cases}$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，由介值定理，$\therefore F(x)$ 可取 $F(a)$ 与 $F(b)$ 之间的一切值. 而

$F(a) = f(a+0), F(b) = f(b-0)$.

从而得证 $f(x)$ 可取到 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 之间的一切值.

现令 $f(x) = x+1, x \in (0,1)$.

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1, \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 2$.

但 $\forall x \in (0,1)$,都不存在 $\xi \in (0,1), \eta \in (0,1)$ 使

$f(\xi) = 1$ 和 $f(\eta) = 2$.

288. 判断下列命题是否正确,若正确给出证明,否则请举出反例.

"设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内有界,且可取 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续".

答　此命题不正确. 比如

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x-a}, & x \in (a,b], \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

显然

$|f(x)| \leqslant 1$, $\therefore f(x)$ 有界. 且存在 $n > N$ 有

$$a < a + \frac{1}{\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi} < a + \frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} < b$$

而 $f\left(a + \dfrac{1}{\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi}\right) = -1$,

$f\left(a + \dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right) = 1$.

$\because f(x)$ 在闭区间 $\left[a + \dfrac{1}{\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi}, a + \dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right]$ 上连续, 因此 $f(x)$ 可取 $[-1,1]$ 内一切值. 但

$f(a) = 0, f(b) = \sin\dfrac{1}{b-a}$, $\therefore f(b) \in [-1,1]$,

因此 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间一切值的集合 $\subset [-1,1]$. 从而得证 $f(x)$ 可取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值.

$\because \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} \sin\dfrac{1}{x-a}$ 不存在,从而 $f(x)$ 在 $x = a$ 不是右连续, 即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续.

289.(北京师范大学,1997 年)　设

$f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n, (n = 2,3,\cdots)$.

证明:(1) 方程 $f_n(x) = 1$　在 $[0,+\infty)$ 上有唯一的实根 x_n;

(2) 数列 $\{x_n\}$ 有极限,并求出 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

证 (1) 令 $F(x) = f_n(x) - 1$,则

$$F(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1, x \in [0, +\infty) \qquad ①$$

$\because$ 当 $x > 1$ 时,

$F(x) = x^n + \cdots + x^2 + (x - 1) > 0$,

因此方程 $f_n(x) = 1$,在 $(1, +\infty)$ 内无实根.从而只研究

$$F(x) = x^n + \cdots + x^2 + x - 1, x \in [0,1]. \qquad ②$$

$\because F(0) = -1 < 0, F(1) \geqslant 0$,连续.从而由零点定理,$F(x)$ 在 $[0,1]$ 内至少有一个实根.又

$F'(x) = nx^{n-1} + \cdots + 2x + 1 > 0, \forall x \in [0,1]$.

$\therefore F(x)$ 在 $[0,1]$ 内单调递增.从而即证 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 内有且仅有一个实根.这也证明了方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上有唯一实根.

(2) 当 $n = 1$ 时,$f_1(x) = x$,$\therefore$ 方程 $f_1(x) = 1$,就是 $x - 1 = 0$

$\therefore x_1 = 1$,

方程 $f_2(x) = 1$,就是 $x^2 + x - 1 = 0$. $\therefore x_2 \in (0,1)$

一般方程 $f_n(x) = 1$ 的根 $x_n \in (0,1), n \geqslant 2$.

下证 x_n 单调递减,用反证法,若 $\exists$ 某个自然数 n,使 $x_{n-1} < x_n$,则 $1 = f_{n-1}(x_{n-1}) = x_{n-1}^{n-1} + x_{n-1}^{n-2} + \cdots + x_{n-1} < x_n^{n-1} + x_{n-1}^{n-2} + \cdots + x_n < x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = f(x_n) = 1$.

矛盾.$\therefore \{x_n\}$ 单调递减.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$(存在)

$\because 1 = x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = \dfrac{x_n(1 - x_n^n)}{1 - x_n}$.

两边取极限,并注意 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = 0$.

$\therefore 1 = \dfrac{l}{1 - l}$,解得 $l = \dfrac{1}{2}$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

290.(北京航空航天大学,西北师范学院) 设 $f(x)$ 映 $[a,b]$ 为自己,且

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, \forall x, y \in [a,b]. \qquad ①$$

任取 $x_1 \in [a,b]$,令

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)], n = 1,2\cdots \qquad ②$$

求证:数列有极限 x_0,x_0 满足 $f(x_0) = x_0$.

证 $\because x_1 \in [a,b]$，由假设知 $f(x_1) \in [a,b]$. 下面分两种情况讨论.

(2) 若 $x_1 \geqslant f(x_1)$. 可证数列 $\{x_n\}$ 单调下降，即用数学归纳法证明

$$x_{n+1} \leqslant x_n \qquad n = 1,2,\cdots \tag{③}$$

当 $n = 1$ 时，由于

$$x_2 = \frac{1}{2}[x_1 + f(x_1)]$$

$$\therefore x_2 - x_1 = \frac{1}{2}[f(x_1) - x_1] \leqslant 0.$$

即当 $n = 1$ 时，③ 式成立

归纳假设结论对 $n \leqslant k$ 成立，即 $x_{k+1} \leqslant x_k$. ④

再当 $n = k+1$ 时. 由 ① 和 ④ 有

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leqslant |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant |x_{k+1} - x_k| = x_k - x_{k+1}$$

$$\therefore x_{k+1} + f(x_{k+1}) \leqslant x_k + f(x_k)$$

$$\therefore \frac{1}{2}[x_{k+1} + f(x_{k+1})] \leqslant \frac{1}{2}[x_k + f(x_k)]$$

此即 $x_{k+2} \leqslant x_{k+1}$，所以 ③ 式对 $n = k+1$ 也成立.

由 ① 知 $\{x_n\}$ 单调下降. 又

$$a \leqslant x_n \leqslant b.\ n \in N.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = x_0(\text{存在})，且\ a \leqslant x_0 \leqslant b. \tag{⑤}$$

$$\because x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)]. \tag{⑥}$$

又由 ① 及柯西判别准则知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续. 对 ⑥ 式两边取极限有

$$x_0 = \frac{1}{2}[x_0 + f(x_0)]$$

$$\therefore x_0 = f(x_0).$$

(2) 若 $x_1 < f(x_1)$，类似可证 $\{x_n\}$ 单调上升且 $x_n \leqslant b$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$(存在). 仿上也可证 $x_0 = f(x_0)$.

291.（东北师范大学）若 $f(x)$ 在 R 上可微，且

$$|f'(x)| \leqslant r < 1.$$

则存在一点 a，使 $f(a) = a$.

证 取 $x_1 \in R$，若 $f(x_1) = x_1$ 则证毕.

若 $x_1 \neq f(x_2)$. 令

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)], n = 1,2,\cdots \tag{①}$$

$$\therefore x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)] - \frac{1}{2}[x_{n-1} + f(x_{n-1})]$$

$$|x_{n+1}-x_n|\leq\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|+\frac{1}{2}|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$
$$=\frac{1}{2}\left|x_n-x_{n-1}\right|+\frac{1}{2}\left|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})\right|$$
$$\leq\frac{1}{2}(1+r)\left|x_n-x_{n-1}\right|=b\left|x_n-x_{n-1}\right|. \qquad ②$$

其中 ξ 在 x_n 与 x_{n-1} 之间，$b=\dfrac{1+r}{2}<1$.

由 ② 知 $\{x_n\}$ 为压缩数列，故数列 $\{x_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 由 ① 两边取极限，并注意 $f(x)$ 连续，所以

$$a=\frac{1}{2}(a+f(a)),\ \therefore a=f(a).$$

292.（华中师范大学） 若 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为满足

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}+\frac{a_n}{n+1}=0$$

的实数. 证明：$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $[0,1]$ 内至少有一实根.

证 令 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}+\frac{a_n}{n+1}=0. \qquad ①$$

由 ① 式以及定积分含义，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 内不可能恒为正或恒为负. 所以

(1) $f(x)\equiv0,x\in[0,1]$，从而结论成立.

(2) 存在 $x_1,x_2\in[0,1]$ 使 $f(x_1)f(x_2)<0$. 从而由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内连续，因此存在 ξ 在 x_1,x_2 之间（$\therefore\xi\in(0,1)$）使

$f(\xi)=0$,

此即方程 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 内至少有一个实根.

293.（华中师范大学） 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定义的连续函数. 如果

$$\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x=0,$$

则 $f(x)\equiv0,(a\leq x\leq b)$.

证 用反证法，若 $f(x)\not\equiv0,x\in[a,b]$. 则存在 $x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)\neq0$（即 $f(x_0)>0$ 或 $f(x_0)<0$）. 由连续函数保号性，则存在 $\delta>0$，使当 $x_0-\delta\leq x\leq x_0+\delta$ 时，有 $f(x)\neq0$. $\therefore[f(x)]^2>0$ 从而

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[f(x)]^2\mathrm{d}x>0,$$

$$\therefore\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x>0.$$

这与假设矛盾. $\therefore f(x)\equiv0,x\in[a,b]$.

294.(西北大学) (1) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续,且

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$,

证明:$f(x)$ 在 (a,b) 上有最大值;

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可微,且 $f(a < 0, f(b) > 0$,又有一点 $c \in (a,b)$, $f(c) > 0$. 证明:存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

证 (1) ∵ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$,则对 $\forall N > 0$

存在 $\delta > 0$,使得当 $x \in (a, a+\delta)$ 或 $x \in (b-\delta, b)$ 时都有

$$f(x) < -N$$

又 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上连续,故有最大值 M,即存在 $x_0 \in [a+\delta, b-\delta] \subset (a,b)$ 使 $f(x_0) = M$,故 $f(x)$ 在 (a,b) 上有最大值 M.

(2) 作辅助函数 $g(x) = f(x) \cdot e^x$,由题设有

$g(a) < 0, g(b) < 0, g(c) > 0$.

对 $g(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 内应用零点定理,故存在

$x_1 \in (a,c), x_2 \in (c,b)$ 使

$g(x_1) = g(x_2) = 0$.

再对 $g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 内应用罗尔定理,故存在 $\xi \in (x_1,x_2) \subset (a,b)$,使 $g'(\xi) = 0$,即 $g'(\xi) = e^{\xi}[f'(\xi) + f(\xi)] = 0$,

$\therefore f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

295.(复旦大学) 设连续函数 $y = f(x), x \in [a,b]$,其值域 $R_f \subseteq [a,b]$,则一定存在 $x_0 \in [a,b]$,使 $f(x_0) = x_0$.

证 $\because R_f \subseteq [a,b]$,

$\therefore a \leqslant f(x) \leqslant b, x \in [a,b]$. ①

用反证法.若 $f(x) \neq x \quad \forall x \in [a,b]$,则分四种可情况讨论.

(1) 若 $f(x) > x, x \in [a,b]$,那么

$f(b) > b$.

这与 ① 式矛盾.

(2) 若 $f(x) < x, x \in [a,b]$,那么

$f(a) < a$,

也与 ① 式矛盾.

(3) 若存在 $x_1 \in [a,b], x_2 \in [a,b]$ 使

$f(x_1) < x_1, f(x_2) > x_2$. ②

则令 $F(x) = f(x) - x$,由 ② 知

$F(x_1) < 0, F(x_2) > 0$,

则存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset [a,b]$,使 $F(\xi) = 0$,即 $f(\xi) = \xi$.

这与 $f(x) \neq x, x \in [a,b]$ 假设矛盾.

(4) 若存在 $x_1 \in [a,b], x_2 \in [a,b]$ 使

$f(x_1) > x_1, f(x_2) < x_2$

类似可得矛盾.

从而得证存在 $x_0 \in [a,b]$,使 $f(x_0) = x_0$.

296.(武汉大学,1996 年) 设当 $x \in [a,b], f(x) \geqslant 0, f(x) \neq 0$,且 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,证明:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证 $\because f(x) \geqslant 0, f(x) \neq 0, x \in [a,b]$,因此存在 $x_0 \in [a,b]$,使 $f(x_0) > 0$. 由 $f(x)$ 连续及保号性,因此存在 $\delta > 0$,使

$\forall c, d \in U(x_0, \delta)$,且 $c < d, f(x) > \frac{1}{2}f(x_0), x \in U(x_0,\delta) \cap [a,b]$,

$\therefore \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot 2\delta > 0$,

其中 $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. 所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_c^d f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_c^d \frac{1}{2}f(x_0)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x_0)(d-c) > 0.$$

297.(中国科技大学) 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$可微,$f(0) = 0, f(1) = 1$, $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为 n 个正数. 证明:在区间$[0,1]$内存在一组互不相等的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} k_i. \quad ①$$

证 令 $A = \sum_{i=1}^{n} k_i$,则要证的 ① 式可改写为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{A f(x_i)} = 1. \quad ②$$

令 $a_i = \frac{k_i}{A}, (i = 1, 2, \cdots n)$,则 ② 式可改写为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{f(x_i)} = 1, \quad ③$$

其中 $a_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n)$,且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1. \quad ④$$

$0 < a_i < 1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$ ⑤

又 $\because f(0) = 0, f(1) = 1, f(x)$ 在$[0,1]$上连续,由 $0 < a_1 < 1$

故存在 $b_1 \in (0,1)$ 使

$f(b_1) = a_1$.

又 $0 < a_1 < a_1 + a_2 < 1$,再由介值定理,又存在 $b_2 \in (0,1)$

使 $f(b_2) = a_1 + a_2$.这样继续下去,可得

$0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-1} < b_n = 1$

使 $f(b_i) = a_1 + \cdots + a_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$ ⑥

令 $b_0 = 0$,对 $f(x)$ 在$[b_{i-1}, b_i](i = 1,2,\cdots,n)$上应用拉格朗日中值定理,则存在 $x_i \in (b_{i-1}, b_i)$,使得

$$f'(x_i) = \frac{f(b_i) - f(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} = \frac{a_i}{b_i - b_{i-1}},$$

$$\therefore \frac{a_i}{f'(x_i)} = b_i - b_{i-1}, (i = 1,2,\cdots,n) \qquad ⑦$$

把这 n 个等式统统加起来得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0 = 1.$$

此即 ③ 式成立,从而 ① 式成立.

298.(北京大学,2002 年) 设 $f(x)$ 在$[a, a + 2\alpha]$上连续,证明:存在 $x \in [a, a + \alpha]$,使得

$$f(x + \alpha) - f(x) = \frac{1}{2}[f(a + 2\alpha) - f(a)]. \qquad ①$$

证 令

$$g(y) = f(y + \alpha) - f(y) - \frac{1}{2}[f(a + 2\alpha) - f(a)],$$

$$则\ g(a) = f(a + \alpha) - \frac{1}{2}[f(a + 2\alpha) + f(a)], \qquad ②$$

$$g(a + \alpha) = \frac{1}{2}[f(a + 2\alpha) + f(a)] - f(a + \alpha), \qquad ③$$

$\therefore g(a) \cdot g(a + \alpha) \leqslant 0$.

(1) 若 $g(a) = 0$,则

$$f(a + \alpha) - f(a) = \frac{1}{2}[f(a + 2\alpha) - f(a)]$$

则 ① 式成立.

(2) 若 $g(a + \alpha) = 0$,则

$$f[(a + \alpha) + \alpha] - f(a + \alpha) = \frac{1}{2}[f(a + 2\alpha) - f(a)].$$

① 式也成立.

(3) 若 $g(a)\cdot g(a+\alpha)<0$,则由 $g(x)$ 连续及连续函数的零值定理,也存在 $x\in(a,a+\alpha)$ 使 $g(x)=0$,从而 ① 式仍然成立.

299.(哈尔滨工业大学,1999 年) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$,且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处达到最小值,若 $f(a)<a$,证明:

$F(x)=f(f(x))$ 至少在两点达到最小值.

证 由题设知 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的值域为 $[f(a),+\infty)$. $\because a\in[f(a),+\infty)$. 由于 $f(x)$ 连续,故存在 $x_1\in(a,+\infty)$ 使

$f(x_1)=a$.

再 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的值域也是 $[f(a),+\infty)$, $\because a\in[f(a),+\infty)$ 故存在 $x_2\in(-\infty,a)$,使 $f(x_2)=a$.

由上知 $x_1\neq x_2$,但

$F(x_1)=f[f(x_1)]=f(a),\quad F(x_2)=f[f(x_2)]=f(a),$

即证 $F(x)$ 至少在两点达到最小值.

第四章　导数、中值定理及导数的应用

§1　导数与微分

【考点综述】

一、综述

1. 导数

(1) 定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 a 某一邻域有定义，若极限

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在，则称 $f(x)$ 在点 a 可导，此极限值为 $f(x)$ 在点 a 的导数，记为 $f'(a)$.

(2) $f'(a)$ 还有其它几种表示：

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x},$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

(3) 左、右导数　设 $f(x)$ 在 a 的某个右邻域(或左邻域)有定义，若右(或左)极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$(或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$) 存在. 则称此极限值为 $f(x)$ 在点 a 的右(或左)导数，记为 $f'_+(a)$(或 $f'_-(a)$).

(4) 性质(ⅰ) 若 $f(x)$ 在点 a 可导，则 $f(x)$ 在点 a 连续，反之不然.

(ⅱ) $f'(a)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_+(a)$ 与 $f'_-(a)$ 都存在，且 $f'_+(a)=f'_-(a)$.

(5) 几何意义　在曲线 $y=f(x)$ 上，$f'(a)$ 是此曲线在点 $(a,f(a))$ 处切线的斜率.

2. 求导法则

(1) 四则运算公式　若 $g(x),h(x)$ 在点 x 可导，令

$f(x)=g(x)\pm h(x),m(x)=g(x)h(x),s(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}(h(x)\neq 0)$，则

$f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$,

$m'(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$,

$s'(x) = \dfrac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$.

特别$(c \cdot f(x))' = cf'(x)$.

(2) 反函数公式　设 $y = f(x)$ 为 $x = \varphi(y)$ 的反函数,若 $x = \varphi(y)$ 在点 b 的某一邻域内连续,严格单调且 $\varphi'(b) \neq 0$. 则 $f(x)$ 在点 $a(a = \varphi(b))$ 可导,且 $f'(a) = \dfrac{1}{\varphi'(b)}$. 也可记为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

(3) 复合函数求导公式　若 $u = g(x)$ 在 a 可导,$y = f(u)$ 在 $b = g(a)$ 可导,则复合函数 $f[g(x)]$ 在 a 可导,且

$\{f[g(x)]\}'_{x=a} = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

简记为:$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

3. 微分　(1) 定义　若函数 $y = f(x)$ 在 a 的增量Δy 可以表示为Δx 的线性函数与较 Δx 高阶的无穷小量之和,即

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$

则称 $f(x)$ 在点 a 可微,并称 $A\Delta x$ 为$f(x)$ 在点 a 的微分. 记为 $\mathrm{d}y\mid_{x=a}$.

(2) 可导与可微的关系　函数 $f(x)$ 在点 a 可微$\Leftrightarrow f'(a)$ 存在,且这时

$$\mathrm{d}y\mid_{x=a} = f'(a)\mathrm{d}x$$

一般在 x 的微分有 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$.

(3) 近似计算公式 $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$.

4. 参量方程的求导公式　设$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$　$(a \leqslant t \leqslant b)$

则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$.

5. 高阶导数　(1) 定义　$y = f(x)$　如果$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$ 存在,则称 $f(x)$ 二阶可导,并称此极限值为 $f(x)$ 的二阶导数,记为 $f''(a)$.

类似可定义 n 阶导数$f^{(n)}(a)$,即 $f^{(n)}(a) = [f^{(n-1)}(x)]'_{x=a}$.

二阶以及二阶以上的导数统称为高阶导数,二阶导数还可记为$\dfrac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(2) 若$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$,则

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\dfrac{d}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

(3) 二阶微分　设 $y = f(x)$　若 $f(x)$ 二阶可导,则二阶微分为 $d^2y =$

$f''(x)\mathrm{d}x^2$

一般 $d^ny = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$ 称为 n 阶微分.

二、解题方法

1. 考点 1　求导数

解题方法:(1) 定义法(见下面第 314 题);(2) 用求导法则(见下面第 304 题);(3) 用左、右导数法(见下面第 300 题);(4) 用罗比塔法则(见下面第 313 题);(5) 用参数方程求导(见下面第 340 题);(6) 用隐函数求导(见下面第 301 题);(7) 利用级数(见下面第 331 题);(8) 取对数求导(见下面第 307 题).

2. 考点 2　导数的几何意义

解题方法:求导数

【经典题解】

300.(武汉大学,2003 年)　设 $F(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{|t|}\ln|t|\,\mathrm{d}t$,求 $F'(0)$.

解　$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{-1}^{x}\sqrt{|t|}\ln|t|\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{0}\sqrt{|t|}\ln|t|\,\mathrm{d}t}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{0}^{x}\sqrt{|t|}\ln|t|\,\mathrm{d}t}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} = 0.$$

类似　$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\int_{x}^{0}\sqrt{-t}\ln(-t)\mathrm{d}t}{x}$$

$$= -\lim_{x\to 0^-}\sqrt{-x}\ln(-x) = 0.$$

$\therefore F'(0) = 0.$

301.(浙江大学,2001 年)　设 $y = y(x)$ 的可微函数,求 $y'(0)$,其中

$$y = -ye^x + 2e^y\sin x - 7x \qquad ①$$

解　将已知等式两边对 x 求导得

$$y' = -y'e^x - ye^x + 2e^y\cdot y'\sin x + 2e^y\cos x - 7. \qquad ②$$

将 $x = 0$ 代入 ① 式可解得 $y(0) = 0$,再将 $x = 0$ 代入 ② 得

$y'(0) = -y'(0) + 2 - 7$，$\therefore y'(0) = -\dfrac{5}{2}$.

302.（中国地质大学，2002 年）

设 $f''(u)$ 存在，$y = f(x+y)$，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解　由 $y = f(x+y)$，令 $u = x + y$. 则

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)(1 + \frac{dy}{dx}). \tag{①}$$

即　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(u)}{1 - f'(u)}$.

由 ①，两边再对 x 求导，有

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(u)(1 + \frac{dy}{dx})^2 + f'(u) \cdot \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{②}$$

由 ② 解得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f''(u)(1 + \dfrac{f'(u)}{1 - f'(u)})^2}{1 - f'(u)} = \frac{f''(u)}{(1 - f'(u))^3}.$$

303.（北京大学，2002 年）　设 $f(x) = x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$，求 $f'(x)$.

解　$f'(x) = \sqrt{1 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\sqrt{1 - x^2}$.

304.（中国人民大学，2001 年）　设

$$f(x) = \sqrt{\frac{(1+x)\sqrt{x}}{e^{x-1}}} + \arcsin\frac{1 - x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

求 $f'(1)$.

解　令 $g(x) = \sqrt{\dfrac{(1+x)\sqrt{x}}{e^{x-1}}}$，$h(x) = \arcsin\dfrac{1 - x}{\sqrt{1 + x^2}}$，则

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{e^{x-1}}{(1+x)\sqrt{x}}} \cdot \frac{(\sqrt{x} + \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}})e^{x-1} - e^{x-1}(1+x)\sqrt{x}}{e^{2x-2}}$$

$\therefore g'(1) = 0$.

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{(-1)\sqrt{1+x^2} - \dfrac{2x(1-x)}{2\sqrt{1+x^2}}}{1 + x^2}$$

$\therefore h'(1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because f'(1)=g'(1)+h'(1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

305.(湖北大学,2001 年) 设 $f(x)$ 为可导函数,证明:若 $x=1$ 时,有

$$\frac{d}{dx}f(x^2)=\frac{d}{dx}f^2(x), \quad ①$$

则必有 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

证 $\because \dfrac{d}{dx}f(x^2)=2x\cdot f'(x^2),$

$\dfrac{d}{dx}f(x^2)=2f(x)\cdot f'(x).$

由 ① 式有

$$xf'(x^2)=f(x)f'(x). \quad ②$$

将 $x=1$ 代入 ② 式可得

$f'(1)[1-f(1)]=0$

$\therefore f'(1)=0$ 或 $f(1)=1.$

306.(北京科技大学,1998 年) 设 $x>0, f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\sin ux}{u}du$,求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\left(\frac{\sin ux}{u}\right)'_x du+\frac{\sin x^3}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin x^2}{x}$

$=\displaystyle\int_x^{x^2}\cos ux\,du+\frac{2\sin x^3-\sin x^2}{x}$

$=\dfrac{\sin x^3}{x}-\dfrac{\sin x^2}{x}+\dfrac{2\sin x^3-\sin x^2}{x}$

$=\dfrac{1}{x}(3\sin x^3-2\sin x^2).$

307.(复旦大学,1999 年) 设 $y=x^{\sin(\sin x^x)}$,求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 令 $z=x^x$,则

$\therefore z'=(x^x)'=x^x(1+\ln x). \quad ①$

由 $y=x^{\sin(\sin x^x)}$, $\therefore \ln y=\sin(\sin x^x)\ln x.$

$\dfrac{1}{y}y'=\cos(\sin x^x)\cdot\cos x^x[x^x(1+\ln x)]\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}\sin(\sin x^x).$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=x^{\sin(\sin x^x)}\left\{\cos(\sin x^x)\cdot\cos x^x[x^x(\ln x+\ln^2 x)]+\dfrac{1}{x}\sin(\sin x^x)]\right\}.$

308.(复旦大学,1998 年) 已知 $y=\tan\cos x^x$,求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\sec^2(\cos x^x)\cdot(-\sin x^x)\cdot x^x(1+\ln x)$

$$= -\sin x^x \cdot \sec^2(\cos x^x) \cdot x^x(1+\ln x).$$

309.(四川联合大学,1999年)　函数　$y = e^{-|x|}$,在 $x = 0$ 处是否连续,是否可导,是否有极值,为什么?

解　令　$f(x) = e^{-|x|}$,则

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 1\ , & x = 0, \\ e^{x}, & x < 0. \end{cases} \qquad ①$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{-|x|} = 1 = f(0).$

所以　$y = e^{-|x|}$ 在 $x = 0$ 处连续.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^x}{xe^x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^x}{e^x + xe^x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{1+x} = -1.$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} e^x = 1.$$

$\because f'_+(0) \neq f'_-(0)$,　$\therefore y = e^{-|x|}$ 在 $x = 0$ 处不可导.

由 ① 式知

$e^{-x} \leqslant 1, \forall x \geqslant 0, e^x < 1, \forall x < 0.$

$\therefore y = e^{-|x|}$ 在 $x = 0$ 处有极大值 1.

310.(复旦大学,1998年)　已知 $f(x) = (x-a)^2\varphi(x)$,其中 $\varphi'(x)$ 在点 $x = a$ 的某邻域内连续,求 $f''(a)$.

解　因为 $f(x) = (x-a)^2\varphi(x)$,则

$f'(x) = 2(x-a)\varphi(x) + (x-a)^2\varphi'(x).$

$\therefore f'(a) = 0.$

$$f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{2(x-a)\varphi(x) + (x-a)^2\varphi'(x)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}[2\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)] = 2\varphi(a).$$

311.(复旦大学,1997年)　设 $y(x) = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} - 2, & 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 6 - x, & x > 4, \end{cases}$

试问 $y(x)$ 在 $x=4$ 处导数存在吗?并求 $y(x)$ 的最大值.

解　由已知 $y(x)$ 可得　$y(4)=2$,故

$$y'_+(4)=\lim_{x\to4+}\frac{y(x)-y(4)}{x-4}=\lim_{x\to4+}\frac{(6-x)-2}{x-4}=-1.$$

$$y'_-(4)=\lim_{x\to4-}\frac{y(x)-y(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\frac{(3x-\frac{x^2}{2}-2)-2}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4-}(3-x)=-1.$$

$\because y'_+(4)=y'_-(4)$,$\therefore y(x)$ 在 $x=4$ 处导数存在,且 $y'(4)=-1$.

当 $0\leqslant x\leqslant4$ 时

$$y(x)=3x-\frac{x^2}{2}-2=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{5}{2},$$

$$\therefore \max_{0\leqslant x\leqslant4}y(x)=\frac{5}{2}.$$

当 $x>4$ 时 $\sup y(x)=2$.

$$\therefore \max_{x\geqslant0}y(x)=\frac{5}{2}.$$

312.(华东师范大学,1998 年)　设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ \ln(1+x^2), & x\geqslant0.\end{cases}$

求 $f'(x)$.

解　当 $x<0$ 时,$f'(x)=-\sin x$.

当 $x>0$ 时,$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

当 $x=0$ 时

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos x}{x}\quad 不存在.$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}-\sin x, & x<0,\\ \dfrac{2x}{1+x^2}, & x<0.\end{cases}$$

313.(北京大学,1996年)　判断题:设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且在 (a,b) 上可微,若存在极限 $\lim\limits_{x\to a+0}f'(x)=l$,则右导数 $f'_+(a)$ 存在且等于 l.

答　对.因为用罗比塔法则

$$f'_+(a)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{f'(a+h)}{1}=l.$$

314.(东北师范大学,北京科技大学,1998 年)　设 $f(x)$ 可导,计算

$$\lim_{t\to0}\frac{f(a+\alpha t)-f(a+\beta t)}{t},\alpha\neq0,\beta\neq0.$$

解 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(a+\alpha t)-f(a+\beta t)}{t}$

$$=\alpha\lim_{t\to0}\frac{f(a+\alpha t)-f(a)}{\alpha t}-\beta\lim_{t\to0}\frac{f(a+\beta t)-f(a)}{\beta t}$$

$$=(\alpha-\beta)f'(a).$$

315.(山东大学) $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}-\sqrt{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}}\cdot\dfrac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}\cdot e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$$=\frac{e^x-1}{1+e^{2x}}.$$

316.(山东海洋学院) 设 $ye^{xy}-x+1=0$,求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=-1}}$.

解 两边对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx}e^{xy}+ye^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-1=0,$$

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-y^2e^{xy}}{e^{xy}+xye^{xy}}$. ①

将 $x=0,y=-1$ 代入 ① 得

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=-1}}=0.$$

317.(北京大学,2002 年) 设

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.

求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=2\sqrt{1-x^2}.$$

318.(上海机械学院) 设 $x(t)=\int_1^{t^2}u\ln u\,du,y(t)=\int_{t^2}^1u^2\ln u\,du$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

解 $y'(t)=-t^4\ln t^2(2t)=-2t^5\ln t^2$.

$x'(t)=t^2\ln t^2(2t)=2t^3\ln t^2$.

$\therefore\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=-t^2$.

319.(山东海洋学院) 已知 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$,

求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-(\sin t)^2}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

320.(湘潭大学,中国科学院,2003年) 在什么条件下,函数

$$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad (n\text{ 为自然数})$$

(1) 在点 $x=0$ 处连续;

(2) 在点 $x=0$ 处可导;

(3) 在点 $x=0$ 处导函数连续.

解 (1) 因为 $0\leqslant\left|x^n\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|^n$. 而当 $n>0$ 时

$\lim\limits_{x\to0}|x|^n=0$.

由两边夹法则

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^n\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$.

即当 $n>0$ 时,$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}$.

当且仅当 $n>1$ 时,上述极限存在且等于0,即当 $n>1$ 时,

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=0$.

$$(3)\because f'(x)=\begin{cases}nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}\quad (n>1)$$

由上式可知,当 $n>2$ 时

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0=f'(0)$,即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

321.(山东大学) 试作一函数在$(-\infty,+\infty)$内二阶可微,使得 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,其余处处连续.

解 令 $f(x)=\begin{cases}x^4\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

由上题知

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0.\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时

$$f''(x)=12x^2\sin\frac{1}{x}+2x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}.$$

当 $x=0$ 处，因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}(4h^2\sin\frac{1}{h}-h\cos\frac{1}{h})=0.$$

$\therefore f''(0)=0.$

$$\therefore f''(x)=\begin{cases}12x^2\sin\dfrac{1}{x}+2x\cos\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases} \qquad ①$$

$\because \lim\limits_{x\to 0}f''(x)$ 不存在（$\because \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在）

$\therefore f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，由①式知 $f''(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上都处处连续.

322.（武汉水利电力大学） 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，分别讨论下面函数在 $x=a$ 处是否可导：

(1) $f(x)=(x-a)\varphi(x)$;

(2) $f(x)=|x-a|\varphi(x)$;

(3) $f(x)=(x-a)|\varphi(x)|$.

解 (1) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi(a+t)\cdot t}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\varphi(a+t)=\varphi(a).$

$\therefore f'(a)=\varphi(a).$

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi(a+t)|t|}{t}$

$\therefore f'_+(a)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\varphi(a+t)t}{t}=\varphi(a),$

$f'_-(a)=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{\varphi(a+t)t}{t}=-\varphi(a).$

当 $\varphi(a)\neq 0$ 时，$f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导. 当 $\varphi(a)=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f'(a)=\varphi(a)$.

(3) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{|\varphi(a+t)|\cdot t}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}|\varphi(a+t)|=|\varphi(a)|.$

$\therefore f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,且 $f'(a)=|\varphi(a)|$.

323.(中国科学院,2003年)　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,并且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A$.求证:$f'(0)$ 存在,并且 $f'(0)=A$.

证　$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A$, $\therefore f(2x)-f(x)=Ax+o(x)$　　①

由 ① 式有

$$\begin{cases} f(x)-f(\frac{x}{2})=A\cdot\frac{x}{2}+o(x) \\ f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{4})=A\cdot\frac{x}{4}+o(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(\frac{x}{2^n})-f(\frac{x}{2^{n+1}})=A\cdot\frac{x}{2^{n+1}}+o(x) \end{cases}$$

把这些式子统统加起来得

$$f(x)-f(\frac{x}{2^{n+1}})=Ax(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})+o(x). \quad ②$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,② 式两边对 $n\to+\infty$ 取极限

$f(x)-f(0)=Ax+o(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=A$.此即 $f'(0)$ 存在,且 $f'(0)=A$.

324.(郑州工学院)　设

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{\pi}{x}, & x<0, \\ A\ , & x=0 \\ ax^2+b, & x>0 \end{cases}$$

其中 A,a,b 为常数,试问 A,a,b 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,为什么?并求 $f'(0)$.

解　$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{\pi}{x}-A}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x\sin\dfrac{\pi}{x}-\dfrac{A}{x})$.

$\because \lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\dfrac{\pi}{x}=0$,故要使 $f'_-(0)$ 存在,必须 $A=0$.

又　$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax^2+b}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+\dfrac{b}{x})$.

要使有导数存在,必须 $b=0$.

综上可知,当 $A=b=0$,a 为任意常数时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=0$.

325.(武汉大学)　对于函数 $f(x)=|\sin x|^3, x\in(-1,1)$.

(1) 证明:$f'''(x)$ 不存在;

(2) 说明点 $x=0$ 是不是 $f'''(x)$ 的可去间断点.

证　(1)

$$\because \quad f(x)=\begin{cases}\sin^3 x, & x\in(0,1),\\ 0, & x=0,\\ -\sin^3 x, & x\in(-1,0).\end{cases}$$

可求得

$$f'(x)=\begin{cases}3\sin^3 x\cos x, & x\in(0,1),\\ 0, & x=0,\\ -3\sin^2\cos x, & x\in(-1,0).\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x, & x\in(0,1),\\ 0, & x=0,\\ -6\sin x\cos^2 x+3\sin^3 x, & x\in(-1,0).\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x}{x}=6.$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-6\sin x\cos^2 x+3\sin^3 x}{x}=-6.$$

由于 $f'''_+(0)\neq f'''_-(0)$, $\therefore f'''(x)$ 不存在.

(2) 由上面(1)可知 $x=0$ 不是 $f'''(x)$ 的可去间断点.

326.(长沙铁道学院)　设 $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 t\,dt,(x\neq y)$. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　两边关于 x 求导,得

$$2-\sec^2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=\sec^2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right),$$

解得　$\frac{dy}{dx}=\sin^2(x-y)$.

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2y}{dx^2}&=2\sin(x-y)\cos(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right)\\&=\sin2(x-y)[1-\sin^2(x-y)]\\&=\sin2(x-y)\cos^2(x-y).\end{aligned}$$

327.(湖南大学)　设函数 $f(y)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 以及 $f'[f^{-1}(x)]$, $f''[f^{-1}(x)]$ 都存在,且 $f'[f^{-1}(x)]\neq0$. 证明:

$$\frac{d^2f^{-1}(x)}{dx^2}=\frac{-f''(f^{-1}(x))}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

证　令 $x=f(y)$，则 $y=f^{-1}(x)$. 将 $x=f(y)$ 对 x 求导得

$$1=f'(y)\frac{dy}{dx},$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}.$$

两边再对 x 求导，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-f''(y)\frac{dy}{dx}}{[f'(y)]^2}=-\frac{f''(y)}{[f'(y)]^3}=-\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

328.(北京化工学院)　已知 $y=\int_1^{1+\sin t}(1+e^{\frac{1}{u}})du$，其中 $t=t(x)$ 是由 $\begin{cases}x=\cos 2v\\t=\sin v\end{cases}$ 所确定. 求$\frac{dy}{dx}$.

解　$\frac{dy}{dx}=(1+e^{\frac{1}{1+\sin t}})\cdot\cos t\frac{dt}{dx}$. ①

由 $\begin{cases}x=\cos 2v,\\t=\sin v,\end{cases}$ 消去 v 得

$x=1-2t^2$.

两边对 x 求导　$1=-4t\frac{dt}{dx}$，$\therefore \frac{dt}{dx}=-\frac{1}{4t}$. ②

求②代入①得　$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos t}{4t}(1+e^{\frac{1}{1+\sin t}})$.

329.(北京工业学院)　已知 $f(x)=x\sin\omega x$，求证：

$f^{(2n)}(x)=(-1)^n(\omega^{2n}x\sin\omega x-2n\omega^{2n-1}\cos\omega x)$. ①

证　用数学归纳法，当 $n=1$ 时

$f'(x)=\sin\omega x+\omega x\cos\omega x$,

$f''(x)=2\omega\cos\omega x+\omega^2x\sin\omega x$.

$\therefore$① 式成立.

归纳假设 $n=k$ 成立，即

$f^{(2k)}(x)=(-1)^k(\omega^{2k}x\sin\omega x-2k\omega^{2k-1}\cos\omega x)$.

再当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}f^{(2k+1)}(x)&=(-1)^k[\omega^{2k}\sin\omega x+\omega^{2k+1}x\cos\omega x+2k\omega^{2k}\sin\omega x]\\&=(-1)^k[\omega^{2k}(2k+1)\sin\omega x+\omega^{2k+1}x\cos\omega x].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f^{(2k+2)}(x)&=(-1)^k[\omega^{2k+1}(2k+1)\cos\omega x+\omega^{2k+1}\cos\omega x-\omega^{2k+2}x\sin\omega x]\\&=(-1)^{k+1}[\omega^{2(k+1)}x\sin\omega x-2(k+1)\omega^{2(k+1)-1}\cos\omega x].\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时,① 式也成立,从而 ① 式得证.

330.(同济大学) 试用数学归纳法证明:

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}. \qquad ①$$

证 当 $n=1$ 时

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})'=(e^{\frac{1}{x}})'=(e^{\frac{1}{x}})\cdot(-\frac{1}{x^2})=\frac{(-1)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

即 ① 式成立.

归纳假设结论对 $n\leqslant k$ 都成立.再证 $n=k+1$ 时,

$$(x^{k+1-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}=[(x^ke^{\frac{1}{x}})']^{(k)}=(kx^{k-1}e^{\frac{1}{x}}-x^{k-2}e^{\frac{1}{x}})^k$$

$$=k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}-(x^{k-2}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}. \qquad ①$$

由归纳假设

$$(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}=\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \qquad ②$$

$$(x^{k-2}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}=[(x^{k-2}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]'=[\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}]'$$

$$=k(-1)^kx^{-(k+1)}e^{\frac{1}{x}}-(-1)^{k-1}x^{-(k+2)}e^{\frac{1}{x}}. \qquad ③$$

将 ②,③ 代入 ①,并注意 $(-1)^{k-1}=(-1)^{k+1}$,

$$\therefore [x^{k+1-1}e^{\frac{1}{x}}]^{(k+1)}=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}.$$

即 $n=k+1$ 也有 ① 式成立,从而即证.

331.(华中理工大学) 设 $f(x)=\arctan x$,求 $f^{(n)}(0)$.

解 令 $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,则

$g(x)=1-x^2+x^4-x^6+x^8\cdots\cdots,\qquad |x|<1.$

$g'(x)=-2x+4x^3-6x^5+8x^7\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\ \cdots\cdots$

$$g^{(n-1)}(x)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!x+(-1)^{\frac{n}{2}+1}\dfrac{(n+1)!}{2}x^3+\cdots, & n=2k\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!+(-1)^{\frac{n+1}{2}}x^2+\cdots. & n=2k+1\end{cases}$$

$$\therefore g^{(n-1)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n=2k+1.\end{cases}$$

但是 $f^{(n)}(0)=g^{(n-1)}(0)$.

$$\therefore f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & n=2k+1.\end{cases}$$

332.（中国科学院） 设$f(x)=\begin{cases}|x|, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 证明：不存在一个函数以$f(x)$为其导函数.

证 用反证法，设$g'(x)=f(x)$，则

$$g'(x)=\begin{cases}x, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ -x. & x<0.\end{cases} \qquad ①$$

则 当$x>0$时，$g(x)=\frac{1}{2}x^2+C_1$，

当$x<0$时，$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+C_2$.

由于$g(x)$连续. $\therefore C_1=C_2=g(0)$.

即 $$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2C_1, & x>0,\\ C_1, & x=0,\\ -\frac{1}{2}x^2C_1, & x<0.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0.$$

这与①式矛盾.

333.（中国科学院，1999年） 设$g(x)$是$[-1,1]$上无穷次可微分函数，$\exists M>0$，使$|g^{(n)}(x)|\leqslant n!M$. 并且

$g(\frac{1}{n})=\ln(1+2n)-\ln n \quad n=1,2,3,\cdots$

请计算各阶导数$g^{(k)}(0)$，$k=0,1,2,\cdots$

解 $\because g(\frac{1}{n})=\ln(1+2n)-\ln n=\ln\frac{1+2n}{n}=\ln(2+\frac{1}{n})$.

$\therefore g(0)=\lim\limits_{n\to\infty}g(\frac{1}{n})=\ln 2$.

$$g'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{g(\frac{1}{n})-g(0)}{\frac{1}{n}-0}=\frac{1}{2},$$

………………………

$$g^{(k)}(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{g^{(k-1)}(\frac{1}{n})-g^{k-1}(0)}{\frac{1}{n}-0}$$

$$=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{2^k},(k\geqslant 1).$$

$$\therefore g^{(k)}(0)=\begin{cases}\ln 2, & k=0,\\ (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{2^k}, & k\geqslant 1.\end{cases}$$

334.(东北工学院) 讨论

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可微性.

解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}=f(0).$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1)-2x-x(e^x-1)}{2x^2(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-(e^x-1)-xe^x}{4x(e^x-1)+2x^2e^x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^x-xe^x}{4(e^x-1)+4xe^x+4xe^x+2x^2e^x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x}{4e^x+8e^x+8xe^x+4xe^x+2x^2e^x}=-\frac{1}{12}.$$

$\therefore f'(0)=-\frac{1}{12}$. 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微.

335.(华中理工大学) 设 $f(x)=\begin{cases}e^{1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0 & ,x=0,\end{cases}$ 试证明:$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

证 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1/x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2}\cdot(-\frac{2}{x^3})}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0.$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}}{e^{1/x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{6}{x^4}}{-\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{x}}{e^{1/x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}\cdot e^{1/x^2}} = 0 = f'(0).$$

$\therefore f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

336.(上海科技大学) 已知一直线切曲线 $y = 0.1x^3$ 于 $x = 2$,且交此曲线于另一点,求此点坐标.

解 在 $x = 2$ 处,曲线 $y = 0.1x^3$ 的斜率为

$k = y'|_{x=2} = 1.2.$

又切线过点(2,0.8),故切线方程为

$y - 0.8 = 1.2(x - 2)$,即 $6x - 5y - 8 = 0.$

再解方程组

$$\begin{cases} y = 0.1x^3 \\ 6x - 5y - 8 = 0. \end{cases}$$

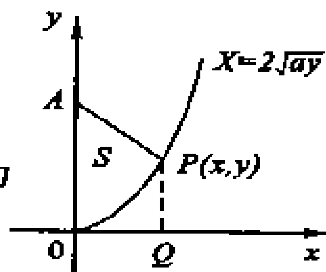
得另一交点坐标为$(-4, -6.4)$.

337.(西北电讯工程学院) 设平面上一点 $A(0,a)$ 和抛物线 $x = 2\sqrt{ay}$ $(a > 0)$,动点 P 从坐标原点出发,沿抛物线移动.假定线段 OA、AP 和抛物线所围成图形的面积对时间的增大速率为常数 k,求 P 点的横坐标的变动速率.

解 由 $x = 2\sqrt{ay}$,

$\therefore y = \frac{x^2}{4a}.$

设动点 P 的坐标为$(x,\frac{x^2}{4a})$,设 P 点在 x 轴投影为 Q,则点 Q 的坐标为$(x,0)$.



第 337 题图

再设曲边三角边 OAP 的面积为 S(如图),则

S = 梯形 $AOQP$ 的面积 − 曲线三角形 OPQ 的面积

$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{x^2}{4a}\right)x - \int_0^x \frac{t^2}{4a}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a}{2}x + \frac{1}{24a}x^3.$$

由题设

$$k = \frac{ds}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{x^2}{8a}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{8ak}{4a^2 + x^2}.$$

338.（上海化工学院） 椭圆上任意两点联结成的线段，称为此椭圆的弦.证明：椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$的任意两条平行弦之中点联线必经过原点（即椭圆中心）.

证 设两条平行弦分别为AB与CD，这4点的坐标分别为$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，$D(x_4, y_4)$，$AB \mathbin{/\!/} CD$.

(1) 若AB与CD都平行于x轴（或y轴），则结论显然成立.

(2) 若AB、CD的斜率都是$k \in (0, +\infty)$，则

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}.$$

两弦AB与CD两弦中点分别为$E\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$，$F\left(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2}\right)$.再设$EO$和$FO$的斜率分别为$k_1$和$k_2$，则

$$k_1 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}, k_2 = \frac{y_3 + y_4}{x_3 + x_4}.$$

$$\therefore k \cdot k_1 = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2}. \qquad ①$$

由于(x_1, y_1)和(x_2, y_2)在椭圆上，所以

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2), \qquad ②$$

$$y_2^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_2^2), \qquad ③$$

将②,③代入①得

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad ④$$

类似可得

$$kk_2 = -\frac{b^2}{a^2}. \quad ⑤$$

由④,⑤得 $k_1 = k_2$,从而 E、O、F 在一条直线上,即两弦中点联线过原点.

339.(厦门大学) 已知 $f'(x) = ke^x$,k 为常数,求 $f(x)$ 的反函数的二阶导数.

解 设 $y = f(x)$,则$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{ke^x}$.

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{ke^x}\right)\cdot\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{k^2e^{2x}}.$$

340.(北京农机学院) (1) 求导函数 $y = e^{-x}\arccos x$;

(2) 求导函数 $y = x(\sin x)^x$;

(3) 已知参数方程$\begin{cases} x = 10\cos 3t + 120\cos t, \\ y = 10\sin 3t + 120\sin t, \end{cases}$ 求$\frac{dy}{dx}$.

解 (1)$y' = -e^{-x}\arccos x - \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) 两边取对数得

$\ln y = \ln x + x\ln\sin x$,

两边求导数得

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x} + \ln\sin x + x\cot x,$$

$$\therefore y' = x(\sin x)^x\left(\frac{1}{x} + \ln\sin x + x\cot x\right).$$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{30\cos 3t + 120\cos t}{-30\sin 3t - 120\sin t} = -\frac{\cos 3t + 4\cos t}{\sin 3t + 4\sin t}.$$

341.(南京大学,1998年) 求 $d^n(x^2\ln x)$,($x > 0$,x 为自变量)

解 令 $y = x^2\ln x$,则

$y' = 2x\ln x + x$,

$y'' = 2\ln x + 3$,

$y^{(3)} = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$,

$y^{(4)} = 2\cdot(-1)x^{-2}$,

$y^{(5)} = 2\cdot(-1)\cdot(-2)x^3$,

…………

$y^{(n)} = 2\cdot(-1)(-2)\cdots[-(n-3)]x^{-(n-2)}$

$$d^n(x^2\ln x) = \begin{cases} x(2\ln x + 1)dx, & n = 1, \\ (2\ln x + 3)dx^2, & n = 2, \\ (-1)^{n-3}2\cdot(n-3)!\,x^{2-n}dx^n, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

342. 设 $y = x^n[2\cos(\ln x) + 5\sin(\ln x)]$,证明:

$$x^2y'' + (1-2n)xy' + (1+n^2)y = 0.$$

证 $y' = nx^{n-1}[2\cos(\ln x) + 5\sin(\ln x)] + x^{n-1}[-2\cos(\ln x) + 5\sin(\ln x)]$,

$y'' = x^{n-2}\{(n^2 - n - 1)[2\cos(\ln x) + 5\sin(\ln x)\} + (2n - 1)[(2\cos(\ln x) - 5\sin(\ln x)]$.

$\therefore x^2y'' + (1-2n)xy' + (1+n^2)y = 0.$

343.(内蒙古大学) 求出函数

$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}}\cos(x^{-\frac{1}{3}}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$,讨论 $f'(x)$ 的连续性(若有间断点,须指出其类别).

解 当 $x \neq 0$ 时

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\cos(x^{-\frac{1}{3}}) + \frac{1}{3}\sin(x^{-\frac{1}{3}}),$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0}[x^{\frac{1}{3}}\cos(x^{-\frac{1}{3}})] = 0.$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\cos(x^{-\frac{1}{3}}) + \frac{1}{3}\sin(x^{-\frac{1}{3}}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\because \lim\limits_{x\to0}\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\cos(x^{-\frac{1}{3}}) = 0, \lim\limits_{x\to0}\sin(x^{-\frac{1}{3}}) = \lim\limits_{x\to0}(\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}})$ 不存在

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 不存在,因此 $x = 0$ 是 $f'(x)$ 的唯一间断点,它是第二类间断点.

344.(中国人民大学,2001 年) 设

$$f(x) = \sqrt{\frac{(1+x)\sqrt{x}}{e^{x-1}}} + \arcsin\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}},$$

求 $f'(1)$.

解
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{e^{x-1}}{(1+x)\sqrt{x}}}\cdot\frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x})e^{x-1} - e^{x-1}(1+x)\sqrt{x}}{e^{2(x-1)}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(1-x)^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{-\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(1-x)}{1+x^2}.$$

$$\therefore f'(1)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}(2-2)+\frac{-\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

345.(北京航空航天大学)　$\varphi(x)=\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}dt$　在 $-1<x<1$ 有意义,证明:

$$\varphi(x)+\varphi(-x)=\frac{1}{2}\varphi(x^2).$$

证　令 $F(x)=\varphi(x)+\varphi(-x)-\frac{1}{2}\varphi(x^2)$,则

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{d\varphi(-x)}{dx}-\frac{1}{2}\frac{d\varphi(x^2)}{dx}$$

$$=\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln(1+x)}{-x}\cdot(-1)-\frac{1}{2}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\cdot 2x=0.$$

$\therefore F(x)=C$,即

$$\varphi(x)+\varphi(-x)-\frac{1}{2}\varphi(x^2)=C. \qquad ①$$

将 $x=0$ 代入 ①

$$\therefore C=\varphi(0)+\varphi(0)-\frac{1}{2}\varphi(0).$$

但　$\varphi(0)=0$.　　$\therefore C=0$.

$$\therefore \varphi(x)+\varphi(-x)=\frac{1}{2}\varphi(x^2).$$

346.(广西大学)　求函数

$y=|1-2x|\sin(2+x+\sqrt{1+x^2})$ 的导数.

解　$$y=\begin{cases}(1-2x)\sin(2+x+\sqrt{1+x^2}), & x<\frac{1}{2},\\(2x-1)\sin(2+x+\sqrt{1+x^2}), & x\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

当 $x<\frac{1}{2}$ 时,

$$y'=-2\sin(2+x+\sqrt{1+x^2})+(1-2x)\cos(2+x+\sqrt{1+x^2})(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$$

当 $x>\frac{1}{2}$ 时

$$y'=2\sin(2+x+\sqrt{1+x^2})+(2x-1)\cos(2+x+\sqrt{1+x^2})(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}).$$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{2}+\Delta x)-f(\frac{1}{2})}{\Delta x}=2\sin(\frac{5}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{4}}).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\frac{1}{2}+\Delta x)-f(\frac{1}{2})}{\Delta x}=-2\sin(\frac{5}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{4}}).$$

$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数的导数不存在.

347.(长春光机学院) (1) $y=\sin x^2$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}$；

(2) 将 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ 用极坐标 r,φ 表示出来，以 φ 为自变量.

解 (1) $\frac{dy}{dx}=2x\cos x^2$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x\cos x^2dx}{2xdx}=\cos x^2.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2x\cos x^2dx}{3x^2dx}=\frac{2\cos x^2}{3x}.$$

(2) 令 $\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ r=h(\varphi),\end{cases}$ 则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r\cos\varphi-r'\sin\varphi}{-r\sin\varphi+r'\cos\varphi}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{r^2-rr'+2(r')^2}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^3}.$$

348.(西北工业大学) 设 $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)))$(n 个 f)，

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $\frac{df_n(x)}{dx}$.

解 设 $f_1(x)=f(x),f_2(x)=f[f(x)]$，先用数学归纳法证明：

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},\quad n\in N. \tag{①}$$

当 $n=1$ 时，① 式显然成立.

归纳假设结论对 $n=k$ 成立，即

$$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}.$$

当 $n=k+1$ 时.

$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=f[\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}]$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

从而①式对一切自然数成立.

$$\therefore \frac{df_n(x)}{dx}=\left(\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{(1+nx^2)^3}}.$$

349.（哈尔滨工业大学,1999年） 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta),(\delta>0)$ 内有定义.

(1) 若 $f(x)$ 在 x_0 点处导数 $f'(x_0)$ 存在,证明:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0); \qquad ①$$

(2) 若上式左端极限存在,是否 $f(x)$ 在 x_0 点一定可导?若结论成立,请证明;若结论不成立,请举反例.

解 (1) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

$$=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0).$$

(2) 若①式左端极限存在,$f(x)$ 在 x_0 不一定可导.比如 $f(x)=|x|$,令 $x_0=0$.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=0.\text{存在,}$$

但 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

350.（浙江大学） 设

$$f'(\ln x)=\begin{cases}1,\text{当 } 0<x\leqslant1,\\ x,\text{当 } x>1,\end{cases}$$ 且 $f(0)=0$,求 $f(x)$.

解 当 $x>1$ 时

$f'(\ln x)=x=e^{\ln x}$,

$\therefore f'(t)=e^t$,

$f(t) = e^t + C_1$.

其中 $t > 0$ ①

当 $0 < x \leqslant 1$ 时

$f'(\ln x) = 1$,

令 $t = \ln x$,则 $f'(t) = 1$,

$\therefore f(t) = t + C_2$,其中 $-\infty < t \leqslant 0$ ②

$$\therefore f(t) = \begin{cases} e^t + C_1, & t > 0, \\ t + C_2, & -\infty < t \leqslant 0. \end{cases} \quad ③$$

当 $t = 0$ 时,$f(0) = 0$,解得 $C_2 = 0$.再由 $f(t)$ 连续,

$\therefore 0 = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} (e^t + C_1) = 1 + C_1$, $\therefore C_1 = -1$.

代入 ③,所以

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x > 0, \\ x, & -\infty < x \leqslant 0. \end{cases}$$

351.(中国人民大学,2001年) 设函数 $f(x)$ 连续,$f'(0)$ 存在,并且对于任何的 $x, y \in R$,

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - 4f(x)f(y)}, \quad ①$$

(1) 证明:$f(x)$ 在 R 上可微;

(2) 若 $f'(0) = \frac{1}{2}$,求 $f(x)$.

证 (1) 令 $x = y = 0$,由 ①

$f(0) = \dfrac{f(0)}{1 - 4f^2(0)}$,

$f(0) - 4f^3(0) = f(0)$,

$\therefore f(0) = 0$. ②

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}. \quad ③$$

$\forall x \in R$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x) + f(h)}{1 - 4f(x)f(h)} - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)[1 + 4f^2(x)]}{h[1 - 4f(x)f(h)]}$$

$$= f'(0) \frac{[1 + 4f^2(x)]}{[1 - 4f(x)f(0)]} = f'(0)[1 + 4f^2(x)].$$

$\therefore f'(x) = f'(0)[1 + 4f^2(x)]$(存在). ④

(2) 令 $f(x)=y$，并将 $f'(0)=\frac{1}{2}$ 代入④，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(1+4y^2).$$

分离系数得

$$\frac{d(2y)}{1+(2y)^2}=dx,$$

$$\therefore \arctan 2y=x+C, \tag{5}$$

$$y=\frac{1}{2}\tan(x+C). \tag{6}$$

令 $x=0$　则 $y=0$，由⑤得 $C=0$.

$$\therefore y=\frac{1}{2}\tan x.$$

352.（北京师范大学，1998年）　设 $f\in C^2(R)$，且

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\geqslant 0, \forall x\in R, \forall h>0 \tag{1}$$

证明：$\forall x\in R, f''(x)\geqslant 0$.

证　$\forall x\in R, \forall h>0, f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2)$ ②

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2) \tag{3}$$

②+③

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+f''(x)h^2+o(h^2) \tag{4}$$

$\because f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\geqslant 0$

$\therefore f''(x)h^2+o(h^2)\geqslant 0$,

$\therefore f''(x)+o(1)\geqslant 0$,

令 $h\to 0$，$\therefore f''(x)\geqslant 0$.

353.（长沙铁道学院）　设函数 $f(x)$ 在点 a 处连续，且 $|f(x)|$ 在 a 处可导，证明：$f(x)$ 在 a 处也可导.

证　(1) 若 $f(a)=0$.　令

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)|}{x-a}=A.$$

当 $x>a$ 时

$$\frac{|f(x)|}{x-a}\geqslant 0,\quad \therefore A\geqslant 0,$$

当 $x<a$ 时

$$\frac{|f(x)|}{x-a}\leqslant 0,\quad \therefore A\leqslant 0.$$

$\therefore A = 0$,此而 $\lim\limits_{x\to a}\left|\dfrac{f(x)}{x-a}\right| = A = 0.$

$\therefore \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a} = 0.$

(2) 若 $f(a)>0$,由于 $f(x)$ 在点 a 处连续,$\exists\delta>0$,使当 $|x-a|<\delta$,有 $f(x)>\dfrac{f(a)}{2}>0$.

$\therefore \lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$,

$\therefore f(x)$ 在 a 处可导.

(3) 若 $f(a)<0$,同上类似有

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = -\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$\therefore f(x)$ 在 a 处也可导.

354.(华东师范大学,2000 年) 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

求 $f^{(k)}(0)$.

解 $\because \sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$

$\therefore \dfrac{\sin x}{x} = 1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}=0.$$

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)'}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{2}{3!}x+o(x)}{x}$$
$$=-\frac{1}{3}.$$

$$f'''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}x^2+o(x^2)-(-\frac{1}{3})}{x}=0.$$

$$f^{(4)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'''(x)-f'''(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{5}x+o(x)}{x}=\frac{1}{5}.$$

依次继续下去可得

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}}\dfrac{1}{k+1}, & k\text{ 为偶数},\\ 0, & k\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

355.【武汉大学,1994 年】 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 I 内有定义. 证明:导数 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是存在这样的函数 $g(x)$,它在 I 内有定义,在点 x_0 连续,且使得在 I 内成立等式:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g(x), \tag{①}$$

又这时还有等式 $f'(x_0) = g(x_0)$.

证 先证充分性,设 ① 式成立,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

由于 $g(x)$ 在点 x_0 连续,$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 存在,从而

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ 存在,}$$

$\therefore f'(x_0)$ 存在,且

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

再证必要性. 令

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, x \in I, \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

这时 $g(x)$ 在 I 内有定义.

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = g(x_0).$$

$\therefore g(x)$ 在点 x_0 连续. 且

$$f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0), x \neq x_0, x \in I. \tag{①}$$

但 ① 式当 $x = x_0$ 也成立.

$\therefore f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0), x \in I.$

356.【湖北大学,2002 年】 设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内具有三阶导函数,且 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$. 问 $x = x_0$ 是否为极值点?为什么?又 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点?为什么?

答 (1)$x = x_0$ 不一定是极值点,比如 $f(x) = x^3$,可证 $f'(0) = f''(0) = 0$. 但 $f'''(0) = 6 \neq 0$. 但 $f(x) = x^3$ 无极值点.

(2)$(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点,不失一般性设 $f'''(x_0) > 0$. 从而由保号性存在 x_0 的某一邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,使

而 $f'''(x) > 0$,即 $f''(x)$ 在此邻域内为严格增函数.

$\therefore f''(x) > 0, x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$f''(x) < 0, x \in (x_0 - \delta, x_0)$

又 $f''(x_0) = 0$. $\therefore (x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

357. 设 $f(x)$ 在 (a,b)（有穷或无穷区间）中任意一点有有限导数，且

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

求证：存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = 0$.

证 (1) 当 (a,b) 为有穷区间时，设

$c = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x)$.

令 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b), \\ c, & x = a \text{ 或 } x = b. \end{cases}$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a) = F(b) = c$. 由罗尔定理，存在点 $\xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi) = 0$，由于

$F'(x) = f'(x), x \in (a,b)$.

$\therefore f'(\xi) = 0$.

(2) 设 (a,b) 为无穷区间，若 $a = -\infty, b = +\infty$，可设

$x = \tan t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

令 $G(t) = f(\tan t), t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 设

$\because \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = c$.

$\therefore \lim_{t \to -\frac{\pi}{2}} G(t) = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} G(t) = c$.

仿上面(1) 的讨论，存在 $t_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，使

$G'(t_0) = f'(d) \cdot \sec^2 t_0 = 0$,

其中 $d = \tan t_0$. 由于 $\sec^2 t_0 \neq 0$,

$\therefore f'(d) = 0$.

(3) 当 a 为有限数，$b = +\infty$，则取 $b_0 > \max\{a, 0\}$. 再令

$x = \dfrac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}$,

$H(t) = f\left[\dfrac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}\right]$,

仿前在 (a, b_0) 上讨论，存在 $t_1 \in (a, b_0)$ 使

$H'(t_1) = f'(d_1) \cdot \dfrac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_1)^2} = 0$,

其中 $d_1 = \dfrac{(b_0 - a)t_1}{b_0 - t_1}$，显然 $a < d_1 < +\infty$.

由于 $\dfrac{b_0(b_0-a)}{(b_0-t_1)^2}\neq 0$,

$\therefore f'(d_1)=0.$

(4) 当 $a=-\infty$, b 为有限数,可类似存在 $d_2\in(-\infty,b)$,使 $f'(d_2)=0$.

358.(清华大学,1992 年) 设 $f(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$, $x\in(0,+\infty)$.

证明:函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中恰有 n 个零点.

证 令 $F_k(x)=(e^{-x}x^n)^{(k)}$, $(k=1,2,\cdots,n)$, 则 $F_n(x)=f(x)$, 且 $F_1(x)=e^{-x}(-x^n+nx^{n-1})$

由上题存在 $c\in(0,+\infty)$ 使 $F_1(c)=0$.(实际上 $c=n$)

由于 $F_2(x)=F'_1(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}(e^{-x}x^n)$.

再对 $F_2(x)$ 讨论 $(0,c)$ 和 $(c,+\infty)$ 内,

$\because F_1(x)$ 可导连续

$\lim\limits_{x\to0^+}F_1(x)=\lim\limits_{x\to c^-}F_1(x)=0,$

$\lim\limits_{x\to c^+}F_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}F_1(x)=0,$

再由上题,存在 $d_1\in(0,c)$, $d_2\in(c,+\infty)$,使 $F'_1(d_1)=F'_1(d_2)=0$

即 $F'_2(d_1)=F'_2(d_2)=0$. $d_1,d_2\in(0,+\infty)$

由归纳假设,由于

$F_{n-1}(x)=\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x}x^n)=e^{-x}[(-1)^{n-1}x^n+(-1)^{n-2}C_{n-1}^1nx^{n-1}+\cdots+n(n-1)\cdots2x]$ 且在 $(0,+\infty)$ 有 $n-1$ 个点 $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{n-1}$ 使

$F_{n-1}(\xi_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$

考虑 $F_{n-1}(x)$ 在各区间 $(0,\xi_1),(\xi_1,\xi_2),\cdots,(\xi_{n-2},\xi_{n-1}),(\xi_{n-1},+\infty)$ 内.

$\lim\limits_{x\to0^+}F_{n-1}(x)=\lim\limits_{x\to\xi_1^-}F_{n-1}(x)=0,$

$\lim\limits_{x\to\xi_i^+}F_{n-1}(x)=\lim\limits_{x\to\xi_{i+1}^-}F_{n-1}(x)=0,(i=1,2,\cdots,n-2)$

$\lim\limits_{x\to\xi_{n-1}^+}F_{n-1}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}F_{n-1}(x)=0,$

$\therefore$ 存在 $\eta_1\in(0,\xi_1)$, $\eta_2\in(\xi_1,\xi_2)$, $\cdots$, $\eta_n\in(\xi_{n-1},+\infty)$ 使 $F'_{n-1}(\eta_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$

此即

$f(\eta_i)=0,(i=1,2,\cdots,n).$

由此得证 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有 n 个根.

另一方面,因为

$f(x)=\mathrm{e}^{-x}P_n(x)$,

其中 $P_n(x)=(-1)^n x^n+(-1)^{n-1}C_n^1 nx^{n-1}+\cdots+(-1)C_n^{n-1}n!x+n!$为 n 次多项式故$f(x)$ 最多只有 n 个根.

综上可知 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$恰有 n 个根.

359.(北京师范大学,1992年)(1) 设$f(x)$在$(0,+\infty)$中任意一点有有限导数,且

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

证明:存在某一点 $c\in(0,+\infty)$,使得 $f'(c)=0$;

(2) 设$f(x)=\dfrac{d^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x}\cdot x^n)$, $x\in(0,+\infty)$,证明:函数$f(x)$在$(0,+\infty)$中恰有 n 个零点.

证 (1) 见第 357 题.

(2) 见上题.

360.(吉林大学) 设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上四次连续可微,$f(0)=f'(0)=0$.证明:函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x^2}, & \text{当 } 0<x\leqslant 1 \text{ 时},\\[2mm] \dfrac{f''(0)}{2}, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

在$[0,1]$上二次连续可微.

证 (1) 当 $x\in(0,1]$时

$$F'(x)=\frac{f'(x)x^2-2xf(x)}{x^4}=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}. \qquad ①$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{f(x)}{x^2}-\dfrac{f''(0)}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2f(x)-x^2f''(0)}{2x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2f'(x)-2xf''(0)}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f''(x)-f''(0)}{6x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'''(x)}{6}=\frac{f'''(0)}{6}. \qquad ②$$

$\therefore F(x)$ 在$[0,1]$上一次可微.

且由 ① 式知

$$\lim_{x\to 0^+}F'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)+xf''(x)-2f'(x)}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{xf''(x) - f'(x)}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x) + xf'''(x) - f''(x)}{6x}$$

$$= \frac{f'''(0)}{6}. \qquad ③$$

由 ②③ 知 $F'(x)$ 连续.

(2) 当 $x \in (0,1]$ 时,由 ① 式可得

$$F''(x) = \frac{x^2f''(x) - 4xf'(x) + 6f(x)}{x^4} \qquad ④$$

$$F''_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x) - F'(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} - \dfrac{f'''(0)}{6}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{6xf'(x) - 12f(x) - x^3f'''(0)}{6x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{6f'(x) + 6xf''(x) - 12f'(x) - 3x^2f'''(0)}{24x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2xf''(x) - 2f'(x) - x^2f'''(0)}{8x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2f''(x) + 2xf'''(x) - 2f''(x) - 2xf'''(0)}{24x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{12x} = \frac{f^{(4)}(0)}{12}. \qquad ⑤$$

$$\lim_{x\to 0^+} F''(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2f''(x) - 4xf'(x) + 6f(x)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2xf''(x) + x^2f'''(x) - 4f'(x) - 4xf''(x) + 6f'(x)}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2xf''(x) + x^2f'''(x) + 2f'(x)}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2f''(x) - 2xf'''(x) + 2xf'''(x) + x^2f^{(4)}(x) + 2f''(x)}{12x^2}$$

$$= \frac{f^{(4)}(0)}{12}. \qquad ⑥$$

由 ④,⑤,⑥ 可知 $F(x)$ 在$[0,1]$上二次可微且连续.

361.【吉林大学】 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,$f(a) = f(b)$,且在开区间(a,b)内有右导数,即

$$f'_+(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad a<x<b$$

连续.求证:必有 $\xi\in(a,b)$,使 $f'_+(\xi)=0$.

证　若 $f'_+(x)=0, x\in(a,b)$,则结论成立.

若 $f'_+(x)\neq 0, x\in(a,b)$,由于 $f(a)=f(b)$,所以 $f'_+(x)$ 不可能恒正或恒负.所以存在 $x_1,x_2\in(a,b)$ 使 $f'_+(x_1)f'_+(x_2)<0$.不失一般设 $x_1<x_2$ 且 $f'_+(x_1)>0, f'_+(x_2)<0$.由于 $f'_+(x)$ 在 (a,b) 内连续,

$\therefore$ 存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$,使 $f'_+(\xi)=0$.

362. 设 $f(x)$ 可导,且

$$g(x)=\int_0^x yf(x-y)\mathrm{d}y.$$

求 $g''(x)$.

解

$$\begin{aligned}g'(x)&=\int_0^x yf'(x-y)\mathrm{d}y+f(0)x\\&=-yf(x-y)\Big|_0^x+\int_0^x f(x-y)\mathrm{d}y+f(0)x\\&=-f(0)x+\int_0^x f(x-y)\mathrm{d}y+f(0)x\\&=\int_0^x f(x-y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g''(x)&=\int_0^x f'(x-y)\mathrm{d}y+f(0)\\&=-f(x-y)\Big|_0^x+f(0)\\&=-f(0)+f(x)+f(0)=f(x).\end{aligned}$$

363.(北京大学,2000 年)　求 e^{2x-x^2} 到含 x^5 项的 Taylor(台劳)展开式.

解　$\because e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$

$\therefore e^{2x-x^2}=1+(2x-x^2)+\frac{1}{2!}(2x-x^2)^2+\frac{1}{3!}(2x-x^2)^3+\frac{1}{4!}(2x-x^2)^4+\frac{1}{5!}(2x-x^2)^5+o(x^5)=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).$

364.(西北大学)　设 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$,求 $y^{(n)}(0)$.

解　令 $f(x)=(\arcsin x)^2$,则

$$f'(x)=2\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad ①$$

$$\therefore (1-x^2)f'^2(x)=4f(x),\qquad ②$$

②式两边求导可得

$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2.$ ③

应用莱布尼兹公式,对③式同时求 n 阶导数得

$-xf^{(n-1)}(x)-nf^{(n)}(x)+(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)=0.$ ④

由①,②,③得

$f'(0)=0,f''(0)=2.$

$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0),$ ⑤

$f^{(2k+1)}(0)=0\quad(k=0,1,2,\cdots)$ ⑥

$\therefore f^{(2k)}(0)=(2k-2)^2(2k-4)^2\cdots2^2\cdot2.$

由①式可知

$$y^{(n)}=\left[\frac{1}{2}f'(x)\right]^{(n)}=\frac{1}{2}f^{(n+1)}(x),$$

$$\therefore y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{当 } n=2k \text{ 时},\\(2k-2)^2(2k-4)^2\cdots2^2\cdot2, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时}.\end{cases}$$

365.(北京航空航天大学,2001年) 设 $f(x)$ 连续,$\forall x>0,f(x)>0$,且 $\forall x\geqslant0$,有 $f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$,求 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=?$

解 当 $x=0$ 时

$$f(0)=\sqrt{\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t}=0.\quad①$$

当 $x>0$ 时

$$f'(x)=\frac{f(x)}{2\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x+C.\quad②$$

因为 $f(x)$ 连续,由①,②两式可得

$0+C=0,\quad\therefore C=0$

$$f(x)=\frac{1}{2}x,x\geqslant0.$$

366.证明:设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上函数,

证明:(1)若 $f(x)$ 是奇函数,则奇数阶导数是偶函数,偶数阶导数是奇函数;

(2)若 $f(x)$ 是偶函数,则奇数阶导数是奇函数,偶数阶导数是偶函数;

(3)若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(0)=0,f^{(2k)}(0)=0$(k 是自然数);

(4) 若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f^{(2k+1)}(0)=0(k=0,1,\cdots)$.

证 (1) 设 $f(x)=-f(-x)$,两边求导,

$f'(x)=f'(-x)$,

$f''(x)=-f''(-x)$

一般有

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases}f^{(k)}(-x), & k\text{ 为奇数},\\ -f^{(k)}(-x), & k\text{ 为偶数}.\end{cases} \qquad ①$$

(2) 设 $f(x)=f(-x)$,类似可证

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases}-f^{(k)}(-x), & k\text{ 为奇数},\\ f^{(k)}(-x), & k\text{ 为偶数}.\end{cases} \qquad ②$$

(3) $\because f(x)=-f(-x)$,将 $x=0$ 代入

$f(0)=-f(0)$, $\therefore f(0)=0$.

由 ① 类似可证

$f^{(2k)}(0)=0$.

(4) 由 ② 可证

$f^{(2k+1)}(0)=0$.

367.(中国人民大学,2001 年) 设

$$f(x)=\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sin^4 x}{1+\cos^2 x}$$

求 $f^{(6)}(0)$, $\int_{-1}^{1}f^{(6)}(x)\mathrm{d}x$.

解 $\because f(x)$ 是奇函数,由上题(3) 知

$f^{(6)}(0)=0$.

再由上题(1) 知 $f^{(6)}(x)$ 是奇函数,

$\therefore \int_{-1}^{1}f^{(6)}(x)\mathrm{d}x=0$.

368.(浙江大学,2002 年) 求 $f^{(n)}(0)$,其中 $n=1,2,\cdots$, $f(0)=0$,

$f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$(当 $x\neq 0$ 时).

解 用数学归纳法 证明:$f^{(n)}(0)=0, n=1,2,\cdots$ ①

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^{1/x^2}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{t^2}}=0.$$

即 当 $n=1$ 时,① 式成立.

假设当 $n=k$ 时,① 式成立. 由于 $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$,易证

$$f^{(k)}(x) = p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}, (x \neq 0), \quad ②$$

其中 $p_k\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的某个多项式.则当 $n = k+1$ 时

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{k}(x) - f^{k}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}p_k\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{1/x^2}}$$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{x}} \lim_{t\to\infty}\frac{tp_k(t)}{e^{t^2}} = 0.\text{（经过若干次罗必塔法则）}$$

从而 ① 式对一切自然数 n 都成立.

§ 2　中值定理与导数的应用

【考点综述】

一、综述

1. 中值定理

(1) 费马定理　设 $f(x)$ 在点 a 的邻域有定义,且在 a 可导,若点 a 为 $f(x)$ 的极值点,则 $f'(a) = 0$.

(2) 罗尔定理　设 $f(x)$ 闭区间 $[a,b]$ 上连续,$f(x)$ 在 (a,b) 内可导,且 $f(a) = f(b)$,则 $\exists\,\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = 0$.

(3) 拉格朗日定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且在 (a,b) 内可导,则 $\exists\,\xi \in (a,b)$ 使

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

(4) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导,且 $f'(x) = 0, \forall x \in I$,则 $f(x) = c\quad(x \in I)$.

(5) 若在区间 I 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可导,且 $f'(x) = g'(x)$,则

$f(x) = g(x) + c$.

(6) 柯西定理　设 $f(x),g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续,$f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 (a,b) 内可导,且 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 在 (a,b) 内不同时为零,且 $g(a) \neq g(b)$,则 $\exists\,\xi \in (a,b)$ 使

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

2. 泰勒公式(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在直到 n 阶连续导数，在 (a,b) 内存在 $n+1$ 阶导数，则 $f(x)$

$$= f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

其中 $\xi \in (a,b)$.

(2) 有限增量公式　若 $f(x)$ 在点 a 可导，则

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(|x-a|)$.

3. 用导数研究函数的性质

(1) 单调性　(ⅰ) 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内递增(或递减) 的充分条件是 $f'(x) \geqslant 0$(或 $f'(x) \leqslant 0$)，$x \in (a,b)$.

(ⅱ) 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格递增(或严格递减) 的充要条件是 $f'(x) \geqslant 0$(或 $f'(x) \leqslant 0$) 且在 (a,b) 内的任何子区间上 $f'(x) \neq 0$.

(2) 极值

(ⅰ) 第一充分条件：设 $f(x)$ 在 a 连续，在 a 的某邻域 $U^o(a,\delta)$ 由可导.

(a) 若 $f'(x) \geqslant 0, x \in (a-\delta, a)$；$f'(x) \leqslant 0, x \in (a, a+\delta)$，则 $f(x)$ 在 a 取极大值 $f(a)$.

(b) 若 $f'(x) \leqslant 0, x \in (a-\delta, a)$；$f'(x) \geqslant 0, x \in (a, a+\delta)$，则 $f(x)$ 在 a 取极小值 $f(a)$.

(ⅱ) 第二充分条件：设 $f(x)$ 在 a 的某邻域 $U(a,\delta)$ 内一阶可导，在点 a 二阶可导，且 $f'(a) = 0, f''(a) \neq 0$.

(a) 若 $f''(a) < 0$，则 $f(x)$ 在 a 取极大值 $f(a)$；

(b) 若 $f''(a) > 0$，则 $f(x)$ 在 a 取极小值 $f(a)$.

(3) 最大值与最小值　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 上几乎处处可导，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内稳定点为 $x_1, \cdots\cdots x_k$，导数不存在点为 $x_{k+1}, \cdots\cdots, x_s$，$M$ 和 m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则

$M = \max\{f(x_1), \cdots\cdots, f(x_s), f(a), f(b)\}$,

$m = \min\{f(x_1), \cdots\cdots, f(x_s), f(a), f(b)\}$.

(4) 凸性(ⅰ) 设 $f(x)$ 为区间 I 上二阶可导函数，则 $f(x)$ 为 I 上凸函数的充要条件是：$f''(x) \geqslant 0$.

(ⅱ) 设 $f(x)$ 为区间 I 上二阶可导函数，则 $f(x)$ 为 I 上凹函数的充要条件是：$f''(x) \leqslant 0$.

(5) 拐点(ⅰ) $f(x)$ 在 a 二阶可导，则点 $(a, f(a))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点的必要条件是 $f''(a) = 0$.

(ⅱ) $f(x)$ 在 a 点可导,在 $U^\circ(a)$ 内二阶可导,若在 $(a,a+\delta)$ 和 $(a-\delta,a)$ 上 $f''(x)$ 的符号相反,则点 $(a,f(a))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(6) 渐近线　设 $y=f(x)$.

(ⅰ) 水平渐近线　若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$(或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$),则 $y=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

(ⅱ) 垂直渐近线　若 $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\infty$,则 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条垂直渐近线.

(ⅲ) 斜渐近线　若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$(或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$) 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$(或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b$),则 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

(7) 函数作图(略).

二、解题方法

1. 考点 1　中值定理的应用.

解题方法:(1) 用拉格朗日中值公式(见下面第 369 题);(2) 用泰勒公式(见下面第 376 题);(3) 用费马定理(见下面第 377 题);(4) 用罗尔定理(见下面第 378 题);(5) 作辅助函数(见下面第 378 题);(6) 用柯西定理(见下面第 379 题).

2. 考点 2　用导数研究函数的性质

解题方法:(1) 用一阶导数的性质(见下面第 374 题);(2) 反证法(见下面第 407 题);(3) 作辅助函数(见下面第 370 题)

【经典题解】

369.(华中师范大学,2003 年)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,过点 $A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于 $C(c,f(c))$,其中 $a<c<b$.

证明:在 (a,b) 中至少存在一点 ξ,使 $f''(\xi)=0$.

证　由假设,对 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上分别运用拉格朗日中值定理,$\exists\,\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$,使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(a)-f(c)}{a-c},f'(\xi_2)=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}. \qquad ①$$

由于点 $C(c,f(c))$ 在过点 A 与 B 的直线上,故

$$\frac{f(a)-f(c)}{a-c}=\frac{f(c)-f(b)}{c-b},$$

由 ① 有 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. ②

又 $f'(\xi)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续,在 (ξ_1,ξ_2) 内可导,以及②式,运用罗尔定理,$\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得 $f''(\xi)=0$.

370.(中国地质大学,2002年)　已知 $x<0$,求证:$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}<1$.

证　当 $x<0$ 时,$\ln(1-x)>0$,则要证的不等式等价于

$$\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+1<0. \qquad ①$$

令 $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+1$,则

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+1\right)=-1+1=0.$$

而 $f'(x)=-\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}>0$,故 $f(x)<f(0)=0$. 即证①,从而有 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}<1,(x<0)$.

371.(中国科学院,2003年)　设 $0<x<y<1$ 或 $1<x<y$,则 $\dfrac{y}{x}>\dfrac{y^x}{x^y}$.

证　欲证上式,即证 $x^{y-1}>y^{x-1}$. 也即 $\dfrac{y-1}{\ln y}>\dfrac{x-1}{\ln x}$.

为此,令 $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$. 由于 $y>x$,故只须证 $f(x)$ 严格单增即可

$$f'(x)=\frac{\ln x-\dfrac{x-1}{x}}{\ln^2x}=\frac{x\ln x-(x-1)}{x\ln^2x}.$$

再令 $g(x)=x\ln x-(x-1)$. ①

则 $g'(x)=\ln x+1-1=\ln x$,令 $g'(x)=0$ 解得 $x=1$,由 $g''(x)=1>0$ 知 $g(x)$ 在点1取极小值,即 $g(x)=x\ln x-(x-1)>0=g(1)$,所以 $f'(x)=\dfrac{x\ln x-(x-1)}{x^2\ln^2x}>0.(0<x<1$ 或 $x>1)$,由此得 $f(x)$ 严格单增,即证.

372.(武汉大学,2000年)　函数 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 区间上的拉格朗日中值公式为

$$f(x)-f(0)=f'(\theta x)x,\text{其中 } 0<\theta<1, \qquad ①$$

且 θ 是与 $f(x)$ 及 x 有关的量,对 $f(x)=\arctan x$,求当 $x\to0+$ 时 θ 的极限值.

解　$\because f(0)=\arctan0=0,f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,由①式有

$$f(x)=\arctan x=f(0)+f'(\theta x)\cdot x=\frac{1}{1+(\theta x)^2}\cdot x \qquad ②$$

由 ② 解得：$\theta^2=\dfrac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}$. ③

由罗比塔法则

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{2x\arctan x+\dfrac{x^2}{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x+(2+2x^2)\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+2x\arctan x+2}=\frac{1}{3}. \qquad ④$$

由 ③,④ 以及 $0<\theta<1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0+}\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

373.（华中师范大学,2001 年） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足

$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha},\forall x,y\in[a,b]$, ①

其中 $M>0,\alpha>1$ 为常数,证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

证 由 ① 式可得

$$0\leqslant\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leqslant M|x-y|^{\alpha-1} \qquad ②$$

$\forall x\in[a,b]$,固定 x,令 $y\to x$,由 ② 式及两边夹法则

$\therefore \lim\limits_{y\to x}\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=0$,

$\therefore \lim\limits_{y\to x}\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}=0$,

此即有 $f'(x)=0,\forall x\in[a,b]$,因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

374.（华东水利学院） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微,若 ξ 为 (a,b) 内一定点 $f(\xi)>0,(x-\xi)f'(x)\geqslant 0$,则在 $[a,b]$ 上总成立着 $f(x)>0$,证之.

证 当 $a\leqslant x\leqslant\xi$ 时,则 $x-\xi\leqslant 0$,由 $(x-\xi)f'(x)\geqslant 0$,

$\therefore f'(x)\leqslant 0,\forall x\in[a,\xi]$,从而 $f(x)$ 在 $[a,\xi]$ 内单调下降,

$\therefore f(x)\geqslant f(\xi)>0,\forall x\in[a,\xi]$ ①

当 $x\in[\xi,b]$,有 $x-\xi\geqslant 0$,再由 $(x-1)f'(x)\geqslant 0$,可得 $f'(x)\geqslant 0$. 因此 $f(x)$ 在 $[3,b]$ 上单调上升,从而

$$f(x)\geqslant f(\xi)>0,\forall x\in[\xi,b]. \qquad ②$$

由 ①,② 两式可得

$f(x)>0,\forall x\in[a,b]$.

375.(西北电讯工程学院) 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内可微,且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0$,证明:$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证 由 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0$,则对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $M<0$,当 $x<M$ 时,有

$$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\forall x<M. \quad ①$$

再由中值定理

$$\frac{f(M)-f(x)}{M-x}=f'(\xi),(x<\xi<M), \quad ②$$

$$\therefore |f(x)|-|f(M)|\leqslant|f(x)-f(M)|=|M-x||f'(\xi)|$$

$$<(M-x)\cdot\frac{\varepsilon}{2},\forall x<M, \quad ③$$

$$\therefore \left|\frac{f(x)}{x}\right|<\frac{|f(M)|}{|x|}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{M-x}{|x|},\forall x<M \quad ④$$

现固定 M,则存在 $M_1<M$,使

$$\frac{|f(M)|}{|x|}<\frac{\varepsilon}{2},\forall x<M_1, \quad ⑤$$

由 ④,⑤,对 $\forall x<M_1$,

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{M-x}{|x|}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

此即:$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

376.(河北工学院) (1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{x+1}$;

(2) 利用泰勒公式求极限:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right]^3=e^3$.

(2) 由泰勒公式:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{\sin(\xi+\frac{5}{2}\pi)}{5!}x^5\right]-x}{x\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{\sin(\xi+\frac{5}{2}\pi)}{5!}x^5\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{\sin(\xi+\frac{5}{2}\pi)}{5!}x^5}{x^2\left[1-\frac{x^2}{3}+\frac{\sin(\xi+\frac{5}{2}\pi)}{5!}x^4\right]}=0.$$

(其中 ξ 在 0 与 x 之间).

377.(华中师范大学,2001 年) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导,$f'(a)=f'(b)=0$,并存在 $c\in(a,b)$ 点有

$$f(c)=\max_{a\le x\le b}f(x) \qquad ①$$

证明:方程 $f'''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

证 由 ① 式及费马定理知 $f'(c)=0$,这样有

$f'(a)=f'(c)=f'(b)=0.$

由罗尔定理知存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$,使得

$$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=0. \qquad ②$$

由 ②,再用罗尔定理知 $\exists\,\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 有 $f'''(\xi_3)=0$.

因此方程 $f'''(x)=0$ 至少有一个根.

378.(南京大学、上海机械学院,南京林业学院,陕西机械学院,西北电讯工程学院) 设 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $a\le x\le b$ 上连续,在 $a<x<b$ 内可导,证明:必有在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi)\end{vmatrix}=0, \qquad ①$$

并由此说明拉格朗日中值定理和柯西定理都是它的特例.

证 作辅助函数

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\\ f(x) & g(x) & h(x)\end{vmatrix}$$

由于 $F(a)=F(b)=0$,由罗尔定理知存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$0=F'(\xi)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi)\end{vmatrix} \qquad ②$$

即证 ① 式.

若令 $h(x)=1$,则由 ② 式有

$$0=F'(\xi)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1\\ f(b) & g(b) & 1\\ f'(\xi) & g'(\xi) & 0\end{vmatrix}. \qquad ③$$

由 ③ 可得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

此即得柯西中值定理.

若令 $h(x)=1, g(x)=x$,由②有

$$0=F'(\xi)\begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f'(\xi) & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad ④$$

由④解得:$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

此即得拉格朗日中值定理.

379.(华中师范大学,1996年) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导 $(b>a>0)$,证明:必有 $\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

证 考虑 $g(x)=xf(x)$ 和 $h(x)=x$,则由题设及柯西定理有 $\dfrac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\dfrac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$,即 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

380.(四川联合大学,1999年) 设(1) $f(x), f'(x)$,在 $[a,b]$ 上连续;(2) $f''(x)$ 在 (a,b) 内存在;(3) $f(a)=f(b)=0$;(4)在 (a,b) 内存在点 c,使 $f(c)>0$.求证:在 (a,b) 内存在 ξ,使 $f''(\xi)<0$.

证 由题设知存在 $x_1\in(a,b)$,使 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得最大值,且由(4)知 $f(x_1)>0$. $x=x_1$ 也是极大值点,所以 $f'(x_1)=0$.由泰勒公式:

$$f(a)-f(x_1)=f'(x_1)(a-x_1)+\frac{f''(\xi)}{2!}(a-x_1)^2, \xi\in(a,x_1).$$

$\therefore f''(\xi)<0$.

381.(中国科技大学) 函数 $f(t), g(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微,且 $g'(t)\neq 0$, $\forall t\in[a,b]$,证明:必存在 $c\in[a,b]$,使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ 成立.

证 见第378题.

382.(长沙铁道学院) 证明:在区间 $-1<x<1$ 内,至少存在两点,使 $\dfrac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^n x]=0$,($n$ 为大于1的正整数).

证 设 $F(x)=(x^2-1)^n x$,则 $F(-1)=F(0)=F(1)=0$.

由罗尔定理,则存在 $\xi\in(-1,0)$ 和 $\xi_2\in(0,1)$,使 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$.但 $F'(x)=(x^2-1)^n+2n(x^2-1)^{n-1}\cdot x^2$.

$\therefore F'(-1)=F'(1)=0$.

即 $F'(-1)=F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=F'(1)=0$.再由罗尔定理,存在 $\eta_1\in(-1,\xi_1)$, $\eta_2\in(\xi_2,1)$ 使 $F''(\eta_1)=F''(\eta_2)=0$.

383.(北京大学,2001年,北京大学,1996年,华中师范大学2002年,东北师范大学,西北电讯工程学院) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可微,$f(a)\neq 0$,求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$$

解 在有限增量公式$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(|x-a|)$中，令$x=a+\frac{1}{n}$ 则$f(a+\frac{1}{n})=f(a)+f'(a)\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})$.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{f'(a)}{f(a)}\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right]^n$$
$$=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

384.(华中师范大学,2001年;东北师范大学,复旦大学,南京大学) 设$f(x)$在$[0,2]$上二次可微,且$|f(x)|\leqslant 1$, $|f''(x)|\leqslant 1$.证明:$|f'(x)|\leqslant 2$.

证 $f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(2-x)^2$,

$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(-x)^2$

$\therefore f(2)-f(0)=2f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(2-x)^2-\frac{1}{2}f''(\eta)x^2$.

$\therefore |f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}[|f(2)|+|f(0)|+\frac{1}{2}(2-x)^2+\frac{1}{2}x^2]$

$\leqslant\frac{1}{2}[1+1+\frac{1}{2}(2-x)+x^2]\leqslant 2$.

385.(南京航空学院) 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上有二阶导数,
且当$0\leqslant x\leqslant 1$时,恒有$|f(x)|\leqslant 1$, $|f''(x)|\leqslant 2$.
证明:当$0\leqslant x\leqslant 1$时,$|f'(x)|\leqslant 3$.

证 $f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(1-x)^2$. ①

$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(-x)^2$. ②

由①-②得

$f'(x)=f(1)-f(0)-\frac{f''(\xi)}{2}(1-x)^2+\frac{f''(\eta)}{2}(-x)^2$

$\therefore |f'(x)|\leqslant 1+1+(x-1)^2+x^2\leqslant 3$.

386.(厦门大学,2000年) 设$f(x)$在$[0+\infty)$上具有连续二阶导数,又设$f(0)>0$,$f'(0)<0$,$f''(x)<0$,($x\in[0,+\infty)$.则在区间$(0,-\frac{f(0)}{f'(0)})$内至少有一个点ξ,使$f(\xi)=0$.

证 $x\in[0,+\infty)$,由泰勒公式有

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta)}{2!}x^2$,其中$\theta$在0与$x$之间.

$\therefore f\left[-\frac{f(0)}{f'(0)}\right]=f(0)-f(0)+\frac{f''(\theta)}{2!}\left[-\frac{f(0)}{f'(0)}\right]^2<0.$

而 $f(0)>0$，由零值定理，至少有一点 $\xi\in\left(0,-\frac{f(0)}{f'(0)}\right)$ 使 $f(\xi)=0$.

387.（华东师范大学，2001年） 证明：若 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导，但无界，则其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内亦必无界.

证 用反证法. 设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界，即 $\exists M>0$，使
$|f'(x)|\leqslant M,\forall x\in(a,b)$. $\forall x_0\in(a,b)$，再由有限增量公式
$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$，其中 ξ 在 x_0 与 x 之间
$\therefore |f(x)|\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)|\cdot|x-x_0|$
$\leqslant|f(x_0)|+M\cdot(b-a)=c,\forall x\in(a,b)$.
其中 $C=|f(x_0)|+M(b-a)$ 为常数，这与 $f(x)$ 无界的假设矛盾.
$\therefore f'(x)$ 在 (a,b) 内亦必有界.

388.（北京师范大学，2002年） 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，并且 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证 用反证法，若 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界，由上题知 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界，矛盾.

389.（东北工学院） 已知 $x>0$，证明：$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$.

证 令 $f(x)=x-\ln(1+x)$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0,(x>0)$.
所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调递增. 又 $f(0)=0$，因此
$f(x)>f(0)=0,(x>0)$. 此即 $x>\ln(1+x)$.

再令 $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$，则

$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0,(x>0)$.
所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调递增，又 $g(0)=0$.

$\therefore g(x)>g(0)=0,(x>0)$，此即 $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$.

$\therefore x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,(x>0)$.

390.（南京邮电学院） (1) 证明：若 $p>1$，则对于 $[0,1]$ 内任一 x 有
$x^p+(1-x)^p\geqslant\frac{1}{2^{p-1}}$；

(2) 证明：当 $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$ 时，方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0 \qquad ①$$

在(0,1)内至少有一实根.

证 (1) 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$,则

$f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$.

当 $x<\frac{1}{2}$ 时,$1-x>x$,从而 $f'(x)<0$.

当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$x>1-x$,从而 $f'(x)>0$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)=0$.这说明

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 取最小值 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{p-1}}$.

$\therefore x^p+(1-x)^p\geqslant\frac{1}{2^{p-1}},(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(2) 作辅助函数 $F(x)=\int_0^x(a_0t^n+a_1t^{n-1}+\cdots\cdots+a_n)\mathrm{d}t$. ②

$\therefore F(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots\cdots+a_nx$.

$\because F(0)=0,F(1)=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_n}{n}+\cdots\cdots+a_n=0$.由罗尔定理,在(0,1)内至少有一点 ξ,使 $F'(\xi)=0$.由②式知

$F'(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$,

$0=F(\xi)=a_0\xi^n+a_n\xi^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$

$\therefore$ ① 在(0,1)内至少有一实根.

391.(华中师范大学,2002年;吉林工业大学) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,$b>a>0$,$f(a)\neq f(b)$.证明:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

证 由拉格朗日中值定理有 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a+b)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} \qquad ①$$

令 $g(x)=x^2$,则由柯西中值定理,有 $\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} \qquad ②$$

由于 $g(x)=x^2$,由①、②得

$$f'(\xi)=(a+b)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=(a+b)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}.$$

392.(南开大学) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内有二阶导数,试证:存在 $c\in(a,b)$,使

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c).\qquad ①$$

证　令 $F(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(x)$. 由拉格朗日中值定理有　②

$F(\frac{a+b}{2})-F(a)=F'(\xi)(\frac{a+b}{2}-a),\left(\xi\in(a,\frac{a+b}{2})\right)$

$=[f'(\xi+\frac{b-a}{2})-f'(\xi)]\frac{b-a}{2}$

$=f''(c)\cdot(\frac{b-a}{2})^2$,其中 $c\in(\xi,\xi+\frac{b-a}{2})\subset(a,b)$.

另一方面,由②式

$F(\frac{a+b}{2})-F(a)$

$=[f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2})-f(\frac{a+b}{2})]-[f(a+\frac{b-a}{2})-f(a)]$

$=f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)$.　④

将④式代人③,即证①式.

393.(南京航空航天大学,1999年)　证明:若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,则 $\xi\in(0,1)$,便得 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(0)+f(1)-\frac{1}{8}f''(\xi)$.

证　由上题可得.

394.(华中师范大学,2002年)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负且三阶可导,方程 $f(x)=0$,在 (a,b) 内有两个不同实根,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f^{(3)}(\xi)=0$.

证　设 $f(x)$ 在 (a,b) 内两个不同实根为 $x_1<x_2$,即 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

由罗尔定理,存在 $c\in(x_1,x_2)$,使 $f'(c)=0$.　①

因为 $f(x)\geqslant 0$,从而 x_1,x_2 为 $f(x)$ 的极小值点,由费马定理

$\therefore f'(x_1)=f'(x_2)=0$.　②

由①,②对 $f'(x)$ 在 $[x_1,c]$ 和 $[c,x_2]$ 上用罗尔定理,则存在

$x_3\in(x_1,c)$,$x_4\in(c,x_2)$ 使 $f''(x_3)=f''(x_4)=0$.

再一次对 $f''(x)$ 在 $[x_3,x_4]$ 上用罗尔定理,$\exists\,\xi\in(x_3,x_4)\subset(a,b)$,使 $f^{(3)}(\xi)=0$.

395.(四川师范学院)　设 $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$,其中 n 是任一自然数,求证:方程 $f_n(x)\cdot f_{n+1}(x)=0$ 在实数域内有唯一实根.

证　$e^x=f_n(x)+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$,$\xi$ 在 0 与 x 之间,　①

当 $x\geqslant 0$ 时,$f_n(x)\geqslant 1$,因此,方程 $f_n(x)\cdot f_{n+1}(x)=0$ 无非负的实根.

当 $x<0$ 时,由 ① 式 $f_n(x)=e^x-\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$ ②

(1) 当 n 为偶数时,由 ② 知 $f_n(x)>0$,此时 $f_n(x)$ 也无负实根,从而方程 $f_n(x)\cdot f_{n+1}(x)=0$ 无实根,结论成立.

(2) 当 n 为奇数时,当 x 充分小时,$f_n(x)$ 为负数

$\therefore \exists a<0$,使 $f_n(a)<0$. ③

而 $f_n(0)=1>0$,由零点定理,$\therefore \exists x_0\in(a,0)$ 使 $f_n(x_0)=0$.

若方程 $f_n(x)\ \ f_{n+1}(x)=0$ 还有一个实根 $x_1\neq x_0$(设 $x_0<x_1$)

$f_n(x_1)\cdot f_{n+1}(x_1)=0$.

(ⅰ) 若 $f_n(x_1)=0$.则由罗尔定理 $\exists\xi\in(x_0,x_1)$,使 $f'_n(\xi)=0$.

即 $f_{n-1}(\xi)=0$,但 $n-1$ 是偶数,与上面(1) 矛盾.

(ⅱ) 若 $f_{n+1}(x_1)=0$. $n+1$ 是偶数与(1) 矛盾.

综上可知方程 $f_n(x)f_{n+1}(x)=0$ 在实数域内有唯一实根.

396.(中山大学) 证明:$\sin x+\tan x>2x,(0<x<\dfrac{\pi}{2})$.

证 令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$,则

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2$$

$$\geqslant\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-2\geqslant 2\sqrt{\cos^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}-2=0. \quad ①$$

且等号成立的条件是:

$\cos^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$,即 $\cos^4 x=1$.

$\therefore \cos x=1,x=\dfrac{\pi}{2}$,但 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,但 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

由 ① 可知,$f'(x)>0$,此即 $f(x)$ 严格单调递增.

而 $f(0)=0$,$\therefore$ 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时

$f(x)>0$,此即,$\sin x+\tan x>2x$.

397.(北京大学,哈尔滨电工学院) (1) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内二次可微,M_0,M_1,M_2 分别为 $|f(x)|,|f'(x)|,|f''(x)|$ 在 $(0,+\infty)$ 内的上确界,证明:$M_1^2<4M_0M_2$;

(2) 设 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 证明:

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0.$$

证 (1) $\forall x\in(0,+\infty)$ 和 $\forall h>0$,由泰勒公式有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot h^2,x<\xi<x+h.$$

解得：$f'(x)=\frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)]-\frac{1}{2}f''(\xi)h$.

$\therefore |f'(x)|\leqslant \frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}$.

若取 $h=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$，则

$|f'(x)|\leqslant 2(M_0M_2)^{\frac{1}{2}}$，

$|f'(x)|^2\leqslant 4M_0M_2$.

再由 x 的任意性，有

$$M_1^2\leqslant 4M_0M_2. \quad ①$$

(2) 设 $|f''(x)|\leqslant C$，因 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $x\geqslant N$ 时，

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon^2}{4C} \quad ②$$

由上面(1)知，在$(N+\infty)$上由①，②有

$M_1^2<4\cdot\frac{\varepsilon^2}{4C}\cdot C=\varepsilon^2$，

$\therefore |f'(x)|<M_1\leqslant\varepsilon$.

类似可证在$(-\infty,-N)$上有 $|f'(x)|<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$.

398.（华中师大学，2002年，湖南大学，北京师范大学，1996年） 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$，求证：$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\geqslant 8$.

证 设 $f(x)$ 在 $x=a(0<a<1)$ 处取最小值，所以

$f(a)=-1, f'(a)=0$.

由泰勒公式 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-a)^2$

$$=-1+\frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)^2. \quad ①$$

其中 ξ_x 在 a 与 x 之间. $\because f(0)=f(1)=0$，将它们代入①式有

$$0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}a^2，其中\ \xi_1\in(0,a) \quad ②$$

$$0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2，其中\ \xi_2\in(a,1). \quad ③$$

令 $f''(\xi_1)=c_1, f''(\xi_2)=c_2$，由②，③有

$0=-1+\frac{c_1}{2}a^2, 0=-1+\frac{c_2}{2}(1-a)^2$，

$\therefore c_1=\frac{2}{a^2}, c_2=\frac{2}{(1-a)^2}$.

(1) 若 $a < \frac{1}{2}$，则 $c_1 > 8$，

$\therefore \max\limits_{0\leq x\leq 1} f''(x) \geqslant f''(\xi_1) = c_1 > 8.$

(2) 若 $a \geqslant \frac{1}{2}$，则 $1 - a < \frac{1}{2}$，则 $c_2 > 8$，

$\therefore \max\limits_{0\leq x\leq 1} f''(x) \geqslant 8.$

399.（郑州大学） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶导数，试证：

必存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{2}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

证 令 M 满足

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{2}(b-a)^3 M. \qquad ①$$

再作辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{1}{2}(x-a)[f'(x) + f'(a)] + \frac{1}{12}(x-a)^3 M. \qquad ②$$

则 $F(a) = F(b) = 0$，由罗尔定理存在 $x_1 \in (a,b)$，使得

$$0 = F'(x_1) = \frac{1}{2}[f'(x_1) - f'(a) - (x_1 - a)f''(x_1)] + \frac{1}{4}(x-a)^2 M,$$

$$\therefore f'(a) = f'(x_1) + f''(x_1)(a - x_1) + \frac{1}{2}(x_1 - a)^2 M. \qquad ③$$

再由泰勒公式 $\exists \xi \in (a, x_1) \subset (a,b)$，使得

$$f'(a) = f'(x_1) + f''(x_1)(a - x_1) + \frac{1}{2}(x_1 - a)^2 f'''(\xi). \qquad ④$$

比较 ③，④ 可得 $M = f'''(\xi)$. ⑤

将 ⑤ 代入 ① 即证.

400.（吉林大学） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可微，并且 $f(a) = f(b)$. 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不等于一常数，则必有两点 $\xi, \eta \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) > 0, f'(\eta) < 0$.

证 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不等于常数，则 $f'(x)$ 不恒等于0，下面用反证法. 不失一般设 $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in (a,b)$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增，所以 $\forall x \in (a,b)$，有

$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

这与 $f(a) = f(b)$ 矛盾，所以 $\exists \xi, \eta \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) > 0$ 且 $f'(\eta) < 0$ 且两等号不能同时成立（否则 $f(x)$ 为常函数）.

401.（哈尔滨工业大学，2000 年，华中理工大学） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a) = f(b) = 0$，并且 $f'(a) \cdot f'(b) > 0$. 证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$.

证　分两种情况讨论：

(1) 若 $f'(a)>0$ 且 $f'(b)>0$，因为 $0<f'(a)=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

由保号性，故存在 $\delta_1>1$，使当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，有

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，即 $\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，

$\therefore f(x)>0$，取 $x_1\in(a,a+\delta_1)$，$\therefore f(x_1)>0$.

类似由 $f'(b)>0$，$\exists\,\delta_2>0$，使当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$，即 $\dfrac{f(x)}{x-b}>0$.

$\therefore f(x)<0$，取 $x_2\in(b-\delta_2,b)$，$\therefore f(x_2)<0$.

$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 两端函数值反号，故 $\exists\,\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

(2) 若 $f'(a)<0$ 且 $f'(b)<0$，类似可证 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

402.（大连理工大学）　已知在 $x>-1$ 的定义的可微分函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，　①

和 $f(0)=1$.

(1) 求 $f'(x)$；

(2) 证明：$f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 满足 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.　②

解　(1) 将 ① 式两边对 x 求导数

$$f''(x)+f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{f(x)}{x+1}=0.\qquad ③$$

③ $+\dfrac{1}{x+1}\times$ ① 得

$$f''(x)+\frac{x+2}{x+1}f'(x)=0.\qquad ④$$

解微分方程 ④ 得 $f'(x)=c\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$.　⑤

在 ① 式中，令 $x=0$ 得 $f'(0)=-f(0)=-1$.　⑥

由 ⑤，⑥ 可得 $c=-1$，

$$\therefore f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\qquad ⑦$$

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时，由 ⑦ 式知 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调减少，而 $f(0)=1$，

$\therefore f(x)\leqslant f(0)=1\quad(x\geqslant 0)$.　⑧

再令 $F(x)=f(x)-\mathrm{e}^{-x}$，则

$F'(x)=f'(x)+\mathrm{e}^{-x}$

$= -\dfrac{e^{-x}}{x+1} + e^{-x} = \dfrac{xe^{-x}}{x+1} \geqslant 0, (x \geqslant 0)$,

即 $F(x)$ 单调增加,但 $F(0) = f(0) - e^0 = 0$,从而 $F(x) \geqslant F(0) = 0$,此即 $f(x) \geqslant e^{-x}$,$(x \geqslant 0)$ ⑨

由 ⑧,⑨ 即证 $e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1, (x \geqslant 0)$.

403.(兰州大学,华中理工大学,四川大学,华东工程学院)

设 $0 < b \leqslant a$,证明不等式:$\dfrac{a-b}{a} \leqslant \ln\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{a-b}{b}$.

证 显然等式当且仅当 $a = b > 0$ 时成立,

下证 当 $0 < b < a$ 时,有 $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$. ①

作辅助函数 $f(x) = \ln x$,则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上满足拉格朗日中值定理,则 $\exists \xi \in (b,a)$ 使 $\dfrac{\ln a - \ln b}{a-b} = \dfrac{1}{\xi}$ ②

由于 $0 < b < \xi < a$,所以 $\dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{\xi} > \dfrac{1}{a}$. ③

由 ②,③ 有 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{\ln a - \ln b}{a-b} < \dfrac{1}{b}$.

$\therefore \dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$.

404.(湘潭大学,西安交通大学,西北电讯工程学院,大连轻工业学院) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $x > a$ 时,$f'(x) > k > 0$(k 为常数).证明:当 $f(a) < 0$ 时,方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(a, a - \dfrac{f(a)}{k})$ 内有且只有一个根.

证 由 $f(a) < 0$,$\therefore a - \dfrac{f(a)}{k} > a$.在区间 $[a, a - \dfrac{f(a)}{k}]$ 上应用拉格朗日中值定理

$$f(a - \frac{f(a)}{k}) - f(a) = f'(\xi)[(a - \frac{f(a)}{k}) - a] = f'(\xi)[-\frac{f(a)}{k}]$$ ①

其中 $\xi \in (a, a - \dfrac{f(a)}{k})$. $\because f'(\xi) > k$,由 ① 知

$\therefore f(a - \dfrac{f(a)}{k}) - f(a) > -f(a)$,

$f(a - \dfrac{f(a)}{k}) > 0$.

但 $f(a) < 0$,由零值定理,$\exists x_0 \in (a, a - \dfrac{f(a)}{k})$,使 $f(x_0) = 0$.又 $f'(x) >$

0,故 $f(x)$ 在 $(a, a-\frac{f(a)}{k})$ 上严格递增,所以方程 $f(x)=0$ 只有唯一实根 x.

405.(华中师范大学,2001 年) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导,
$f'(a)=f'(b)=0$,并在 $c\in(a,b)$ 点有 $f(c)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$,
证明:方程 $f'''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

证 $\because f(c)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$, $\therefore c$ 为 $f(x)$ 的最大值点,从而也是极大值点. $\therefore f'(c)=0$. 再由 $f'(a)=f'(b)=0$,对 $f'(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上运用罗尔定理,那么存在 $\xi_1\in(a,c)$, $\xi_2\in(c,b)$ 使 $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=0$. 再对 $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 运用罗尔定理,因此存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使 $f'''(\xi)=0$,此即证方程 $f'''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

406.(达布定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有有限导数,且 $f'(a)\cdot f'(b)<0$. 则至少存在 $c\in(a,b)$,使 $f'(c)=0$.

证 (1) 若 $f'(a)<0$, $f'(b)>0$. 则在 a 右边且与 a 充分近的点有 $f(a)>f(x)$.

同理,在 b 的左边且与 b 充分近的点 x,有 $f(x)<f(b)$. 由此可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值必在 (a,b) 内某点 c 达到. $\therefore f'(c)=0$.

(2) 若 $f'(a)>0$, $f'(b)<0$,类似可证.

407.(山东大学) 设 $f(x)$ 在无穷区间 $(x_0,+\infty)$ 上可微分两次,并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ 存在有限,试证:在区间 $(x_0,+\infty)$ 内至少有一点 ξ,满足 $f''(\xi)=0$.

证 用反证法,即不存在 ξ,使 $f''(\xi)=0$,那么有三种情况:

(1) 若 $\exists a,b$ 使 $f''(a)<0$, $f''(b)>0$,则由上题达布定理, $\exists c$ 在 a,b 之间,使得 $f''(c)=0$,矛盾.

(2) 若 $f''(x)>0$,从而 $f(x)$ 的图象是凹的,且位于任一点曲线切线的上方,再由

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A. \qquad ①$$

则存在 $c\in(x_0+\infty)$,使 $f'(c)=0$,但 $f''(x)>0$, $f'(x)$ 单调上升,从而 $x_1>c$,有 $f'(x_1)>0$. 过点 $(x_1,f(x_1))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线,其方程为 $y(x)-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$. 由 $f'(x_1)>0$, $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=+\infty$,而 $f(x)-y(x)>0$. ($\because y=f(x)$ 在切线上方). $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,这与①式矛盾.

(3) 若 $f''(x)<0$,也类似可证.

由于以上三种情况都不可能,所以 $\exists\xi\in(x_0,+\infty)$,使 $f''(\xi)=0$.

408.(中国人民大学,2000 年) 设 $\{f(x)\}$ 在 $[a,b]$ $(ab>0)$ 上连续,在

(a,b) 上可微，求证：有 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b & a \\ f(b) & f(a) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证　设 $g(x)=\frac{1}{x},h(x)=\frac{f(x)}{x}$.

由于 $ab>0$，$\therefore 0\notin[a,b]$，从而 $g(x),h(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $[g'(x)]^2+[h'(x)]^2=\frac{1}{x^4}\{1+[xf'(x)-f(x)]^2\}\neq 0,g(a)\neq g(b)$.

因此 $g(x),h(x)$ 满足柯西定理的条件，故 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{h(b)-h(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{h'(\xi)}{g'(\xi)}$.

即 $$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

整理可得 $\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$,

$$\therefore \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b & a \\ f(b) & f(a) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

409.（北京大学）　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可微，且满足不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant \ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}},\forall x\in(0,+\infty). \quad ①$$

试证明存在一点 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$.

证　令 $$g(x)=f(x)-\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}},x\in[0,+\infty), \quad ②$$

由 ① 式知　$f(0)=0$. $\therefore g(0)=f(0)-0=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\ln 1=0.$$

由 ① 与两边夹法则：

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

由 ①、② 两式知 $g(x)\leqslant 0,\forall x\in[0,+\infty)$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在最小值，设最小值点为 ξ，那么 $g'(\xi)=0$. 由 ② 得

$g'(x)=$

$$f'(x)-\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2x+1}\cdot\frac{2(x+\sqrt{1+x^2})-(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\cdot(2x+1)}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$$

$$=f'(x)-(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}).$$

由 $g'(\xi)=0$，所以 $f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$.

410.（哈尔滨工业大学，2000年） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可微，$f'(x)$ 在 (a,b) 内单调增，证明：对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$ 及 $\lambda\in[0,1]$ 有

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2). \quad ①$$

证　显然当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$ 时，①式显然成立，因此只讨论 $\lambda\in(0,1)$ 即可.

$\forall x_1,x_1\in[a,b]$，不失一般设 $x_1<x_2$，令

$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，$\therefore x_1<x<x_2$.

由拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(x_1,x)$，$\eta\in(x,x_2)$.

$$\lambda[f(x)-f(x_1)]+(1-\lambda)][f(x)-f(x_2)]$$
$$=\lambda f'(\xi)(x-x_1)+(1-\lambda)f'(\eta)(x-x_2). \quad ②$$

但是　$x-x_1=[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]-x_1=(1-\lambda)(x_2-x_1)$，　③

$x-x_2=[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]-x_2=\lambda(x_1-x_2)$.　④

将③，④代入②

$$\lambda[f(x)-f(x_1)]+(l-\lambda)[f(x)-f(x_2)]$$
$$=\lambda f'(\xi)(1-\lambda)(x_2-x_1)+(l-\lambda)\lambda f'(\eta)(x_1-x_2)$$
$$=\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)[f'(\xi)-f'(\eta)] \quad ⑤$$

由于 $f'(x)$ 单调递增，$x_1<\xi<x<\eta<x_2$，

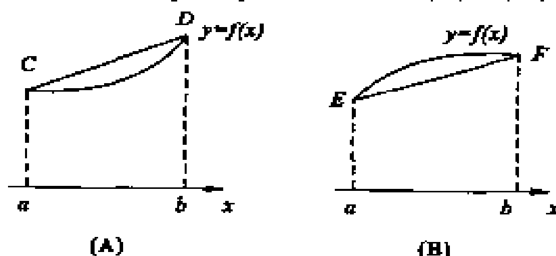
$\therefore f'(\xi)-f'(\eta)\leqslant 0$.

由⑤知　$\lambda[f(x)-f(x_1)]+(1-\lambda)[f(x)-f(x_2)]\leqslant 0$，

解得：$f(x)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

$\therefore f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

注：(1) 满足本题①式的函数 $f(x)$ 称为凸函数(或称为下凸函数，其图象如(A)所示，其特征是曲线 $y=f(x)$ 上任一点均在弦 CD 的下方.



第410题图

类似　若函数 $y=f(x),x\in[a,b],\forall x_1,x_2\in[a,b],\lambda\in[0,1]$ 满足 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 为凹函数(或上凸函数,其图象如(B)所示),其特征是曲线 $y=f(x)$ 上任一点均在该 EF 的上方.

(2) 本题的逆命题也成立,即若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可微,且 $f'(x)$ 单调递增,则 $f(x)$ 为凸函数,即 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$. 其中 $x_1,x_2\in[a,b],\lambda\in[0,1]$.

411. **(复旦大学,1999 年)**　比较 π^e 与 e^π 的大小,并说明理由.

解法 1　令 $\pi=e+a(a>0)$. 由于 $\dfrac{\pi^e}{e^\pi}=\dfrac{(e+a)^e}{e^{e+a}}=\dfrac{1}{e^a}\cdot\dfrac{(e+a)^e}{e^e}$

$$=\frac{1}{e^a}\left[\left(1+\frac{a}{e}\right)^{\frac{e}{a}}\right]^a<\frac{1}{e^a}\cdot e^a=1.$$

$\therefore e^\pi>\pi^e$.

解法 2　要证 $e^\pi>\pi^e$,只要证明 $\pi>e\ln\pi$,

只要证明 $\dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}$.　　①,

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},(x\geqslant e)$. 则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0(x>e)$,于是 $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递减,而 $\pi>e,f(\pi)=\dfrac{\ln\pi}{\pi}<f(e)=\dfrac{\ln e}{e}$.

解法 3　$\dfrac{\ln\pi}{\pi}-\dfrac{\ln e}{e}=\displaystyle\int_e^\pi d\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\int_e^\pi\frac{1-\ln x}{x^2}dx$.

但 $x\in(e,\pi)$ 时,$\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$,

$\therefore\displaystyle\int_e^\pi\frac{1-\ln x}{x^2}dx<0$,即 $\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{\ln e}{e}$.

412. **(北京大学,1991 年)**　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调下降,可微,如果当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$0<f(x)<|f'(x)|$ 成立,则当 $0<x<1$ 时,必有

$$xf(x)>\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right).$$

解　由 $0<f(x)<|f'(x)|$ 及 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调下降有

$0<f(x)<|f'(x)|=-f'(x)$,所以 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}<-1$.

当 $0<x<1$ 时,

$\displaystyle\int_x^1\frac{f'(t)}{f(t)}dt<\int_x^1(-1)dx$,即 $\ln\dfrac{f(x)}{f(x)}<x-1$,亦即 $\dfrac{f(1)}{f(x)}<e^{x-1}$.　　①

$\displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f'(t)}{f(t)}dt<\int_1^{\frac{1}{x}}(-1)dt$. 即 $\ln\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(1)}<1-\dfrac{1}{x}$,亦即 $\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(1)}<e^{1-\frac{1}{x}}$.②

由①,②得

$$\frac{f(1)}{f(x)}\cdot\frac{f(\frac{1}{x})}{f(1)} < e^{x-1}\cdot e^{1-\frac{1}{x}},\text{即}\frac{f(\frac{1}{x})}{f(x)} < e^{x-\frac{1}{x}}.$$

要证 $xf(x) > \frac{1}{x}f(\frac{1}{x})$,只须证 $e^{x-\frac{1}{x}} \leqslant x^2$ 即可. 即须证 $x-\frac{1}{x} \leqslant 2\ln x$.

令 $g(x) = x-\frac{1}{x}-2\ln x, g'(x) = 1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geqslant 0$,所以 $g(x) \leqslant g(1) = 0(0 < x < 1)$. 即当 $0 < x < 1$ 时, $x-\frac{1}{x} \leqslant 2\ln x$. 从而 $e^{x-\frac{1}{x}} \leqslant x^2$,所以当 $0 < x < 1$ 时,

$$\frac{f(\frac{1}{x})}{f(x)} < e^{x-\frac{1}{x}} \leqslant x^2,\text{即 } xf(x) > \frac{1}{x}f(\frac{1}{x}).$$

413.(华东师范大学,2000 年)　设 f 在 $[a,b]$ 中任意两点都具有介值性,而且 f 在 (a,b) 内可导, $|f'(x)| \leqslant k$(正常数), $x \in (a,b)$.

证明: f 在点 a 右连续,(同理在点 b 左连续).

证　由于 f 在 $[a,b]$ 中任意两点都具有介值性及可导,故对 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in (a,b)$. $\exists a_x \in (a,x)$. 使得 $|f(a)-f(a_x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2k}$,则当 $|x-a| < \delta$ 时,当 $x \in (a,b)$ 时,

$|f(x)-f(a)| \leqslant |f(x)-f(a_x)| + |f(a_x)-f(a)|$

$= |f'(\xi)||x-a_x| + \frac{\xi}{2} < k\cdot\frac{\varepsilon}{2k}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

所以 $f(x)$ 在点 a 右连续.

类似可证 f 在点 b 左连续.

414. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 具有二阶连续导数,且

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0. \quad ①$$

求证:(1) 存在 $x_n \in (a,+\infty)$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$,且 $\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0$;

(2) 存在 $\xi \in (a,+\infty)$,使得 $f''(\xi) = 0$.

证　(1) $f(n+1)-f(n) = f'(x_n)((n-1)-n) = f'(x_n)$,

$$n < x_n < n+1. \quad ②$$

则 $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$,且由②式与①有

$\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to+\infty}[f(n+1)-f(n)]$

$= \lim_{n\to+\infty} f(n+1) - \lim_{n\to+\infty} f(n) = 0-0 = 0.$

(2) 用反证法.若 $f''(x)\neq 0,\forall x\in(a,+\infty)$.则 $f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 恒大于 0 或恒小于 0.

不失一般设 $f''(x)>0,\forall x\in(a,+\infty)$.则 $f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 严格单调增,但由(1)知 $\lim\limits_{n\to+\infty}f'(x_n)=0$.所以 $f'(x)<0,\forall x\in(a,+\infty)$.即 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 严格单调减,这与①式矛盾.仿上可知 $f''(x)<0$,

$\forall x\in(a,+\infty)$ 亦不成立.从而 $\exists\xi\in(a,+\infty)$,使 $f''(\xi)=0$.

415.(浙江大学,2000 年) 设 a,b,c 为三个实数,证明:

方程 $e^x=ax^2+bx+c$ 的根不超过三个.

证 令 $F(x)=ax^2+bx+c-e^x$,则 $F'(x)=2ax+b-e^x,F''(x)=2a-e^x,F'''(x)=-e^x$.

用反证法,设原方程的根超过 3 个,那么 $F(x)$ 至少有 4 个零点,不妨设为 $x_1<x_2<x_3<x_4$,那么由罗尔定理,存在 $x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3<\xi_3<x_4$,使 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=F'(\xi_3)=0$.

再用罗尔定理,存在 $\xi_1<\eta_1<\xi_2<\eta_2<\xi_3$,使 $F''(\eta_1)=F''(\eta_2)=0$.

再由罗尔定理存在 $\eta_1<\alpha<\eta_2$,使 $F'''(\alpha)=0$.

但 $F'''(x)=-e^x,F'''(\alpha)=-e^\alpha\neq 0$,矛盾.即证.

416.(北京师范大学,1993 年,国防科技大学) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 二阶可导,且 $f(a)=f(b)=0$.求证:若存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)>0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)<0$.

证 分别在 $[a,c],[c,b]$ 上应用拉格朗日定理,则存在 $\xi_1\in(a,c)$ 和 $\xi_2\in(c,b)$ 有

$$f(c)-f(a)=f'(\xi_1)(c-a,) \quad ①$$

$$f(b)-f(c)=f'(\xi_2)(b-c), \quad ②$$

由于 $f(a)=f(b)=0,f(c)>0$,从而由①,②两式知

$$f'(\xi_1)>0,f'(\xi_2)<0. \quad ③$$

再在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上用拉格朗日中值定理,$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$,有

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1). \quad ④$$

由③,④可证得 $f''(\xi)<0$,其中 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$.

417.(中国科学院) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一阶可微,且 $f(0)=0$,$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,试证:$\dfrac{f(x)}{x}$ 亦在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

证 $$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},\forall x\in(0,+\infty). \quad ①$$

$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$,其中 $0<\xi<x$.

$\therefore f(x) \geqslant f'(x) \cdot x$.

代入①式得$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' \leqslant 0, \forall x \in (0, +\infty)$.

$\therefore \frac{f(x)}{x}$在$(0, +\infty)$单调递减.

418.(北方交通大学)　设$f(x) = \int_0^x e^{-t}\cos t dt$,试求:(1)$F(0), F'(0), F''(0)$;

(2)$F(x)$在闭区间$[0,\pi]$上的极大值与极小值.

解　(1)$F(0) = \int_0^0 e^{-t}\cos t dt = 0$.

$$F'(x) = e^{-x}\cos x, \tag{①}$$

$\therefore F'(0) = 1$.

$F''(x) = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$,

$\therefore F''(0) = -1$.

(2)令$F'(x) = 0, x \in [0,\pi]$,

方程$e^{-x}\cos x = 0$,在$[0,\pi]$上有一个根$x = \frac{\pi}{2}$.

当$x > \frac{\pi}{2}$时$F'(x) < 0$;当$x < \frac{\pi}{2}$时,$F'(x) > 0$.所以在$x = \frac{\pi}{2}$时,$F(x)$取极大值为

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}\cos t dt = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} + 1}{2}.$$

由$F(x)$在$x = \frac{\pi}{2}$的两边单调性,可知$x = 0, x = \pi, F(x)$取极小值.

$$F(0) = 0, F(\pi) = \int_0^{\pi} e^{-t}\cos t dt = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}.$$

419.(哈尔滨工业大学,2000年,华中理工大学,华中师范大学,1996年)　设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a) = f(b) = 0, f'(a) \cdot f'(b) > 0$.

证明:存在$\xi \in (a,b)$,使$f(\xi) = 0$.

证　(1)设$f'(a) > 0, f'(b) > 0$.

$\because \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0$.

故$\exists \delta_1 > 0$,有$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0, x \in (a, a + \delta_1)$.

$\because f(a) = 0, \therefore f(x) > 0, x \in (a, a + \delta_1)$

取$x_1 \in (a, a + \delta_1)$则$f(x_1) > 0$.

$\because \lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b) > 0$, $\exists \delta_2 > 0$,使

$\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0, x \in (b - \delta_2, b)$.

$\because f(b) = 0, \therefore f(x) < 0, x \in (b - \delta_2, b)$.

取 $x_2 \in (b - \delta_2, b)$,则 $f(x_2) < 0$.

$\therefore \exists \xi \in (x_1, x_2)$,使 $f(\xi) = 0$.

(2) 当 $f'(a) < 0, f'(b) < 0$.类似可证.

420.(哈尔滨工业大学,2002年,北京科技大学,2001年) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二次可微,且 $f''(x) > 0, (a < x < b)$. $\lambda_i > 0 (i = 1, 2 \cdots\cdots, n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. $x_1, \cdots\cdots, x_n$ 为 (a, b) 中 n 个点,求证:$f(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda x_i) < \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

证 令 $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$,由于 $f''(x) > 0$ 及泰勒公式,有

$f(x_i) = f(a) + f'(a)(x_i - a) + \dfrac{1}{2} f''(\xi_i)(x_i - a)^2 > f(a) + f'(a)(x_i - a)$,其中 ξ_i 在 x_i 与 a 之间,$(i = 1, 2 \cdots\cdots, n)$.

用 λ_i 乘上式两端,并将它们相加,并注意 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,所以

$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) > f(a) + \sum\limits_{i=1}^{n} f(a) \lambda_i (x_i - a) = f(a)$.

$\because \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - a = a - a = 0$.

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) > f(a) = f(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)$.

注:类似可证:若 $f(x)$ 在 (a, b) 内二次可微,$f''(x) < 0, (a < x < b)$. $\forall \lambda_i > 0 (i = 1, 2 \cdots\cdots, n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_1, \cdots\cdots, x_n \in (a, b)$,则

$f(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) > \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

421.(华中师范大学) 设函数 $f(x), g(x), p(x)$ 有连续的二阶导数,试求

$$\lim_{h \to \infty} \frac{1}{h^3} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f(x+h) & g(x+h) & p(x+h) \\ f(x+2h) & g(x+2h) & p(x+2h) \end{vmatrix}$$

解 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f(x+h) & g(x+h) & p(x+h) \\ f(x+2h) & g(x+2h) & p(x+2h) \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}h^2 & g(x)+g'(x)h+\dfrac{g''(\xi_2)}{2}h^2 & p(x)+p'(x)h+\dfrac{p''(\xi_3)}{2}h^2 \\ f(x)+f'(x)2h+\dfrac{f''(\xi_4)}{2}4h^2 & g(x)+g'(x)2h+\dfrac{g''(\xi_5)}{2}4h^2 & p(x)+p'(x)2h+\dfrac{p''(\xi_6)}{2}4h^2 \end{vmatrix}$$

$$=2h^2\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f'(x)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}h & g'(x)+\dfrac{g''(\xi_2)}{2}h & p'(x)+\dfrac{p''(\xi_3)}{2}h \\ f'(x)+f''(\xi_4)h & g'(x)+g''(\xi_5)h & p'(x)+p''(\xi_6)h \end{vmatrix}$$

$$=2h^2\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f'(x) & g'(x) & p'(x) \\ f'(x)+f''(\xi_4)h & g'(x)+g'(\xi_5)h & p'(x)+p''(\xi_6)h \end{vmatrix}$$

$$+h^3\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f''(\xi_1) & g''(\xi_2) & p''(\xi_3) \\ f'(x)+f''(\xi_4)h & g'(x)+g''(\xi_5)h & p'(x)+p''(\xi_6)h \end{vmatrix}$$

$$=2h^3\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f'(x) & g'(x) & p'(x) \\ f''(\xi_4) & g''(\xi_5) & p''(\xi_6) \end{vmatrix}+h^3\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f''(\xi_1) & g''(\xi_2) & p''(\xi_3) \\ f'(x) & g'(x) & p'(x) \end{vmatrix}+h^4\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f''(\xi_1) & g''(\xi_2) & p''(\xi_3) \\ f''(\xi_4) & g''(\xi_5) & p''(\xi_6) \end{vmatrix} \quad ①$$

$$\lim_{h\to0}f''(\xi_1)=\lim_{h\to0}f''(\xi_4)=f''(x), \quad ②$$

$$\lim_{h\to0}g''(\xi_2)=\lim_{h\to0}g''(\xi_5)=g''(x) \quad ③$$

$$\lim_{h\to0}p''(\xi_3)=\lim_{h\to0}p''(\xi_6)=p''(x). \quad ④$$

由①,②,③,④

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{1}{h^3}\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f(x+h) & g(x+h) & p(x+h) \\ f(x+2h) & g(x+2h) & p(x+2h) \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f'(x) & g'(x) & p'(x) \\ f''(x) & g''(x) & p''(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f''(x) & g''(x) & p''(x) \\ f'(x) & g'(x) & p'(x) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f'(x) & g'(x) & p'(x) \\ f''(x) & g''(x) & p''(x) \end{vmatrix}.$$

422.(山东海洋学院) 证明:对一切 $m>0, n>0$ 和 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 均有

$$0 \leqslant \sin^n x \cdot \cos^m x \leqslant \frac{n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}}{(n+m)^{\frac{n+m}{2}}}. \quad ①$$

证：令 $f(x) = \sin^n x \cdot \cos^m x$，则 $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. ②

又 $f'(x) = \sin^{n-1} x \cos^{m-1} x (n\cos^2 x - m\sin^2 x)$. ③

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{n}{m+n}}$，则 $\cos\alpha = \sqrt{\frac{m}{m+n}}$，

则由 ③ 可得 $f'(x) = \sin^{n-1} x \cdot \cos^{m-1} x \cdot \sin(\alpha - x) \cdot \cos(\alpha + x)$.

令 $f'(x) = 0$，在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 中，解得 $x = 0, x = \alpha, x = \frac{\pi}{2}$，由于

$$f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0, f(\alpha) = \sin^n\alpha\cos^m\alpha = \frac{n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}}{(n+m)^{\frac{n+m}{2}}} > 0.$$

$\therefore f(x)$，在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上最大值为 $f(\alpha)$，最小值为 0，从而即证 ① 式.

423.（上海纺织工学院）　设二次函数 $H(x) = a + bx + cx^2$，并知 $H(0) = H_1, H(t) = H_2, H(2t) = H_3$，（$t$ 为定值）.

试证：函数 $H(x)$ 在某一点 x_0 处取极小值的条件是：$H_3 + H_1 > 2H_2$.

证　令 $F(x) = H(x+t) - H(x)$，则由拉格朗日中值定理，则

$F(t) - F(0) = H_3 + H_1 - 2H_2$. ①

由拉格朗日中值定理，有 $F(t) - F(0) = F'(\xi)t$

$= [H'(\xi + t)] - H'(\xi)]t$

$= H''(\xi + \eta)t^2 = 2ct$. ②

其中 $0 < \xi < t, 0 < \eta < t$. 由 ①，② 两式可知

$H_3 + H_1 > 2H_2 \Leftrightarrow c > 0, \Leftrightarrow H(x)$ 在某一点 x_0 取极小值（因为 $H(x)$）是二次函数，$c > 0$，必有极小值）.

424.（太原机械学院）　求曲线 $x = \frac{3at}{1+t}, y = \frac{3at^2}{1+t}$，在 $t = 2$ 处的切线方程与法线方程.

解　当 $t = 2$ 时，有 $x = \frac{6a}{5}, y = \frac{12a}{5}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-t^2}, \therefore \frac{dy}{dx}\Big|_{t=2} = -\frac{4}{3}$.

故当 $t = 2$ 处的切线方程为：$y - \frac{12a}{5} = -\frac{4}{3}(x - \frac{6a}{5})$，即 $4x + 3y - 12a = 0$.

法线方程为

$y - \frac{12a}{5} = \frac{3}{4}(x - \frac{6a}{5})$，即 $3x - 4y + 6a = 0$.

425.（山东工学院） 求曲线 $y = \tan x$ 在点$(\frac{\pi}{4},1)$处的曲率圆方程.

解 $\because y = \tan x$，所以 $y' = \sec^2 x, y'' = 2\sec^2 x \cdot \tan x$，

$\therefore y'(\frac{\pi}{4}) = 2, y''(\frac{\pi}{4}) = 4.$

设曲率圆中心的坐标为(a,b)，曲率半径为 R，则

$$a = \left[x - \frac{y'(1+(y')^2)}{y''}\right]_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi - 10}{4},$$

$$b = \left[y + \frac{1+y'^2}{y''}\right]_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{4}.$$

$$k = \left[\frac{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right]_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}.$$

故所求曲率圆方程为

$$(x - \frac{\pi - 10}{4})^2 + (y - \frac{9}{4})^2 = \frac{125}{16}.$$

426.（无锡轻工业学院） 试确定 a,b,c 使 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有一拐点$(1,-1)$，且在 $x = 0$ 处有极大值 1.

解 $\because y = x^3 + ax^2 + bx + c$，

$\therefore y' = 3x^2 + 2ax + b$，

$y'' = 6x + 2a.$

$\because (1,-1)$ 为拐点，$\therefore y''|_{x=1} = 0$，解得 $a = -3$.

再由于 $x = 0$ 处有极大值

$\therefore y'|_{x=0} = 0$，解得 $b = 0$.

$\because (0,1)$ 为 $y = f(x)$ 的极大值

$\therefore 1 = y|_{x=0} = c$.从而 $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

427.（长沙铁道学院） 证明：当 $e < x_1 < x_2$ 时.

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{\ln x_1}{\ln x_2} < \frac{x_2}{x_1}.$$

证 作辅助函数 $F(x) = \frac{\ln x}{x}$，

$\therefore F'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$

当 $e < x$ 时，$F'(x) < 0$，$\therefore F(x)$ 单调减少，于是当 $e < x_1 < x_2$ 时，

$F(x_2) < F(x_1)$，此即$\frac{\ln x_2}{x_2} < \frac{\ln x_1}{x_1}$. ①

$\because \ln x_2 > 1, \ln x_1 > 1$，由 ① 有

$$\frac{\ln x_1}{\ln x_2} > \frac{x_1}{x_2}. \qquad ②$$

再令 $G(x) = x\ln x$, $\therefore G'(x) = 1 + \ln x$.

当 $e < x$ 时, $G'(x) > 0$, $\therefore G(x)$ 单调增加, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$G(x_1) < G(x_2)$. $\therefore x_1\ln x_1 < x_2\ln x_2$, $\qquad \dfrac{\ln x_1}{\ln x_2} < \dfrac{x_2}{x_2}$. ③

由 ②, ③ 即证.

428. (北京邮电学院) 求证: $2^n \geqslant 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$, ($n \geqslant 1$ 为自然数).

证 设 $f(x) = 2^x - 1 - x\sqrt{2^{x-1}}$, ($x \geqslant 1$). 则

$$f'(x) = 2^{\frac{x-1}{2}}\left(2^{\frac{x+1}{2}}\ln 2 - 1 - \frac{x}{2}\ln 2\right). \qquad ①$$

又设 $F(x) = 2^{\frac{x+1}{2}} \cdot \ln 2 - 1 - \dfrac{x}{2}\ln 2$, ($x \geqslant 1$).

$$\therefore F(1) = \frac{3}{2}\ln 2 - 1 = \ln\sqrt{8} - \ln e = \ln\frac{2\sqrt{2}}{e} > 0.$$

$$F'(x) = 2^{\frac{x+1}{2}}(\ln 2)^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 > 0, (x \geqslant 1).$$

$\therefore F(x)$ 单调增加, 当 $x \geqslant 1$ 时, 有 $F(x) \geqslant F(1) > 0$. ②

由 ①, ② 知当 $x \geqslant 1$ 时, $f'(x) > 0$., $f(x)$ 也单调增加.

当 $x \geqslant 1$ 时, 有 $f(x) \geqslant f(1) = 0$, 此即 $2^x \geqslant 1 + x\sqrt{2^{x-1}}$,

$\therefore 2^n \geqslant 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$, ($n \geqslant 1$ 为自然数).

429. (武汉理工大学) 用微分中值定理证明: 当 $s > 0$ 时,

$$\frac{n^{s+1}}{s+1} < 1^s + 2^s + \cdots\cdots + n^s < \frac{(n+1)^{s+1}}{s+1}.$$

证 令 $f(x) = x^{s+1}$, 则 $f'(x) = (s+1)x^s$, $f''(x) = s(s+1)x^{s-1}$.

分别在 $[0,1]$, $[1,2]$, $\cdots\cdots$, $[n-1,n]$, $[n,n+1]$ 上对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 有 $1^{s+1} - 0^{s+1} = (s+1)\xi_1^s$, $\xi_1 \in (0,1)$.

$2^{s+1} - 1^{s+1} = (s+1)\xi_2^s$, $\xi_2 \in (1,2)$.

…………

$n^{s+1} - (n-1)^{s+1} = (s+1)\xi_n^s$, $\xi n \in (n-1, n)$,

$(n+1)^{s+1} - n^{s+1} = (s+1)\xi_{n+1}^{s+1}$. $\xi_{n+1} \in (n, n+1)$.

$\because s > 0, x > 0$, 所以 $f''(x) > 0$, 即 $f'(x)$ 是严格单调递增函数.

$\therefore f'(k-1) < f'(\xi_k) < f'(k)$, $k = 1, 2, \cdots\cdots n+1$.

$\therefore (s+1)(k-1)^s < (s+1)\xi_k^s < (s+1)k^s$, $k = 1, 2\cdots\cdots, n+1$.

代入上面 $n+1$ 个式子得 $(s+1)0^s < 1^{s+1} - 0^{s+1} < (s+1)1^s$.

$(s+1)1^s < 2^{s+1} - 1^{s+1} < (s+1)2^s$.

………………

$(s+1)(n-1)^s < n^{s+1} - (n-1)^{s+1} < (s+1)n^s$.

$(s+1)n^s < (n+1)^{s+1} - n^{s+1} < (s+1)(n+1)^s$.

将上面前 $n+1$ 个式子的左边相加得

$(s+1)[0^s + 1^s + 2^s + \cdots\cdots + (n-1)^s + n^s] < (n+1)^{s+1}$

$$\therefore 1^s + 2^s + \cdots\cdots + (n-1)^s + n^s < \frac{(n+1)^{s+1}}{s+1}. \quad ①$$

再将上面前 n 个式子右边相加得

$n^{s+1} < (s+1)(1^s + 2^s + \cdots\cdots + n^s)$

$$\therefore \frac{n^{s+1}}{s+1} < 1^s + 2^s + \cdots\cdots + n^s. \quad ②$$

由 ①,② 即证.

430.(同济大学,成都科技大学,华东化工学院,武汉水利电力大学) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,在 $(0,+\infty)$ 内可微,且 $f'(x)$ 单调增加,

$f(0)=0$,证明:$g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

证 由拉格朗日中值定理,对 $x\in(0,+\infty)$,有

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(\xi)$,其中 $0<\xi<x$.

此即 $\frac{f(x)}{x} = f'(\xi)$. 但 $g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = f'(\xi)$,因此

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left[f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{x}[f'(x) - f'(\xi)]. \quad ①$$

由于 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加,由 ① 式知 $g'(x)>0,(x>0)$.

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

431.(陕西师范大学,天津大学,西北电讯工程学院,合肥工业大学,广西大学,昆明工学院,南京化工学院) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f''(x)>0$,试证明:对于 $[a,b]$ 上任意两个不同的点 x_1,x_2,有

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)] > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

证 设 $x_1<x_2$,对于 $f(x)$ 在 $[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}]$,$[\frac{x_1+x_2}{2},x_2]$ 上用拉格朗日中值定理,得

$$\frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_2}=f'(\xi_1),\text{其中 }\xi_1\in(x_1,\frac{x_1+x_2}{2}).$$

$$\frac{f(x_2)-f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}=f'(\xi_2),\text{其中 }\xi_2\in(\frac{x_1+x_2}{2},x_2).$$

又因为 $f''(x)>0$, $\therefore f'(x)$ 严格单调增加, $\therefore f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$. 则

$$\frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}<\frac{f(x_2)-f(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}.$$

解得 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f(\frac{x_1+x_2}{2})$.

432.(中山大学) 设 $p(x)$ 是 n 次多项式,试证:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{p^{(k)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{p^{(k)}(x)}{(k+1)!}x^{k+1} ①, p^{(0)}(x)\equiv p(x).$$

解 设 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$, 其中 $a_n\neq 0$.

$p^{(k)}(x)=a_nn(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)x^{n-k}+\cdots\cdots+a_k\cdot k!(k=0,1\cdots\cdots n)$

$\therefore p^{(k)}(0)=a_k\cdot k!,(k=0,1,2\cdots\cdots n)$.

令 $F(x)=\int_0^x p(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(x)=F(0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{p^{(k)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}$, ②

$$F(0)=F(x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}p^{(k)}(x)}{(k+1)!}\cdot x^{k+1}. \quad ③$$

② + ③,并消去 $F(0)+F(x)$,再移项即证 ① 式.

433.(四川大学) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续二导数, $f(0)=f(1)=0$ 且 $f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1)$

试证: $\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geqslant 4$.

证 因为 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,所以 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 内有最大值,设为 $y_0=f(x_0)$. 由 $f(x)\neq 0$,所以 $x_0\neq 0$. 从而

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0}=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi),(0<\xi<x_0), \quad ①$$

$$\frac{-y_0}{1-x_0}=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\eta),(x_0<\eta<1), \quad ②$$

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geqslant\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{y_0}\right|dx>\frac{1}{y_0}\left|\int_\xi^\eta f''(x)dx\right|$$

$$= \frac{1}{y_0} | f'(\eta) - f'(\xi) |$$

$$= \frac{1}{y_0} \left| \frac{-y_0}{1-x_0} - \frac{y_0}{x_0} \right| = \frac{1}{x_0(1-x_0)}. \qquad ③$$

由 ①,② 知 $0 < x_0 < 1$,则 $x_0(1-x_0) \leqslant \frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{x_0(1-x_0)} \geqslant 4. \qquad ④$$

由 ③,④ 即证

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geqslant 4.$$

434.【国防科技大学】 已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 处有极值 -2,试确定系数 a,b,并求出 $y = f(x)$ 所有极大、极小、拐点及描绘 $y = f(x)$ 的图形.

解 由于 $x = 1$ 为极值点,$\therefore f'(1) = 0$,即 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$\therefore 0 = 3 + 2a + b.$ ①

另一方面,在 $x = 1$ 处,$f(1) = -2$. $\therefore 1 + a + b = -2$ ②

由 ①、② 解得 $a = 0, b = -3$.

$y = f(x) = x^3 - 3x = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ ③

并由 ③ 式可知曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴有三个交点 $(0,0)$,$(\sqrt{3},0)$. $(\sqrt{3},0)$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$,令 $f'(x) = 0$,解得 $x = 1$ 和 $x = -1$.

$f''(x) = 6x$,$\therefore f''(1) = 6 > 0$,即 $x = 1$ 是函数的极小值 -2.

$f''(-1) = -6 < 0$,即 $x = -1$ 为函数极大值,极大值为 2.

令 $f''(x) = 0$,解得 $x = 0$,当 $x > 0$ 时,$f''(x) > 0$;

当 $x < 0$ 时,$f''(x) < 0$,$\therefore (0,0)$ 为曲线 $y = 3x^2 - 3$ 的拐点.

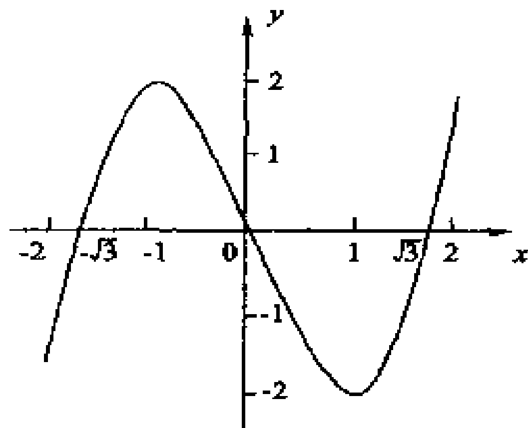
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$,所以 $|x| > 1$ 时,$f'(x) > 0$,曲线单调上升,当 $|x| < 1$ 时,$f'(x) < 0$,曲线单调下降.

当 $x > 0$ 时,$f''(x) > 0$,曲线是凹的;当 $x < 0$ 时,$f''(x) < 0$,曲线是凸的.

综上可列表如下

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$1,(\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f(x)$		0		2		0		2		0	
$f'(x)$	+	+	+		−		−		+	+	+
$f''(x)$	−		−		−		+		+		+
$y=f(x)$ 的图形	↑		↑		↓		↓		↑		↑

其图象如下：



435.（哈尔滨工业大学，2002 年）　设

$f(x) = x^{2002} - x^{1999} + x^{1997} + x^{1949} - x^{1921}$，　①

求证：有 $\xi \in [0,1)$，使 $f(\xi) = 0$. 且 $f(x) > 0$，对 $\xi < x \leqslant 1$.　②

证　(1) $f(x) = x^{1921}(x^{81} - x^{78} + x^{76} + x^{28} - 1)$.

令 $g(x) = x^{81} - x^{78} + x^{76} + x^{28} - 1$. 当 $x \in [0,1)$ 时，则 $g(x) < 3x^{28} - 1$.

令 $3x^{28} - 1 = 0$，解得 $x = \sqrt[28]{\frac{1}{3}}$.

$\therefore g(\sqrt[28]{\frac{1}{3}}) < 0$.

$\lim\limits_{x \to 1-0} g(x) = 1 > 0$. $\therefore \xi \in (\sqrt[28]{\frac{1}{3}}, 1)$

有 $g(\xi) = 0$. 从而 $f(\xi) = \xi^{1921} \cdot g(\xi) = 0$.

(2) $g'(x) = 81x^{80} - 78x^{77} + 76x^{75} + 28x^{27}$

当 $1 \geqslant x > \xi > (\frac{1}{3})^{28}$

$g'(x) > 81\left[(\frac{1}{3})^{28}\right]^{84} - 78\left[(\frac{1}{3})^{28}\right]^{56} + 76\left[(\frac{1}{3})^{28}\right]^{84} + 28\left[(\frac{1}{3})^{28}\right]^{28} > 0$.

即 $g(x)$ 单调递增.

$\therefore g(x) > g(\xi) = 0$，从而 $f(x) = x^{1921} \cdot g(x) > 0$.

436.（昆明工学院）　设 $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

证明：方程 $f(x) = 0$ 当 n 为奇数时恰有一实根；当 m 为偶数时无实根.

证　(1) 当 n 为奇数时，$f'(x) = -1 + x - x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1} - x^{n-1}$.

①

$\therefore f'(-1) = -n < 0$

当 $x \neq -1$ 时，由 ① 有

$$f(x) = -\frac{1+x^n}{1+x} \qquad ②$$

当 $x < -1$ 时，$f'(x) < 0$；当 $x > -1$ 时，$f'(x) < 0$，因此 $f(x)$ 单调减少.

又 $f(0) = 1 > 0$,

(ⅰ) 当 $n = 1$ 时，$f(2) = -1 < 0$.

(ⅱ) 当 $n \geqslant 3$ 时，$f(2) = 1 - 2 + \frac{2^2}{2} - \frac{2^2}{3} + \cdots\cdots + \frac{2^{n-1}}{n-1} - \frac{2n}{n} < 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $[0,2]$ 内有一实根，由于 $f(x)$ 是单调函数，因此只可能有一个实根，即当 n 为奇数时，方程 $f(x) = 0$ 有且仅有一个实根.

(2) 当 n 为偶数时，$f'(x) = -1 + x - x^2 + \cdots\cdots - x^{n-2} + x^{n-1}$, ③

$\therefore f'(-1) = -n < 0$.

当 $x \neq -1$ 时，$f'(x) = \frac{x^n - 1}{1+x}$.

当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) < 0$；当 $x > 1$ 时，$f'(x) > 0$，而 $f'(1) = 0$. 故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取最小值，而

$$f(1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} > 0, (n > 2)$$

当 $n = 2$ 时，$f(1) = \frac{1}{2} > 0$.

$\therefore f(x) \geqslant f(1) > 0$.

即方程 $f(x) = 0$，当 n 为偶数时，无实根.

437.（上海交通大学，2002 年，浙江大学） 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x) > 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \alpha > 0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \beta < 0$，又存在一点 x_0，使 $f(x_0) < 0$. 试证明：方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有且只有两个实根.

证 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上有二阶导数，所以

$f'(x), f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \alpha > 0$，因此由保号性必存在 $c > 0$，使当 $x > c$ 时，

$$f'(x) > \frac{\alpha}{2} > 0, x > 0. \qquad ①$$

再在 $[c, x]$ 上运用拉格朗日中值定理，可得

$f(x) = f(c) + f'(\xi)(x - c), \xi \in (c, x)$

由 ① 式

$\therefore f(x) > f(c) + \frac{\alpha}{2}(x - c)$.

当 $x \to +\infty$，上式右端趋于 $+\infty$，因为 $f(+\infty) > 0$.

又 $f(x_0) < 0$，因此方程在 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一个实根.

同理由 $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \beta < 0$. 类似可证方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, x_0)$ 内至少有一个实根，从而方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内至少有两个实根.

再证方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内实根个数不可能超过两个，用反证法. 若方程 $f(x) = 0$ 有三个（或以上）实根设为 $x_1 < x_2 < x_3$，在 $[x_1, x_2]$，$[x_2, x_3]$ 上应用罗尔定理有

$f'(\xi_1) = 0, x_1 < \xi_1 < x_2$.

$f'(\xi_2) = 0, x_2 < \xi_2 < x_3$.

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上再用罗尔定理有

$f''(\eta) = 0, \xi_1 < \eta < \xi_2$

这与 $f''(x) > 0$ 的假设矛盾，故得证.

438.（西安交通大学） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(0) = 0$，$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|$. 试证：在 $[0,1]$ 上 $f(x) = 0$.

证 由拉格朗日中值定理，有

$f(x) - f(0) = f'(\xi_1)x, 0 < \xi_1 < x$.

$\therefore f(x) = xf'(\xi_1)$. ①

$\because |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|$，由 ① 有

$\therefore |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}x|f'(\xi_1)| \leqslant \frac{1}{4}x|f(\xi_1)|, (0 < x < 1)$. ②

在 $[0, \xi_1]$ 上再用拉格朗日中值定理，有

$f(\xi_1) = \xi_1 \cdot f'(\xi_2), 0 < \xi_2 < \xi_1$. ③

$\therefore \frac{f(\xi_1)}{\xi_1} = f'(\xi_2)$.

再由 ①，②，③ 有

$\therefore |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}x\xi_1|f'(\xi_2)| \leqslant \frac{1}{8}x\xi_1 \cdot |f(\xi_2)|$.

这样继续下去，有

$0 \leqslant |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}x\xi_1\xi_2\cdots\xi_{n-1}|f(\xi_n)|$. ④

其中 $0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x < 1$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$\therefore f(x)$ 有界，设 $|f(x)| < M$.

由 ④ 有

$0 \leqslant |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}M$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} |f'(x)| = 0$,即 $|f'(x)| = 0$, $\therefore f'(x) = 0$. ⑤

由 ⑤ 知 $f(x) = C$.

再由 $f(0) = 0$,可得 $C = 0$. $\therefore f(x) = 0, x \in [0,1]$.

439.(中国地质大学,2002 年) 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$f(0) = 0$. 在$(0,1)$ 中,$|f'(x)| \leqslant f(x)$. 证明:$f(x) \equiv 0$.

证 当 $x \in (0,\frac{1}{2}]$ 时,则 $\exists \xi_1 \in (0,x)$,有

$f(x) - f(0) = f'(\xi_1)x$,

$|f(x)| = |f'(\xi_1)|x < \frac{1}{2}|f(\xi_1)|$.

同理有 $\xi_2 \in (0,\xi_1)$,使

$|f(\xi_1)| < \frac{1}{2}|f(\xi_2)|$.

从而有

$$|f(x)| < \frac{1}{2}|f(\xi_1)| < \frac{1}{2^2}|f(\xi_2)| < \cdots < \frac{1}{2^n}|f(\xi_n)| < \cdots.$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}|f(\xi_n)| = 0$. 所以

$f(x) \equiv 0, x \in (0,\frac{1}{2}]$.

类似可证 $f(x) \equiv 0, x \in [\frac{1}{2},1)$,此即 $f(x) \equiv 0, x \in (0,1)$.

440.(大连工学院) 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \qquad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

(1) 求 $f(x)$ 的增减区间;

(2) 求 $f(x)$ 的极值,最大值和最小值;

(3) 作出函数的图形(不必求拐点和曲线的凹凸).

解 (1)
$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x - 1}{2x}$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2} = 0.$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

令 $f'(x)=0$,在$[-2\pi,2\pi]$上解得 $x_1\approx 4.50, x_2=0, x_3\approx -4.50$

因为$f(x)$是偶函数,故由定义域可分为$(-2\pi,x_3),(x_3,0),(0,x_1)(x_1,2\pi)$.

在$(0,x_1)$或$(-2\pi,x_1)$内$f'(x)<0$,为函数$y=f(x)$的递减区间.

在$(x_3,0),(x_1,2\pi)$内$f'(x)>0$.为函数递增区间.

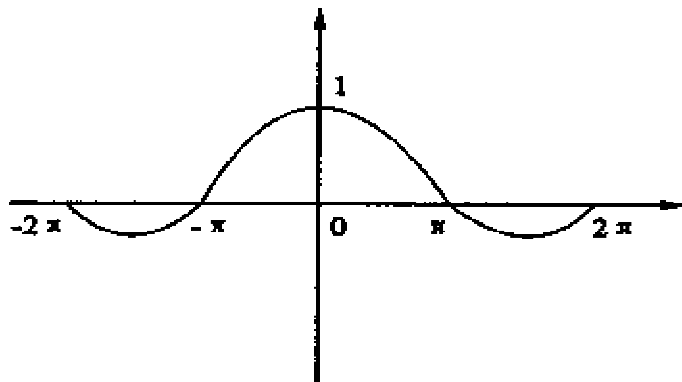
(2) 由$f(x)$的增减性,以及$f'(x_1)=f'(x_3)=0$.可知x_1,x_3为$f(x)$的极小值点,极小值为

$f(x_1)=f(x_3)\approx f(4.5)\approx -0.21$.

又 $x=0$ 为$f(x)$的极大值点,极大值为$f(0)=1$.

而函数端点值为$f(2\pi)=f(-2\pi)=0$.故函数最大值为1,最小值为$(\approx)-0.21$.

(3) 其图象如下图所示



第 440 题图

441.(东北师范大学) 若$f(x)$在$(a,+\infty)$内可导,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

证 (1) 当$A>0$时,

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$,由保号性,则存在$M>0$当$x>M$时有

$f'(x)>\dfrac{A}{2}>0$.

在$[M+1,x]$上运用拉格朗日中值定理有

$$f(x)=f(M+1)+f'(\xi)(x-M-1)\qquad M+1<\xi<x$$
$$>f(M+1)+\frac{A}{2}(x-M-1)$$

当$x\to+\infty$,$f(x)\to+\infty$.

从而由罗比塔法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A.$$

(2) 当 $A<0$ 时,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$,则存在 $M>0$,当 $x>M$ 时有 $f'(x)<\dfrac{A}{2}<0$.

$$\therefore f(x)=f(M+1)+f'(\xi)(x-M-1)\qquad M+1<\xi<x$$

$$<f(M+1)+\frac{A}{2}(x-M-1)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,再由罗比塔法则,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A.$$

(3) 当 $A=0$ 时,仿第 375 题,可证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0=A$.

442.【清华大学,2001 年】 作 $f(x)=|x+2|e^{-\frac{1}{x}}$ 图.

解 $f(x)\geqslant 0$,而 $f(-2)=0$,从而 $x=-2$ 为 $f(x)$ 的极小值点,0 也是函数的最小值.

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)e^{-\frac{1}{x}}, x\in[-2,0)\cup(0,+\infty),\\ -(x+2)e^{-\frac{1}{x}}, x\in(-\infty,-2).\end{cases}$$

当 $x\in(-2,0)\cup(0,+\infty)$ 时,

$$f'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}(x^2+x+2)}{x^2}>0.$$

$\therefore f(x)$ 在 $(-2,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 严格单调递增.当 $x\in(-\infty,-2)$ 时

$$f'(x)=-\frac{e^{-\frac{1}{x}}(x^2+x+2)}{x^2}<0.$$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上严格单调递减.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{he^{-\frac{1}{h-2}}}{h}=e^{\frac{1}{2}}.$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-he^{-\frac{1}{h-2}}}{h}=-e^{\frac{1}{2}}.$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=-2$ 处导数不存在.

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{2+x}{e^{\frac{1}{x}}}=0.$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\left[\frac{x+2}{e^{\frac{1}{x}}}\right]=+\infty.$$

$\therefore$ 曲线有垂直渐近线 $x=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}e^{-\frac{1}{x}}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}[(x+2)e^{-\frac{1}{x}}-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{(x+2)\left[1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]-x\right\}=1.$$

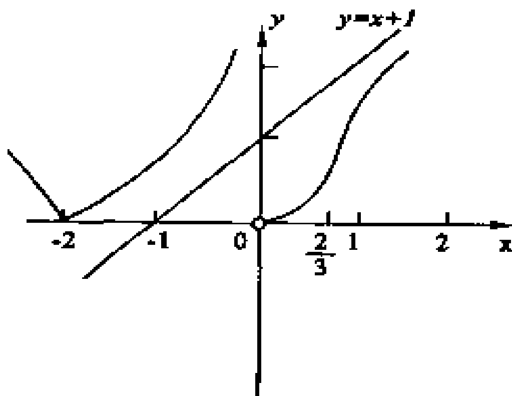
∴ 曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=x+1$.

又当 $x\geqslant-2$ 时，$f''(x)=\left(\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}$，

令 $f''(x)=0$，解得 $x=\frac{2}{3}$，且当 $-2\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$ 时，$f(x)$ 为凸函数；当 $x>\frac{2}{3}$ 时，$f''(x)<0$，$f(x)$ 为凹函数. 因此 $\left(\frac{2}{3},f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ 为曲线的拐点.

当 $x<-2$ 时，$f''(x)=\left(\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}<0$，$f(x)$ 为凹函数.

综上可作 $y=f(x)$ 的图象如下：



第 442 题图

443.（北京师范大学，1997 年） 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $|g''(x)|\geqslant m>0$（m 为常数），又 $g(a)=g(b)=0$. 证明：

$$\max_{0\leqslant x\leqslant b}|g(x)|\geqslant\frac{m}{8}(b-a)^2.$$

证 ∵ $g(x)$ 在 $[a,b]$ 内有最大值和最小值，设

$M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}g(x)$，$m=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}g(x)$.

又 $g(a)=g(b)=0$，∴ $M>0$，$m<0$.（∵ $g(x)$ 不是常数）

令 $d=\max\{|M|,|m|\}$，则

$$d=\max_{a\leqslant x\leqslant d}|g(x)|. \qquad ①$$

且存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $|g(\xi)|=d$.

再由于最大值或最小值一定是 $g(x)$ 的极值，∴ $g'(\xi)=0$.

由泰勒公式有

$$g(x)=g(\xi)+g'(\xi)(x-\xi)+\frac{1}{2}g''(\eta)(x-\xi)^2,$$

$$g(x)=g(\xi)+\frac{1}{2}g''(\eta)(x-\xi)^2, \qquad ②$$

其中 η 在 x 与 ξ 之间.

再讨论 ξ 的位置.

(1) 若 $\xi<\frac{a+b}{2}$,在 ② 式中用 $x=b$ 代入得

$g(b)=g(\xi)+\frac{1}{2}g''(\eta_1)(b-\xi)^2$,其中 η_1 在 b 与 ξ 之间.

$$\therefore -g(\xi)=\frac{1}{2}g''(\eta)(b-\xi)^2,$$

$$d=|-g(\xi)|=\frac{1}{2}|g''(\eta)|(b-\xi)^2$$

$$\geqslant\frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{m}{8}(b-a)^2.$$

由 ① 式得证

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)|\geqslant\frac{m}{8}(b-a)^2. \qquad ③$$

(2) 若 $\xi\geqslant\frac{a+b}{2}$,在 ② 式中用 $x=a$ 代入

$\therefore g(a)=g(\xi)+\frac{1}{2}g''(\eta_2)(a-\xi)^2$,$\eta_2$ 在 a 与 ξ 之间.

类似可证 ③ 式.

444.(北京师范大学,武汉大学,达布定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,求证:$f'(x)$ 可取得介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任何值.

证 (1) 若 $f'(a)=f'(b)$,则结论成立.

(2) 若 $f'(a)\neq f'(b)$,不失一般,设 $f'(a)>f'(b)$.

$\forall c\in[f'(b),f'(a)]$.令

$F(x)=f(x)-cx, x\in[a,b]$,

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可导,且

$F'(a)=f'(a)-c>0$,

$F'(b)=f'(b)-c<0$.

由零点定理知存在 $\xi\in(a,b)$,使 $F'(\xi)=0$,此即证 $f'(\xi)=c,\xi\in(a,b)$.

445.(北京航空航天大学,2001 年) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,且 $f(x)<f'(b)$.则对 $\forall\mu\in(f'(a),f'(b))$,必有 $\xi\in(a,b)$,使 $f'(\xi)=M$.

解 由上题达布定理可得.

446.(合肥工业大学,湖北大学 2002 年) 设 $x > a$ 时,函数 $f(x)$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$(常数).证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

证 $\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在,由柯西收敛定理, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$,当 $x_1, x_2 > M$ 时有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, |f'(x_1) - f'(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad ①$$

$\forall x > M$,由拉格朗日中值定理有

$$|f(x) - f(x+1)| = |f'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore -\frac{\varepsilon}{2} < f'(\xi) < \frac{\varepsilon}{2}, (x < \xi < x+1). \quad ②$$

由①式

$$|f'(x) - f'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore f'(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} < f'(x) < f'(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad ③$$

由②,③有

$$-\varepsilon < f'(x) < \varepsilon, (\forall x > M).$$

由 ε 任意性, $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

447.(北京师范大学,1999 年) 设 $f_n(x) = \sin x + \sin^2 x + \cdots + \sin^n x$.试证:

(1) 对任意自然数 n,方程 $f_n(x) = 1$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内有且仅有一个根;

(2) 设 $x_n \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{6}$.

证 (1) 令 $F(x) = f_n(x) - 1$,则

$$F_n(x) = \sin x + \sin^2 x + \cdots + \sin^n x - 1, x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right], \quad ①$$

$\because F\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0$.当 $x \neq \frac{\pi}{2}$ 时

$$F_n(x) = \frac{\sin x(1 - \sin^n x)}{1 - \sin x} - 1$$

$$< \frac{\sin x}{1 - \sin x} - 1$$

$$\therefore F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) < \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 0$$

$\therefore F_n(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 至少有一个实根.

但 $F'_n(x) = \cos x + 2\sin x\cos x + \cdots + n\sin^{n-1}x\cos x > 0, x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

即 $F'_n(x)$ 单调递增,从而得证 $F_n(x)$ 在$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$有且仅有一个根.此即证方程 $f(x) = 1$ 在$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$有且仅有一个实根.

(2) 设 x_1 是方程 $f_1(x) = 1$ 的根,则 $x_1 = \frac{\pi}{2}$.

x_2 是 $\sin x + \sin^2 x = 1$ 的根,则 $x_2 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

一般若 x_n 是方程 $f_n(x) = 1$ 的根,即 $F_n(x_n) = 0$,

但 $$\begin{aligned} F_n(x_{n-1}) &= \sin^n(x_{n-1}) + \sin^{n-1}(x_{n-1}) + \cdots + \sin(x_{n-1}) - 1 \\ &= \sin^n(x_{n-1}) > 0 \end{aligned}$$

而 $F_n(x)$ 递增,所以$\frac{\pi}{6} < x_n < x_{n-1} < \frac{\pi}{2} (n \in N)$,

此即证$\{x_n\}$单调递减且有下界.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$,(存在).

再由于

$$1 = \sin x_n + \sin^2 x_n + \cdots + \sin^n x_n$$
$$= \frac{\sin x_n(1 - \sin^n x_n)}{1 - \sin x_n}$$

两边取极限并注意$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x_n = 0$,

$$\therefore 1 = \frac{\sin l}{1 - \sin l}$$

解得 $\sin l = \frac{1}{2}$, $\because x_n \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\therefore l = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{6}.$$

448.(浙江大学,2002 年) 设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n(x)$.求证:

(1) 对任意自然数 n,方程 $f_n(x) = 1$ 在$\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$内有且仅有一根;

(2) 设 $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$是 $f_n(x) = 1$ 的根,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{3}$.

证 (1) 仿上题 令 $F_n(x) = f_n(x) - 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$,则

$$F_n(x) = \frac{\cos x(1 - \cos^n x)}{1 - \cos x} - 1 < \frac{\cos x}{1 - \cos x} - 1, \forall x \in (0, \frac{\pi}{3}],$$

$$F_n\left(\frac{\pi}{3}\right) < \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 0.$$

$F_n(0) \geqslant 0$.

$\therefore F_n(x)$ 在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$内至少有一个实根.又

$F'_n(x) = -\sin x[1+2\cos x+\cdots+n\cos^{n-1}(x)] < 0, x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

即 $F_n(x)$ 单调递减.从而得证 $F_n(x)=f_n(x)-1$ 在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$内有且仅有一根.

(2) 设 x_1 是方程 $f_1(x)=1$ 的根,则 $x_1=0$.

x_2 是方程 $\cos x+\cos^2 x=1$ 的根,则 $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

若 x_n 是方程$f_n(x)=1$的根,即 $F_n(x_n)=0$.

但

$$\begin{aligned}F_n(x_{n-1}) &= \cos^n(x_{n-1})+\cos^{n-1}(x_{n-1})+\cdots+\cos(x_{n-1})-1\\ &= \cos^n(x_{n-1})>0.\end{aligned}$$

而 $F_n(x)$ 递减,所以

$0<x_{n-1}<x_n<\frac{\pi}{3}$.

从而$\{x_n\}$单调递增.又有上界.$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$.

$$\begin{aligned}1 &= \cos x_n+\cos^2 x_n+\cdots+\cos^n x_n\\ &= \frac{\cos x_n(1-\cos^n x_n)}{1-\cos x_n},\end{aligned}$$

两边取极限,并注意$\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n x_n=0$,

$\therefore 1=\frac{\cos l}{1-\cos l}$,解得 $\cos l=\frac{1}{2}$,$\therefore l=\frac{\pi}{3}$

$\therefore l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{3}$.

449.(四川大学) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微,$b>a>0$,证明:在(a,b)内存在 x_1,x_2,x_3 使得

$$\frac{f'(x_1)}{2x_1}=(b^2+a^2)\frac{f'(x_2)}{4x_2^3}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}x^3(f'(x_3)). \quad ①$$

证 要证 ① 式只需证明:

$$\frac{f'(x_1)}{2x_1}(b^2-a^2)=\frac{f'(x_2)}{4x_2^3}(b^4-a^4)=x_3f'(x_3)\ln\frac{b}{a}. \quad ②$$

(1) 令 $F(x)=f(x)$,$G(x)=x^2$,在$[a,b]$上用柯西中值定理有

$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_1)}{2x_1}$,其中 $x_1\in(a,b)$,

$$\therefore f(b)-f(a)=\frac{f'(x_1)}{2x_1}(b^2-a^2). \quad ③$$

(2) 再令 $G(x) = x^4$,类似有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^4-a^4} = \frac{f'(x_2)}{4x_2^3}, x_2 \in (a,b),$$

$$\therefore f(b)-f(a) = \frac{f'(x_2)}{4x_2^3}(b^4-a^4). \qquad ④$$

(3) 再令 $G(x) = \ln x$,类似有

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a} = \frac{f'(x_3)}{\frac{1}{x_3}}, x_3 \in (a,b),$$

$$\therefore f(b)-f(a) = x_3 f'(x_3)\cdot \ln\frac{b}{a}. \qquad ⑤$$

由 ③,④,⑤ 即证 ②,从而即证 ① 成立.

450.{北京工业学院} 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上二次可导,$f''(x)$在$(0,+\infty)$有界,且当 $x\to\infty$,$f(x)\to 0$. 试证:$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

证 设 $|f''(x)| \leqslant C, \forall x \in (0,+\infty)$. ①

$\forall \varepsilon_1 > 0$,存在 $M > 0$,当 $|x| > M$ 时,有

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon_1}{2} \qquad ②$$

再由泰勒公式,$\forall h > 0$, $|x| > M$,有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2. \text{其中 } \xi \in (x, x+h)$$

$$\therefore f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{1}{2}f''(\xi)h.$$

$$\therefore |f'(x)| \leqslant \frac{1}{h}|f(x+h)| + \frac{1}{h}|f(x)| + \frac{1}{2}|f''(\xi)|h. \qquad ③$$

$\forall \varepsilon > 0$,在 ③ 式中,先可让 h 充分小,使

$$\frac{1}{2}|f''(\xi)|h \leqslant \frac{c}{2}h < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad ④$$

再固定 h,让 ② 式中 ε_1 充分小,使

$$\frac{1}{h}|f(x+h)| + \frac{1}{h}|f(x)| < \frac{\varepsilon_1}{2h} + \frac{\varepsilon_1}{2h} = \frac{\varepsilon_1}{h} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad ⑤$$

将 ④,⑤ 都代人 ③ 式

$$\therefore |f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}|f'(x)| = 0$,此即有$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

451.{吉林大学} 设函数 $\varphi(x)$ 在$[0,+\infty)$上二次连续可微.
如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ 存在,且 $\varphi''(x)$ 在$[0,+\infty)$上有界. 试证:

$$\lim_{x\to\infty}\varphi'(x)=0.$$

证　设$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=l$,仿上题,只要将上题②式改为

$|\varphi(x)-l|<\dfrac{\varepsilon_1}{2},|x|>M,$

③式改为

$|\varphi'(x)|\leqslant\dfrac{1}{h}|\varphi(x+h)-l|+\dfrac{1}{h}|\varphi(x)-l|+\dfrac{1}{2}|\varphi''(\xi)|h,$

其余步骤仿上题可证得$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

452.(上海交通大学)　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,又$f(x)$不是线性函数,且$f(b)>f(a)$,试证:存在$\xi\in(a,b)$使得

$f'(\xi)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

证　令$F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),x\in[a,b]$. ①

用反证法,若$f'(x)\leqslant\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a},x\in[a,b]$　②

那么由①有

$F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant 0.$

此即$F(x)$在$[a,b]$内单调递减,又$F(x)$不是常数,$\therefore F'(x)\neq 0$,存在点x使$F'(x)<0$.

但$F(a)=0$,$\therefore F(b)<0$,而由①式知$F(b)=0$.矛盾,从而②不成立,即存在ξ,使$f'(\xi)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

453.(哈尔滨工业大学,2002年)　设$f(x)$于$(0,1)$内可微,且满足$|f'(x)|\leqslant 1$.

求证:$\lim\limits_{n\to\infty}f(\dfrac{1}{n})$存在.

证　令$x_n=f(\dfrac{1}{n})$. $\forall\varepsilon>0$,存在$N>0$,使当$n>N$时,有$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

再由柯西中值定理,当$n>N$时,$\forall p>0$

$|x_{n+p}-x_n|=\left|f(\dfrac{1}{n+p})-f(\dfrac{1}{n})\right|$

$=\left|f'(\xi)(\dfrac{1}{n-p}-\dfrac{1}{n})\right|\leqslant\dfrac{p}{n(n+p)}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon.$

再由柯西收敛法则:$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(\dfrac{1}{n})$存在.

454.(湖北大学,2002 年) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域 $U^+(x_0)$ 内连续,在 x_0 的去心右邻域 $U_0^+(x_0)$ 内可导,若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = f'(x_0+0)$ 存在,则 $f'_+(x_0)$ 也存在,且 $f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$.

证 $\forall x \in U^+(x_0)$,由于 $f(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上连续,在 (x_0, x) 内可导,由拉格朗日中值定理有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi),\text{其中 } x_0 < \xi < x. \quad ①$$

又 $\because \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = f'(x_0+0)$ 存在,所以由 ① 式有

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f'(\xi) = f'(x_0+0). \quad ②$$

$\therefore f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$(存在),且由 ② 式有

$f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$.

455.(北京大学,1996年) 判断题:设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且在 (a,b) 上可微,若存在极限 $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = l$,则右导数 $f'_+(a)$ 存在且等于 l. ( )

答 对,证明见上题.

456.(华中理工大学,1997 年,西北电讯工程学院) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微,且 $f(0) = f(1)$, $|f''(x)| \leqslant 1$. 证明: $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

证 设 $x \in [0,1]$,由泰勒公式

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x)^2, 0 < \xi_1 < x \leqslant 1. \quad ①$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2, 0 \leqslant x < \xi_2 < 1. \quad ②$$

由 ① - ② 可解得

$$f'(x) = \frac{1}{2}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2] \quad ③$$

$$\begin{aligned}\therefore |f'(x)| &\leqslant \frac{1}{2}[|f''(\xi_1)|x^2 + |f''(\xi_2)|(1-x)^2]\\ &\leqslant \frac{1}{2}[x^2+(1-x)^2]\\ &\leqslant \frac{1}{2}[x+(1-x)]^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

457.（上海师范大学） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，且满足 $f(0)=f(1)$ 及 $|f''(x)|\leqslant M,(x\in[0,1])$.

试证：对一切 $x\in[0,1]$ 有 $|f'(x)|\leqslant\dfrac{M}{2}$.

证 仿上题可得 ③ 式，然后可证 $|f''(x)|\leqslant\dfrac{M}{2}$.

458. 设函数 $f(x)$ 在 R 上二阶导数连续，且满足

$$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}. \quad ①$$

(1) 如果 $f(x)$ 在 $x=c(c\neq 0)$ 有极值，证明它是极小值；

(2) 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 有极值，它是极小值还是极大值？为什么？

证 (1) 由题设有 $f'(c)=0$，将 $x=c$ 代入 ① 式可解得

$$f''(c)=\frac{1-e^{-c}}{c} \quad ②$$

当 $c>0$ 时，$e^{-c}=\dfrac{1}{e^c}<1$，$\therefore 1-e^{-c}>0$，$f''(c)>0$.

当 $c<0$ 时，$e^{-c}=\dfrac{1}{e^c}>1$. $\therefore 1-e^{-c}<0$，也有 $f''(c)>0$.

综上都有 $f''(c)>0$. $\therefore x=c$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

(2) 已知 $x=0$ 是 $f(x)$ 极值，$\therefore f'(0)=0$. 又由 ① 式解得

$$f''(x)=\frac{1-e^{-x}-3x[f'(x)]^2}{x}=\frac{1-e^{-x}}{x}-3[f'(x)]^2$$

$$\therefore f''(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-e^{-x}}{x}-3(f'(x))^2\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=1>0.$$

$\therefore x=0$ 也是 $f(x)$ 的极小值点.

459.（华中理工大学，1998 年） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，$f'(x)>0,(0<x<1)$，$f(0)=0$. 证明：存在 $\lambda,\mu\in(0,1)$ 使得

$$\lambda+\mu=1,\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\frac{f'(\mu)}{f(\mu)}.$$

证 令 $F(x)=f(1-x)f(x)$，且由于 $f(0)=0$.

$\therefore F(0)=F(1)=0$.

由罗尔定理，存在 $\lambda\in(0,1)$，使 $F'(\lambda)=0$，即

$$f'(\lambda)f(1-\lambda)-f(\lambda)f'(1-\lambda)=0. \quad ①$$

在 ① 式中令 $\mu=1-\lambda$，即 $f'(\lambda)f(\mu)-f(\lambda)f'(\mu)=0. \quad ②$

由于 $f'(x)>0(0<x<1)$，$\therefore f(x)$ 严格单调增加.

$\therefore f(x)>f(0)=0,(0<x<1)$.

$$\therefore f(\lambda)f(\mu)\neq 0, \quad ③$$

由 ②、③ 可解得

$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\frac{f'(\mu)}{f(\mu)}$.

460.(华中理工大学,2000年) 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可微.证明:存在$\xi\in(0,1)$,使$f'(\xi)f(1-\xi)=f(\xi)f'(1-\xi)$.

证 仿上题可得①式,移项后即证.

461.(广西师范大学) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$\forall x_1,x_2\in[a,b]$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$,$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)+(x_2)$. ①

试证:对$\forall T\in(0,b-a)$,必存在$x_0\in(a,b)$,使$x_0+T\in[a,b]$,

$$\frac{f(x_0+T)-f(x_0)}{T}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad ②$$

即在$[a,b]$上曲线$y=f(x)$有任意长度(不超过端点弦)平行端点的弦.

证 对任何固定的T,令

$$g(x)=\frac{f(x+T)-f(x)}{T}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},x\in[a,b-T].$$

则$g(a)=\frac{f(a+T)-f(a)}{T}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ③

$\because a+T=(1-\frac{T}{b-a})a+(\frac{T}{b-a})b$

由假设①式有

$\therefore f(a+T)\geqslant(1-\frac{T}{b-a})f(a)+\frac{T}{b-a}f(b)$,

$f(a+T)-f(a)\geqslant\frac{T}{b-a}[f(b)-f(a)]$,

$$\frac{f(a+T)-f(a)}{T}\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad ④$$

由③,④$\therefore g(a)\geqslant0$. ⑤

仿上还可得$g(b-T)\leqslant0$.若$g(a)=0$,由③ ⑥

$$f(a+T)=\frac{f(b)}{b-a}T. \quad ⑦$$

令$T=x-a$,则

$$f(x)=\frac{f(b)}{b-a}(x-a)=kx+d,x\in[a,b] \quad ⑦$$

其中$k=\frac{f(b)}{b-a}$,$d=-\frac{af(b)}{b-a}$.

取$x_0\in(a,b)$,x_0+T,则容易验证②式成立.

若$g(a)\neq0$,由⑤则$g(a)>0$,

$\therefore g(a)g(b-T)\leqslant0$.

再由 $g(x)$ 连续性,则存在 $x_0 \in (a, b-T)$,使

$0 = g(x_0) = \dfrac{f(x_0+T)-f(x_0)}{T} - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 成立,移项后即证②式.

462.(华中理工大学,1999年)　设 $f(x)$ 在[0,1]上两次可微,$|f''(x)| \leqslant M, (0 \leqslant x \leqslant 1), M > 0.$ ①

$f(0) = f(1) = f(\frac{1}{2}) = 0.$ ②

证明:$|f'(x)| < \frac{M}{2}, (0 \leqslant x \leqslant 1).$

证　仿上题,设 $x \in [0,1]$,有

$0 = f(0)$

$= f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x)^2, 0 < \xi_1 < x \leqslant 1.$ ③

$0 = f(1)$

$= f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2, 0 \leqslant x < \xi_2 < 1.$ ④

$0 = f(\frac{1}{2})$

$= f(x) + f'(x)(\frac{1}{2}-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_3)(\frac{1}{2}-x)^2, 0 \leqslant x < \xi_3 < \frac{1}{2}$ ⑤

由③-④可解得

$f'(x) = \frac{1}{2}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$

$\therefore |f'(x)| \leqslant \frac{M}{2}[x^2 + (1-x)^2] \leqslant \frac{M}{2}[x + (1-x)]^2 = \frac{M}{2}.$ ⑥

并由⑥式证明的最后一个不等式可以看出

若需 $|f'(x)| = \frac{M}{2}$ 则必有 $x = 0$ 或 $x = 1.$ ⑦

只要证明 $|f'(0)| = \frac{M}{2}$ 或 $|f'(1)| = \frac{M}{2}$ 都不能成立,从而可证明

$|f'(x)| < \frac{M}{2}, (0 \leqslant x \leqslant 1).$

下面用反证法,若 $|f'(0)| = \frac{M}{2}$,则

$f'(0) = \frac{M}{2}$ 或 $f'(0) = -\frac{M}{2}.$

若 $f'(0) = \frac{M}{2}$,将它代入⑤式有

$f(\frac{1}{2}) = f(0) + f'(0)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}f''(\xi_4)\cdot(\frac{1}{2})^2,$

$0=\frac{M}{4}+\frac{1}{8}f''(\xi_4)$，即 $f''(\xi_4)=-2M$. $\therefore |f''(\xi_4)|=2M>M$.
这与假设矛盾.

若 $f'(0)=-\frac{M}{2}$，仍由 ⑤ 式

$f(\frac{1}{2})=f(0)+f'(0)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f''(\xi_4)(\frac{1}{2})^2$,

$0=-\frac{M}{4}+\frac{1}{8}f''(\xi_4)$

$\therefore f''(\xi_4)=2M$，也得出矛盾. $\therefore |f'(0)|\neq\frac{M}{2}$.

若 $|f'(1)|=\frac{M}{2}$，则

$f'(1)=\frac{M}{2}$ 或 $f'(1)=-\frac{M}{2}$.

当 $f'(1)=\pm\frac{M}{2}$ 时，只要把展开式 ⑤ 改为

$0=f(\frac{1}{2})=f(x)+f'(x)(\frac{1}{2}-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_5)(\frac{1}{2}-x)^2$，其中

$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\xi_5<1$ ⑧

$\therefore f(\frac{1}{2})=f(1)+f'(1)(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi_5)(\frac{1}{2}-1)^2$

$\therefore \pm\frac{M}{4}+\frac{1}{8}f''(\xi_5)=0$. 可得矛盾

综上可知 $|f'(0)|\neq\frac{M}{2}$, $|f'(1)|\neq\frac{M}{2}$，从而得证

$|f'(x)|<\frac{M}{2}$, $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

463.（中国人民大学，2001 年） 设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上可导，且

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=f(1),$$

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

证 令 $F(t)=\int_0^t xf(x)\mathrm{d}x-t^2f(t)$, $t\in[0,1]$,

由题设可以验证 $F(t)$ 在[0,1]满足罗尔定理的三个条件，因此 $\exists\,\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $\xi f(\xi)-2\xi f(\xi)-\xi^2f'(\xi)=0$.

由此可解得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

464.（重庆大学） 设 $f(x)$ 在[0,1]上可微，且满足

$$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=0 \quad ①$$

求证：在(0,1)内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

证：由①式及积分中值定理知，存在 $\xi_1\in[0,\frac{1}{2}]$，使

$$0=f(1)-2\xi_1f(\xi_1)\cdot\frac{1}{2},\therefore f(1)=\xi_1f(\xi_1) \quad ②$$

令 $F(x)=xf(x)$，则由②式及假设可知 $F(x)$ 在 $[\xi_1,1]$ 上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$ 使

$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

465.（广西大学，中国科学院，2003年） 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，$f(0)=0$，并设有实数 $A>0$，使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|,x\in[0,+\infty)$ 成立，试证明：

$$f(x)\equiv 0,x\in[0,+\infty).$$

证 由于 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2A}]$ 上连续，所以 $|f(x)|$ 在 $[0,\frac{1}{2A}]$ 上也连续，从而存在 $c\in[0,\frac{1}{2A}]$ 使 $f(c)=M$.

$M=|f(c)|=|f(0)+f'(\xi)(c-0)|$

$\quad=|f'(\xi)c|\leqslant A|f(\xi)|\cdot c\leqslant\frac{1}{2}|f(\xi)|\leqslant\frac{1}{2}M$

$\therefore M=0$，此即 $f(x)\equiv 0,x\in[0,\frac{1}{2A}]$.

再用数学归纳法，可证在一切 $\left[\frac{k-1}{2A},\frac{k}{2A}\right](k=1,2\cdots)$ 上恒有 $f(x)\equiv 0$. 所以 $f(x)\equiv 0,x\in[0,+\infty)$

466.（浙江大学） 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 (a,b) 内可微，且 $g(a)=0$，若有实数 $\lambda\neq 0$，使得 $|g(x)f(x)+\lambda g'(x)|\leqslant|g(x)|,x\in(a,b)$ 成立，试证：$g(x)\equiv 0$.

证 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而有界，即存在 $c>0$，使

$|f(x)|<c,x\in[a,b]$，

$|g(x)|\geqslant|g(n)f(n)+\lambda g'(x)|\geqslant|\lambda|\cdot|g'(x)|-|g(x)f(x)|$.

$\therefore|\lambda||g'(x)|\leqslant|g(x)|+|f(x)g(x)|\leqslant(1+c)|g(x)|$,

$\because|g'(x)|\leqslant\frac{1+c}{|\lambda|}|g(x)|$.

又 $g(a)=0$，仿上题可证得 $g(x)\equiv 0$.

467.(北京大学,1990年)　证明:函数

$$f(x) = (\frac{2}{\pi} - 1)\ln x - \ln 2 + \ln(1 + x) \quad ①$$

在(0,1)内只有一个零点.

证　$f'(x) = (\frac{2}{\pi} - 1) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + x}$. ②

令 $f'(x) = 0$,可解得 $x = \frac{\pi}{2} - 1$. 且当 $x > \frac{\pi}{2} - 1$ 时,$f'(x) > 0$;当 $x < \frac{\pi}{2} - 1$ 时,$f'(x) < 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2} - 1$ 时有极小值.

由于 $f'(x)$ 在$(\frac{\pi}{2} - 1, 1)$为严格单调递增,从而 $f(x)$ 有零点,至多只能有一个,同理 $f(x)$ 在$(0, \frac{\pi}{2} - 1)$有零点也至多只能有一个.

$\therefore \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 0$(从负的方向趋于0).

因为 $f(x)$ 连续,且 $x = \frac{\pi}{2} - 1$ 为极小值点.

$\therefore f(\frac{\pi}{2} - 1) < 0$.

从而 $f(x)$ 在(0,1)有且仅有一个零点.

468.(南京航空学院)　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微,如果 $a \geqslant 0$,证明:(a,b)内存在三个数 x_1, x_2, x_3,使

$$f'(x_1) = (b + a)\frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2 + ba + a^2)\frac{f'(x_3)}{2x_3^2}. \quad ①$$

成立.

证　由题设及拉格朗日中值定理,存在 $x_1 \in (a,b)$ 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1) \quad ②$$

再令 $F(x) = f(x)$,$G(x) = x^2$,由柯西中值定理,则存在 $x_2 \in (a,b)$ 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(x_2)}{2x_2}. \quad ③$$

再令 $F(x) = f(x)$,$G(x) = x^3$,由柯西定理

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(x_3)}{3x_3^2} \quad ④$$

由②,③,④即证①式.

469.(吉林工业大学) 设 n 为自然数,试证:

$e^{-t}-(1-\frac{t}{n})^{n}\leqslant\frac{t^{2}}{n}e^{-t}$(当 $t\leqslant n$ 时). ①

证 ① 式两边同乘 e^{t} 并利用级数展开,则 ②

② 式左边 $=1-\left\{1-t+\frac{n-1}{2n}t^{2}+o[(\frac{t}{n})^{2}]\right\}[1+t+\frac{t^{2}}{2}+o(t^{2})]$

$=\frac{t^{2}}{2n}+o(t^{2})$.

但$\frac{t^{2}}{2n}\leqslant\frac{t^{2}}{n}$,所以 ② 式成立,从而 ① 式成立.

470.(吉林大学) 证明:当 $x>0$ 时,下列不等式成立:

$$x-\frac{x^{3}}{6}<\sin x<x-\frac{x^{3}}{6}+\frac{x^{5}}{120}.$$

证 (1) 令 $f(x)=\sin x+\frac{x^{3}}{6}-x$,则

$f'(x)=\cos x+\frac{x^{2}}{2}-1, f''(x)=x-\sin x, f'''(x)=1-\cos x$.

$\because f(0)=f'(0)=f''(0)=0, f'''(x)>0, x\in(0,2\pi)$.

由泰勒公式式

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^{2}+\frac{1}{3!}f'''(\xi)x^{3}>0, x\in(0,2\pi)$

此即 $x-\frac{x^{3}}{6}<\sin x, x\in(0,2\pi)$.

而当 $x>6$ 时,$\sin x\geqslant-1, x-\frac{x^{3}}{6}<-1\leqslant\sin x$.

$\therefore \sin x>x-\frac{x^{3}}{6},(x>0)$. ①

(2) 再令 $F(x)=x-\frac{x^{3}}{6}+\frac{x^{5}}{120}-\sin x$.则

$F'(x)=1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{24}-\cos x$,

$F''(x)=-x+\frac{x^{3}}{6}+\sin x$,

$F'''(x)=-1+\frac{x^{2}}{2}+\cos x$,

$F^{(4)}(x)=x-\sin x$,

$F^{(5)}(x)=1-\cos x$.

$\because F(0)=F'(0)=F''(0)=F^{(3)}(0)=F^{(4)}(0)=0$.

$F^{(5)}(x)>0, x\in(0,2\pi)$.

由泰勒公式

$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2!}F''(0)x^2 + \frac{1}{3!}F^{(3)}(0)x^3 + \frac{1}{4!}F^{(4)}(0)x^4 + \frac{F^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 > 0, x \in (0,2\pi)$,

$\therefore \sin x < x < -\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, x \in (0,2\pi)$.

再当 $x > 6$ 时，$\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{6}(\frac{x^2}{20} - 1) > 0$.

$\therefore x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} > 6 > \sin x$

由上可得

$$\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, (x > 0). \qquad ②$$

由 ①,② 即证结论.

471.(云南大学)　设 $f(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的可微函数.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限，问 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 是否必定存在?

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 都存在且有限，

那么必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$，试证明之.

解　(1) 不一定. 比如 $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \text{而} f'(x) = \frac{2x^2\cos x^2 - \sin x^2}{x^2} = 2\cos x^3 - \frac{\sin x^2}{x^2}, \qquad ①$$

取 $x_n = \sqrt{2n\pi}, n = 1,2\cdots\cdots$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x_n) = 2$,

再取 $x'_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, n = 1,2\cdots\cdots$ 则

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x'_n) = 0$.

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在.

(2) 证明见本节第 446 题.

472.(华中师范大学)　已知小球半径为 R，求其外切圆锥的最小体积.

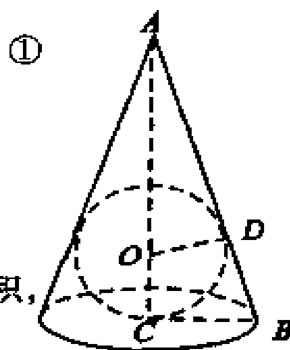
解　如图，已知　$R = OD$，设圆锥底面半径 $BC = r$，高 $AC = h$,

$\because \Delta AOD \sim \Delta ABC$，所以 $\frac{R}{r} = \frac{OD}{BC}\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{(h-R)^2 - R^2}}{h}$,

$\therefore \quad r = \frac{R}{h}\sqrt{h^2 - 2Rh}$.

再设圆锥的体积为 V，则

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h - 2R}. \qquad ①$$



若令 $V_1 = \frac{h^2}{h - 2R}$,则

$$\frac{dV_1}{dh} = \frac{h^2 - 4Rh}{(h - 2R)^2},$$

由 $\frac{dV_1}{dh} = 0$,解得 $h = 4R$,由于实际问题有最小体积,由 ① 式

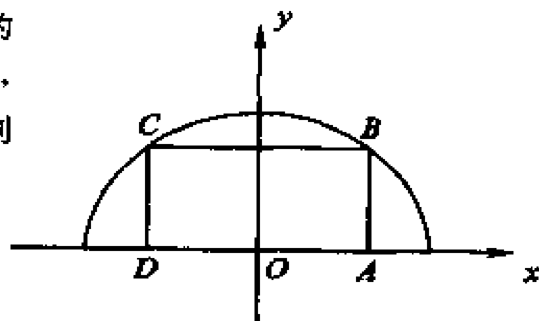
$$\min V = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{(4R)^2}{4R - 2R} = \frac{8\pi}{3}R^3.$$

473.(山东大学) 试在一半径为 R 的半圆内,作一面积最大的矩形.

解 设坐标原点在圆心,则圆的方程为

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

再设所求矩形为 $ABCD$(如图),A 的坐标为 $(x,0)$ 那么 B 点坐标为 $(x,\sqrt{R^2 - x^2})$,设所求矩形面积为 S,则



$$S = 2x\sqrt{R^2 - x^2},$$

$$\frac{dS}{dx} = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

令 $\frac{dS}{dx} = 0$,解得 $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

由于实际问题存在最大值,因此所求 A,B,C,D 四点坐标分别为

$$\left(\frac{R}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{R}{\sqrt{2}},0\right).$$

474.(同济大学) 求曲线 $\Gamma: y = x^2 - 1(x > 0)$ 上的点 P,作 Γ 的切线,与坐标轴交于 M,N(见图),试求 P 点坐标使 ΔOMN 的面积最小.

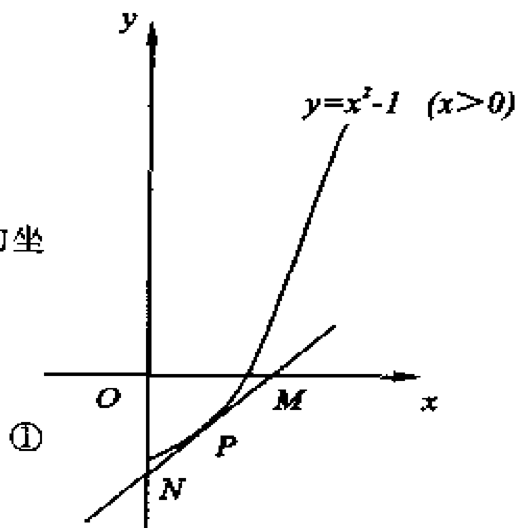
解 设 P 的坐标为 (x,y),则过 P 的切线方程为

$$Y - y = 2x(X - x) \qquad ①$$

在 ① 中分别令 $Y = 0$ 和 $X = 0$,得 M,N 的坐标为 $\left(x - \frac{y}{2x},0\right)$ 和 $(0,y - 2x^2)$ 再设 ΔOMN 的面积为 S,则

$$S = \frac{1}{2}\left(x - \frac{y}{2x}\right)(2x^2 - y)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^3 + 2x + \frac{1}{x}\right)$$



则 $S' = \dfrac{3x^4+2x^2-1}{4x^2}$,

令 $S' = 0$,解得

$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$(舍去).

由于实际问题存在最小面积,∴ P 的坐标为$(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3})$,最小面积等于$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

475.(上海师范大学) 求证

$$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}, \forall x \in (0,\frac{\pi}{2}). \quad ①$$

证法 1 原式等价于

$$\sin^2 x > x^2\cos x, x \in (0,\frac{\pi}{2}). \quad ②$$

$$\sin^2 x = [x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)]^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4). \quad ③$$

$$x^2\cos x = x^2(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2))$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \quad ④。$$

由于 $x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) > x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

∴ $\sin^2 x > x^2\cos x$.

证法 2 ① 式等价于

$$\sin x \cdot \tan x > x^2 \quad ⑤$$

令 $f(x) = \sin x \cdot \tan x - x^2$,则

$f'(x) = \cos x \cdot \tan x + \sin x\sec^2 x - 2x$

$f''(x) = -\sin x\tan x + \cos x\sec^2 x + \cos x\sec^2 x - 2\sin x\sec^2 x\tan x - 2$,

$f'''(x) = \sin x(5\sec^2 x - 1) + 6\sin^3 x\sec^4 x > 0, x \in (0,\frac{\pi}{2})$.

由于 $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$,再由泰勒公式

$$\therefore f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x_3 > 0, x \in (0,\frac{\pi}{2}).$$

此即证 $\sin x \cdot \tan x - x^2 > 0$.

移项即证 ⑤ 式,从而 ① 式成立.

476.(中国人民大学,2000 年) 证明:(1) 存在 $c \in (0,1)$ 使得 $c = e^{-c}$;(2) 任给 $x_1 \in (0,1)$ 定义,$x_{n+1} = e^{-x_n}$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

证 (1) 令 $f(x) = x - e^{-x}$, $(0 < x < 1)$,则

$f(0) = -1, f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0.$

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

又因为

$f'(x) = 1 + e^{-x} > 0, (0 < x < 1).$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调递增,从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根,设此实根为 c,则 $c \in (0,1)$,则 $c = e^{-c}$.

(2) 由 $x_1 \in (0,1)$,则 $x_2 = e^{-x_1} \in (e^{-1},1)$

若 $x_n \in (e^{-1},1)$ 则 $x_{n+1} = e^{-x_n} \in (e^{-1}, e^{-e^{-1}}), (n \geqslant 2).$

令 $f(x) = e^{-x}$,则

$|f'(x)| = e^{-x} < e^{-e^{-1}} = r < 1.$

故 $\{x_n\}$ 为压缩映射,$\{x_n\}$ 收敛,即 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$(存在)且 $0 < l < 1$.

再由 $x_{n+1} = e^{-x_n}$ 得

$l = e^{-l}$

再由(1)知 $l = c$, $\therefore \lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$.

477.(长沙铁道学院) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,

且对任意 $x_1, x_2 \in [a,b], \lambda \in [0,1]$,恒有

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \qquad ①$$

证明:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证 $\forall t \in [a,b]$,则存在 $\lambda \in [0,1]$

使 $t = a + \lambda(b-a)$ 或 $t = b - \lambda(b-a)$.

$$\therefore \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f[a + \lambda(b-a)]d\lambda, \qquad ②$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f[b - \lambda(b-a)]d\lambda, \qquad ③$$

② + ③ 可得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f[a + \lambda(b-a)]\mathrm{d}y + \int_0^1 f[b - \lambda(b-a)]d\lambda\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\{f[a + \lambda(b-a)] + f[b - \lambda(b-a)]\}d\lambda \qquad ④.$$

令 $x_1 = a + \lambda(b-a)$, $x_2 = b - \lambda(b-a)$,则由

$$\frac{1}{2}[f[a+\lambda(b-a)]+f[b-\lambda(b-a)]]=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

$$\geqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})=f(\frac{a+b}{2}). \qquad ⑤$$

将 ⑤ 代入 ④ 可得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 f(\frac{a+b}{2})d\lambda = f(\frac{a+b}{2}). \qquad ⑥$$

另一方面,由 ① 式.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f[\lambda b+(1-\lambda)a]d\lambda.$$

$$\leqslant \int_0^1[\lambda f(b)+(1-\lambda)f(a)]d\lambda$$

$$= f(b)\cdot\frac{\lambda^2}{2}\Big|_0^1 - f(a)\cdot\frac{(1-\lambda)^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad ⑦$$

478.(西北电讯工程学院,陕西机械学院,东北工学院) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数,证明:在 (a,b) 内存在 ξ,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

证 由泰勒公式

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2,$$

其中 η 在 x 与$\frac{a+b}{2}$之间,从 a 到 b 积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\frac{a+b}{2})(b-a)+f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2\mathrm{d}x. \qquad ①$$

$$\because \int_a^b(x-\frac{a-b}{2})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-\frac{a+b}{2})^2\Big|_a^b = 0, \qquad ②$$

由积分中值定理

$$\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2\mathrm{d}x = f''(\eta)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x$$

$$= f''(\xi)[\frac{1}{3}(x-\frac{a+b}{2})^3]\Big|_a^b = \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3 \qquad ③$$

其中 $\xi(a,b)$,再将 ②,③ 代入 ① 得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

479.(华中师范大学,2001 年)　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可微, $f(\frac{a+b}{2})=0$,证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{24},\text{其中 } M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$$

证　由上题可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi),\xi\in(a,b),$$

$$\therefore \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{24}(b-a)^3|f''(\xi)| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{24}.$$

480.(1) 设 p,q,是大于 1 的常数,且

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

证明: $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x,(x>0)$;　①

(2) 设 $f''(x)>0,f(0)=0$,证明:

$f(x_1+x_2)>f(x_1)+f(x_2),(x_1>0,x_2>0)$　②

证　(1) 令 $F(x)=x^p,(x>0)$,分三种情况讨论.

当 $x\in(0,1)$ 时,对 $F(x)$ 在 $[x,1]$ 上应用拉格朗日中值定理有

(ⅰ) $1^p-x^p=F'(\xi)(1-x)$

$$=p\xi^{p-1}(1-x)<p(1-x),\quad ③$$

其中 $\xi\in(x,1)$,由 ③ 解得

$$x^p>1-p+px,$$

$$\therefore \frac{1}{p}x^p+1>\frac{1}{p}+x.$$

又 $\because 1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$.

$$\therefore \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}>x.$$

(ⅱ) 当 $x=1$ 时

$$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1=x.$$

(ⅲ) 当 $x>1$ 时,对 $F(x)$ 在 $[1,x]$ 上应用拉格朗日中值定理,有

$$x^p-1^p=f'(\eta)(x-1)>p(x-1)=px-p,$$

其中 $\eta\in(1,x)$

$$\therefore \frac{1}{p}x^p+1-\frac{1}{p}>x,$$

$\therefore \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} > x.$

综上可知 ① 式得证.

(2) 不妨设 $0 < x_1 \leqslant x_2$,对 $f(x)$ 分别在 $[0,x_1]$ 与 $[x_2,x_1+x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理,得

$$f(x_1) - f(0) = f'(\xi)x_1,(0 < \xi_1 < x_1), \quad ④$$

$$f(x_1+x_2) - f(x_2) = f'(\xi_2)x_1,(x_2 < \xi_2 < x_1+x_2), \quad ⑤$$

由于 $\xi_1 < \xi_2$,由 $f''(x) > 0$,所以 $f'(x)$ 单调增加,从而

$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$. 由 ④,⑤ 两式及 $x_1 > 0$,可得

$f(x_1+x_2) - f(x_2) > f(x_1) = f(0)$

$\therefore f(x_1+x_2) > f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) - f(0) = f(x_1) + f(x_2).$

481.(长沙铁道学院) 验证函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20+x^2}{8}, 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{x^2+2}{x}, 2 < x < +\infty \end{cases}$$

在闭区间[0,4]上满足拉格朗日中值定理的条件,并求出中值公式中的中间值 ξ.

解 显然 $f(x)$ 在 $[0,2)$ 及 $(2,+\infty)$ 上连续,又

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\frac{20+x^2}{8} = 3 = f(2),$$

$$\lim_{x\to2^+} = \lim_{x\to2^+}\frac{x^2+2}{x} = 3.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to2} f(x) = f(2).$

从而可知 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处连续,那么 $f(x)$ 在[0,4]上连续,又由 ① 式可得

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x, x \in (0,2) \\ 1 - \frac{2}{x^2}, x \in (2,4) \end{cases}$$

$$f'_-(2) = \lim_{h\to0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to0^-}\frac{\frac{20+(2+h)^2}{8} - 3}{h} = \frac{1}{2}.$$

$$f'_+(2) = \lim_{h\to0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{\frac{(2+h)^2+2}{2+h} - 3}{h} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore f'(2) = \frac{1}{2}.$

综上可知，$f(x)$ 在$(0,4)$内可导，从而 $f(x)$ 在$[0,4]$上满足拉格朗日中值定理，从而存在 $\xi\in(0,4)$ 使

$$f(4)-f(0)=f'(\xi)\cdot(4-0), \quad ②$$

$$\because f(4)=\frac{9}{2}, f(0)=\frac{5}{2}. \quad ③$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x}{4}, 0<x\leqslant 2,\\ 1-\frac{x}{x^2}, 2<x<4.\end{cases} \quad ④$$

由 ②③ 可得

$$\therefore f'(\xi)=\frac{1}{2} \quad ⑤$$

由 ④，⑤ 可解得 $\xi=2$.

482.（复旦大学，1998 年） 设 $f(x)$ 定义在$[0,c]$，$f'(x)$ 存在且单调下降，$f(0)=0$. 请用拉格朗日中值定理证明：

对于 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$，恒有

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b). \quad ①$$

证 当 $a=0$ 时，① 式是显然成立.

当 $a\neq 0$（即 $a>0$）时，$f(x)$ 分别对$[0,a]$，$[b,a+b]$应用拉格朗日中值定理，则存在 $\xi_1\in(0,a)$，$\xi_2(b,a+b)$ 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{f(a)}{a}, \quad ②$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(a+b)-f(b)}{(a+b)-b}=\frac{f(a+b)-f(b)}{a} \quad ③$$

因为 $f'(x)$ 单调下降，所以

$$f'(\xi_1)\geqslant f'(\xi_2). \quad ④$$

由 ②，③，④ 有

$$\frac{f(a)}{a}\geqslant\frac{f(a+b)-f(b)}{a},$$

$$\therefore f(a+b)\leqslant f(a)+f(b).$$

483.（华中理工大学） 设 $0<\alpha<1$，$x,y\geqslant 0$，证明：

$$x^{\alpha}y^{1-\alpha}\leqslant\alpha x+(1-\alpha)y. \quad ①$$

证 当 $y=0$ 时，① 式显然成立.

当 $y>0$ 时，① 式可改写为

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}\leqslant\alpha\left(\frac{x}{y}\right)+(1-\alpha), \quad ②$$

令 $f(t)=\alpha t+(1-t)-t^{\alpha}$，$(t\geqslant 0)$， ③

则 $f'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha(1 - \frac{1}{t^{1-\alpha}})$.

令 $f'(t) = 0$,得驻点 $t = 1$,但是

$f(0) = 1 - \alpha > 0$,

$f(1) = \alpha + (1 - \alpha) - 1 = 0$,

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}[t(\alpha - t^{\alpha-1}) - (1 - \alpha)] = +\infty$.

$\therefore f(t)$ 在$[0, +\infty)$最小值为 $f(1) = 0$,即

$f(t) \geqslant 0, (t \geqslant 0)$.

$\therefore \alpha t + (1 - \alpha) - t^{\alpha} \geqslant 0, (t \geqslant 0)$.

令 $t = \frac{x}{y}$,从而

$\alpha(\frac{x}{y}) + (1 - \alpha) - (\frac{x}{y})^{\alpha} \geqslant 0$

移项后即证 ② 式,从而 ① 式成立.

484.(北京科技大学,1999年) 设 $f(x)$ 在$[1,2]$上连续,在$(1,2)$内可微

证明:存在 $\xi \in (1,2)$ 使得 $f(2) - f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$.

证 考虑函数 $f(x)$ 和 $g(x) = \frac{1}{x}$,则 $f(x)$, $g(x)$ 在$[1,2]$内可微,由柯西定理有

$$\frac{f(2) - f(1)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{f'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}}.$$

即 $f(2) - f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$.

第五章　不定积分

§1　概念与基本公式

【考点综述】

一、综述

1. 定义　在某个区间 I 内，若有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，称 $F(x)+C$（C 是任意常数）是 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$，于是 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

2. 性质

(1) $[\int f(x)\mathrm{d}x]'=f(x)$.

(2) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

(3) $\int(k_1f_1(x)+k_2f_2(x))\mathrm{d}x=k_1\int f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int f_2(x)\mathrm{d}x$.（$k_1,k_2$ 为常数）

3. 基本积分公式（略）.

二、解题方法

1. 考点 1　不定积分的基本概念. 解题方法主要根据定义.（见下面第 485 题）

2. 考点 2　用基本公式求不定积分.

【经典题解】

485. 设 $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，且 $F(1)=\dfrac{3\pi}{2}$，则 $F(x)=$ ________.

答　$\arcsin x+\pi$. 因为 $F(x)=\int F'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，而 $F(1)=\dfrac{3\pi}{2}=\arcsin 1+C$，$\therefore C=\pi$，因此 $F(x)=\arcsin x+\pi$.

486. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$ 求$\int f(x)\mathrm{d}x$.

解 先分段求出(去掉分段点):

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}C_1, & x<0,\\ \frac{1}{2}x^2+x+C_2, & 0<x<1,\\ x^2+C_3, & x>1.\end{cases}$$

再考虑分段点的情形:由于 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$ 的连续点,因此 $f(x)$ 的不定积分只能分别在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内得到.令

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{2}x^2+x+C_2\right)=\lim_{x\to 1+0}(x^2+C_3),$$

解得 $C_3=\frac{1}{2}+C_2$.因此

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}C_1, & x<0,\\ \frac{1}{2}x^2+x+C_2, & 0<x\leqslant 1,\\ x^2+\frac{1}{2}+C_2, & x>1.\end{cases}$$

其中 C_1,C_2 是两个独立常数.

487. 求$\int\max\{x^3,x^2,1\}\mathrm{d}x$.

解 令 $\varphi(x)=\max\{x^3,x^2,1\}$,则

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^3, & x>1,\\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & x<-1.\end{cases}$$

设 $F(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的一个原函数,则有

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, & x<-1,\\ x+C_2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{4}x^4+C_3, & x>1,\end{cases}$$

其中 C_1,C_2,C_3 为待定常数.

因为原函数连续,故

$$\lim_{x\to 1-0}(x+C_2)=\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{1}{4}x^4+C_3\right),\ \lim_{x\to -1+0}(x+C_2)=\lim_{x\to -1-0}\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right),$$

$\therefore C_3 = \frac{3}{4} + C_2, C_1 = -\frac{2}{3} + C_2.$

因此

$$\int \max\{x^3, x^2, 1\} \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3} + C, & x < -1, \\ x + C, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4} + C, & x > 1. \end{cases}$$

注　如果一个函数存在间断点,那么此函数在其间断点所在的区间上就不一定存在原函数.所以在求分段函数的不定积分时,一定要注意考虑间断点处的情况.

488. 证明函数 $\operatorname{sgn}x, x \in [-1,1]$ 不存在原函数 $F(x)$.

证　若存在 $F(x)$ 使 $F'(x) = \operatorname{sgn}x, x \in [-1,1]$,则由微分中值定理可得

$$F'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} F'(\xi_1) = \lim_{\xi_1 \to 0^+} F'(\xi_1) = 1,$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} F'(\xi_2) = \lim_{\xi_2 \to 0^-} F'(\xi_2) = -1.$$

说明 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导,与 $F'(x) = \operatorname{sgn}x, x \in [-1,1]$ 矛盾.所以 $\operatorname{sgn}x, x \in [-1,1]$ 不存在原函数.

§2　不定积分的求法

【考点综述】

不定积分的求法有以下几种:

1. 直接积分法.

2. 换元积分法.

(1) 第一换元积分法(即"凑微分"法).

如何"凑微分"方法灵活多样,常见的可归类如下

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b) \quad (a \neq 0),$$

$$\int x^n f(ax^{n+1}+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a(n+1)}\int f(ax^{n+1}+b)\mathrm{d}(ax^{n+1}+b) \quad (a \neq 0),$$

$$\int a^x f(a^x+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\int f(a^x+b)\mathrm{d}(a^x+b) \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{x} f(\ln x + b) = \int f(\ln x + b)\mathrm{d}(\ln x + b),$$

$$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x),$$

$$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x),$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} f(\tan x)\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x).\text{等等.}$$

(2) 第二换元积分法.

第二换元法较多地用于无理函数的积分，通过变换去掉被积函数中的根号，简化积分。

对于同一个积分，可能存在着不同的代换法，究竟选用什么样的变换才能奏效，完全由被积函数的特点所决定，可以灵活考虑。

3. 分部积分法

分部积分法主要用于被积式中含有对数函数、反三角函数、幂函数、三角函数或指数函数因子的情形，按“对反幂三指”的优先顺序选择 u 而使用分部积分法.

4. 有理函数的积分 $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$

这种类型积分的处理，一般来说，是把真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$（若 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是假分式，可化为多项式与真分式之和）分解为若干简单的部分分式之和，再分别求出每一部分的积分.

5. 三角函数有理式的积分 $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$

此类积分，一般通过万能代换 $t = \tan\frac{x}{2}$，可把它化为有理函数的不定积分.但并不一定简便，所以在具体计算时，应视被积函数的特点采用更为灵活简便的代换.

6. 某些无理根式的不定积分

(1) $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\mathrm{d}x$ 型不定积分（$ad - bc \neq 0$）.用代换 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 可化为有理函数的不定积分.

(2) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 型不定积分.可先通过配方、换元化为以下三种类型之一：

$$\int R(u, \sqrt{u^2 \pm k^2})\mathrm{d}u, \int R(u, \sqrt{k^2 - u^2})\mathrm{d}u.$$

再分别令 $u = k\tan t, u = k\sec t, u = k\sin t$ 后,可化为三角有理式的不定积分.

二、解题方法

1. 考点 1　求不定积分

解题方法(1) 用基本公式(见下面第 489 题);(2) 分部积分法(见下面第 493 题);(3) 凑微分法(见下面第 494 题);(4) 换元法(见下面第 490 题).

2. 考点 2　建立递推公式或证明等式.

【经典题解】

489.(北京大学,1990年)　试求不定积分 $\int(\cos^4 x - \sin^4 x)\mathrm{d}x$ 与 $\int(\cos^4 x + \sin^4 x)\mathrm{d}x$,进而求出不定积分 $\int \cos^4 x\mathrm{d}x$ 与 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

解　$\because \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, $\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

$$\therefore \int(\cos^4 x - \sin^4 x)\mathrm{d}x = \int \cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C, \quad ①$$

$$\int(\cos^4 x + \sin^4 x)\mathrm{d}x = \int\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x + C, ②$$

其中 C 为非零常数.

$\frac{① + ②}{2}$ 可得 $\int \cos^4 x\mathrm{d}x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$,

$\frac{② - ①}{2}$ 可得 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

490.(华东师范大学,2000 年)　计算 $\int \frac{\cos x\sin^3 x}{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{\cos x\sin^3 x}{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\cos x(1 - \cos^2 x)}{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}(-\cos x) \xlongequal{令\ t = \cos x} -\int \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int\left[t - \frac{2t}{1 + t^2}\right]\mathrm{d}t = \int t\mathrm{d}t - \int \frac{2t}{1 + t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - \ln(1 + t^2) + C = \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln(1 + \cos^2 x) + C.$$

其中 C 为任意常数.

491.(华东水利电力学院)　计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1 + x^2)}\mathrm{d}x$.

解　原式 $= \int \frac{\arctan x}{x^2}dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$$= -\int \arctan x d(\frac{1}{x}) - \int \arctan x d(\arctan x)$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot d(\arctan x) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \frac{1}{2}\int(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2})d(x^2)$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

492.(复旦大学,1999 年)　求不定积分$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

解　$\int x \cdot \ln\frac{1+x}{1-x}dx = \int \ln\frac{1+x}{1-x}d(\frac{x^2}{2})$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\frac{x^2}{1-x^2}dx = \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \int(1 - \frac{1}{1-x^2})dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C.$$

493.(华东师范大学,2001 年)　求不定积分$\int\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$.

解　$\int\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx = -\int\ln(1+x)d(\frac{1}{x})$

$$= -\frac{1}{x}\ln(1+x) + \int\frac{1}{x}d(\ln(1+x)) = -\frac{1}{x}\ln(1+x) + \int\frac{1}{x(1+x)}dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(1+x) + \int(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(1+x) + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$$

494.(华东师范大学,1998 年)　计算$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解　$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}\int(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})d(x^2) = \frac{1}{2}\int(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})d(1+x^2) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x^2} + C.$

495.(山东大学)　求积分$\int\tan^4 x dx$.

解　$\int\tan^4 x dx = \int\tan^2 x(\sec^2 x - 1)dx$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \mathrm{d}x - \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$$

$$= \int \tan^2 x \mathrm{d}(\tan x) - \tan x + x$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.$$

496.(清华大学) 计算$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 2}}\mathrm{d}x (x > 1)$.

解 令$\sqrt{e^x - 2} = u, e^x = u^2 + 2 \quad x = \ln(u^2 + 2), \mathrm{d}x = \frac{2u\mathrm{d}u}{u^2 + 2}$.

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 2}}\mathrm{d}x = 2\int \ln(2 + u^2)\mathrm{d}u$$

$$= 2u\ln(2 + u^2) - 4\int \frac{u^2}{2 + u^2}\mathrm{d}u$$

$$= 2u\ln(2 + u^2) - 4\int (1 - \frac{2}{2 + u^2})\mathrm{d}u$$

$$= 2u\ln(2 + u^2) - 4u + \frac{8}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{e^x - 2}(x - 2) + 4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{1}{2}e^x - 1} + C.$$

497.(上海交通大学) 求(1)$\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{1 + x^2}}\mathrm{d}x$;(2)$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $t = \sqrt{1 + x^2}$, 得$\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{1 + x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{t^2 - 1}\mathrm{d}t = t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + C = \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1} + C.$

(2) $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{1 + \cos x}\mathrm{d}x$

$$= \int x\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2}) - \int \frac{1}{1 + \cos x}\mathrm{d}(1 + \cos x)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x - \ln(1 + \cos x)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\cos\frac{x}{2} - \ln(1 + \cos x) + C.$$

498.(北京工业学院) 建立$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{x^2 + 1}}$的递推公式.

解 $I_{n-2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-2}\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{1}{x^{n-1}}\mathrm{d}(\sqrt{x^2 + 1})$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n-1}} - (1-n)\int \sqrt{x^2+1}\,\frac{1}{x^n}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n-1}} + (n-1)\int \frac{x^2+1}{x^n\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n-1}} + (n-1)(I_{n-2}+I_n).$$

解得 $I_n = -\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{(n-1)x^{n-1}} + \dfrac{2-n}{n-1}I_{n-2}.$

499.(华中工学院) 计算$\int e^x \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x.$

解 原式 =

$$\int e^x \frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int e^x \frac{1+\sin x-\cos x-\sin x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{e^x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x + \int \frac{e^x}{\sin x}\mathrm{d}x - \int e^x\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x - \int e^x\cot x\mathrm{d}x$$

$$= \int e^x\mathrm{d}(-\cot x) + \int \frac{e^x}{\sin x}\mathrm{d}x - \int e^x\mathrm{d}(-\frac{1}{\sin x}) - \int e^x\cot x\mathrm{d}x$$

$$= -e^x\cot x + \int e^x\cot x\mathrm{d}x + \int \frac{e^x}{\sin x}\mathrm{d}x + \frac{e^x}{\sin x} - \int\frac{e^x}{\sin x}\mathrm{d}x - \int e^x\cot x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^x}{\sin x} - e^x\cot x + C.$$

500.(西安交通大学) 求$\int t^a\ln t\mathrm{d}t$(a为常数).

解 (1) 当 $a=-1$ 时,$\int t^a\ln t\mathrm{d}t = \int\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \int \ln t\mathrm{d}(\ln t) = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + C.$

(2) 当 $a\neq -1$ 时,

$$\int t^a\ln t\mathrm{d}t = \frac{1}{a+1}\int\ln t\mathrm{d}(t^{a+1}) = \frac{1}{a+1}(t^{a+1}\ln t - \int t^a\mathrm{d}t)$$

$$= \frac{t^{a+1}}{a+1}(\ln t - \frac{1}{a+1}) + C.$$

故
$$\int t^a\ln t\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{t^{a+1}}{a+1}(\ln t - \dfrac{1}{a+1}) + C, & a\neq -1, \\ \dfrac{1}{2}(\ln t)^2 + C, & a=-1. \end{cases}$$

501.(大连铁道学院) 计算$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}.$

解法1 令 $t=\cos x$,则 $\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x} = \int\frac{1}{(2+t)\cdot\sin x}\cdot(-\frac{1}{\sin x})\mathrm{d}t = -\int\frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\mathrm{d}t$$

$$= \int\left[\frac{\frac{1}{3}}{2+t}+\frac{-\frac{1}{2}}{1+t}+\frac{-\frac{1}{6}}{1-t}\right]dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln(2+t)-\frac{1}{2}\ln(1+t)+\frac{1}{6}\ln(1-t)+C$$

$$= \frac{1}{3}\ln(2+\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)+\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)+C.$$

解法 2 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$，

$$\int\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}dx=\int\frac{1+t^2}{t(3+t^2)}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^2(3+t^2)}d(t^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\frac{\frac{1}{3}}{t^2}+\frac{\frac{2}{3}}{3+t^2}\right]d(t^2)=\frac{1}{6}\ln t^2+\frac{1}{3}\ln(3+t^2)+C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(\tan^2\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{3}\ln\left(3+\tan^2\frac{x}{2}\right)+C.$$

注：本题两种解法所得到的结果从表达式上看不一样，但都是正确的（可以通过求导的方法去验证），这是在求解不定积分问题时经常会碰到的.

502.（复旦大学，1997 年） 求不定积分 $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$.

解 $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx=\int\ln(\sin x)d(-\cot x)$

$$= -\cot x\cdot\ln(\sin x)+\int\cot x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= -\cot x\cdot\ln(\sin x)+\int(\csc^2 x-1)dx$$

$$= -\cot x\cdot\ln(\sin x)-\cot x-x+C.$$

503.（四川联合大学，1999 年） 计算不定积分

$$I=\int\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}e^{3\arctan x}dx.$$

解 令 $t=\arctan x$，则 $x=\tan t$，

$$I=\int\frac{1}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}e^{3t}\sec^2 t\,dt=\int e^{3t}\cos t\,dt$$

$$= e^{3t}\sin t-3\int e^{3t}\sin t\,dt$$

$$= e^{3t}\sin t-3e^{3t}\cdot\cos t+9\int e^{3t}\cos t\,dt,$$

所以 $I=\frac{1}{8}e^{3t}(3\cos t-\sin t)$

$$= \frac{1}{8}e^{3\arctan x}\cdot\frac{3-x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

504.(四川联合大学,2000年)　求不定积分$\int(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x})\mathrm{d}x$.

解　令$t=\ln x$,则$x=\mathrm{e}^t$,

$$\int(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x})\mathrm{d}x=\int(\ln t+\frac{1}{t})\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\int\ln t\cdot\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^t\ln t-\int\mathrm{e}^t\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^t\ln t+C$$

$$=x\ln\ln x+C.$$

505.(湖北大学,2001年)　导出不定积分$I_n=\int(\ln x)^n\mathrm{d}x$的递推式($n$为自然数).

解　$I_n=\int(\ln x)^n\mathrm{d}x=x\cdot(\ln x)^n-\int x\cdot n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$=x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x=x(\ln x)^n-nI_{n-1},$$

即　$I_n=x(\ln x)^n-nI_{n-1}$,n为自然数.

506.(浙江大学,2001年)　求$\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^3-3x+2}$.

解　$x^3-3x+2=x^3-1-3x+3=(x-1)^2(x+2)$.

令　$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$

则　$x=A(x-1)^2+B(x-1)(x+2)+C(x+2)$　①

在①式中分别令$x=1,x=-2,x=0$代入,可解得$A=-\frac{2}{9}$,$B=\frac{2}{9}$,$C=\frac{1}{3}$.

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^3-3x+2}=-\frac{2}{9}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}+\frac{2}{9}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$$

$$=-\frac{2}{9}\ln|x+2|+\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+C.$$

507.(浙江大学,2002年)　求不定积分$\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　令$\mathrm{sh}x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$,$\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$　则可证

$\sqrt{1+\mathrm{sh}^2x}=\mathrm{ch}x$,$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$,

$\int\mathrm{ch}^2x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x+C.$

那么,作积分变换$x=\mathrm{sh}t$,则

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\int ch^2t\,dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}sh2t+C. \qquad ①$$

由于

$$x+\sqrt{1+x^2}=sht+cht=e^t,$$

$$\therefore t=\ln(x+\sqrt{1+x^2}), \qquad ②$$

$$sh2t=2sht\,cht=2x\sqrt{1+x^2}. \qquad ③$$

将②,③代入①得

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+C.$$

508.(中国地质大学,2002年) 计算:$\int\frac{dx}{1+4\cos x}$.

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$,则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,$dt=\frac{2dt}{1+t^2}$,从而

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{1+4\cos x}&=\int\frac{2}{5-3t^2}dt\\&=-\int\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1}{\sqrt3t-\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt3t+\sqrt5}\right)dt\\&=-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{\sqrt3t-\sqrt5}{\sqrt3t+\sqrt5}+C\\&=\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{\sqrt3\tan\frac{x}{2}+\sqrt5}{\sqrt3\tan\frac{x}{2}-\sqrt5}+C.\end{aligned}$$

第六章　定积分

§1　定积分的计算

【考点综述】

一、概述

1. 定义　设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数，在 (a,b) 内插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n = b. \quad ①$$

令 $\|T\| = \max\limits_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$，若对 $\forall \epsilon > 0$，总 $\exists \delta > 0$，使得对 $[a,b]$ 上任意分割 T，以及任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2\cdots\cdots,n)$，只要它的细度 $\|T\| < \delta$ 时，都存在实数 J，使 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \epsilon$ 成立，则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积，数 J 称为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分，或称黎曼积分，记作 $J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2. 几何意义　设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函，定积分 $\int_a^b (x)\mathrm{d}x$ 的值是由曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴上方部分所有曲边梯形的正面积与下方部分所有曲边梯形的负面积的代数和.

3. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的充分条件：

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

(2) 若 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点的有界函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

(3) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，但有界函数不一定可积.

4. 定积分的基本性质

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(3) 若 f,g 都在 $[a,b]$ 上可积,则 $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

(4) f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \forall c\in(a,b)$, f 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上都可积,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

(5) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$,特别地 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

(6) 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积,且 $f(x)\geqslant 0$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

(7) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积,且 $f(x)\leqslant g(x)$,则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(8) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积,且 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

(9) 估值定理:设 M 和 m 分别是可积函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值,则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

(10) 积分第一中值定理:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

(11) 推广的积分第一中值定理:若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号,则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(12) 积分第二中值定理,若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调函数,$g(x)$ 为可积函数,则 $\exists\,\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

5. 牛顿—莱布尼兹公式

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且存在原函数 $F(x)$,即 $F'(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$,则 f 在 $[a,b]$ 上可积,且

$$\int_a^b f(x\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

6. 变限积分　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,对于任给 $x\in[a,b]$, $f(x)$ 在

$[a,x]$ 和 $[x,b]$ 上均可积，分别称 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 和 $\int_x^b f(t)$ 为变上限的积分和变下限的积分，统称为变限积分，变限积分作为关于 x 的函数，在 $[a,b]$ 上处处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right) = -f(x).$$

更一般的有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[g(x)]g'(x) - f[h(x)]h'(x).$$

二、解题方法

考点 1　定积分的计算

解题方法：(1) 根据定义计算（见下面第 523 题）；

(2) 利用牛顿莱布尼兹公式（见下面第 511 题）；

(3) 利用分部积分法（见下面第 556 题）；

(4) 利用换元法（见下面第 549 题）；

(5) 恒等变形（见下面第 536 题）；

(6) 利用递推公式（见下面第 512 题）；

(7) 利用奇偶函数（见下面第 563 题）.

考点 2　积分等式或不等式的证法

解题方法：(1) 上面七种方法结合，灵活运用（见下面第 510 题）；

(2) 利用积分中值定理（见下面第 509 题）.

考点 3　变上限的积分问题

【经典题解】

509.（北京大学，1999 年）　设 $f \in C([0,1])$，且在 $(0,1)$ 上可微，若有 $8\int_{\frac{7}{8}}^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0)$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

证　$\because f \in C([0,1])$，由积分中值定理可知，存在 $a \in [\frac{7}{8},1]$ 使得

$$f(0) = 8\int_{\frac{7}{8}}^1 f(x)\mathrm{d}x = 8f(a)\cdot\left(1-\frac{7}{8}\right) = f(a).$$

又 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可微，所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上可微，由罗尔定理，存在 $\xi \in (0,a) \subset (0,1)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

510.（华中工学院）　函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义且单调不增，证明：对于任何 $a \in (0,1)$，有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证　由 $0<a<1$，对 $t>0$，有 $0<at<t$. 又由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调不增，有 $f(at)\geqslant f(t)$，从而 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=at} a\int_0^1 f(at)\mathrm{d}t \geqslant a\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

511.（中山大学，1999 年）　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，且只有有限之间断点，则函数 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上（　　）

(A) 连续单调.　　　　(B) 连续但不单调.

(C) 单调但不连续.　　(D) 既不连续又不单调.

答　(C).　用特殊值法解，令

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & x>1.\end{cases}$$

则
$$F(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{(x+1)^2}{2x}, & x>1\end{cases} \qquad ①$$

$F(x)$ 在 $x=1$ 不连续，从而否定 (A)，(B)，$F(x)$ 单调递增，又否定 (D)，故选 (C).

注　①式中当 $x\in[0,1]$ 时，$F'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)>0$，都是单调的，且若 $x_1\in[0,1]$，$x_2\in(1,+\infty)$，$F(x_1)=\frac{x_1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，而 $F(x_2)=\frac{x_2}{2}+1+\frac{1}{2x_2}=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)+1\geqslant 2$，$\therefore F(x_2)>F(x_1)$，综上即证 $F(x)$ 单调递增.

512.（华中工学院，西北电讯工程学院）　设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，$n$ 为大于 1 的整数，计算：I_n+I_{n-2}，并证明：$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$.

解　$I_n+I_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n-1}.$$

$\therefore I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$.

因为当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时,$0 < \tan x < 1$,故

$\tan^{n+2}x < \tan^n x < \tan^{n-2}x$,

从而可得 $I_{n+2} < I_n < I_{n-2}$,

于是 $I_n + I_{n+2} < 2I_n < I_{n-2} + I_n$,

即$\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$.

513.(合肥工业大学) 设函数 $y = f(x)$ 定义在区间$[a,b]$上,且对于区间$[a,b]$上任意二点 x_1,x_2,有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|$.证明:

(1) 对于(a,b)内每一点,$f(x)$是连续函数;

(2) 如果 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f(a)\right| \leqslant \frac{1}{2}(b-a)^2.$$

证 (1) 任给 $x \in (a,b)$,由题设知

$|\Delta y| = |f(x+\Delta x) - f(x)| \leqslant |\Delta x|$.

于是当 $\Delta x \to 0$ 时,$\Delta y \to 0$,故 $f(x)$ 连续.

(2) 当 $x \geqslant a$ 时,有 $|f(x) - f(a)| \leqslant |x-a| = x - a$,即

$f(a) - (x-a) \leqslant f(x) \leqslant f(a) + (x-a)$.

两边积分,可得$\int_a^b [f(a) - (x-a)]\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b [f(a) + (x-a)]\mathrm{d}x$,

即 $-\frac{(b-a)^2}{2} \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f(a) \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}$.

故有 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f(a)\right| \leqslant \frac{1}{2}(b-a)^2$.

514.(中国科学院) 设 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上连续可微,且

$f(0) = 1$,$x \geqslant 0$ 时,$f(x) > |f'(x)|$,证明:$x > 0$ 时,$e^x > f(x)$.

证 由于当 $x \geqslant 0$ 时,$f(x) > |f'(x)|$,即 $-f(x) < f'(x) < f(x)$.

当 $t > 0$ 时,$f(t) > 0$,故有$\frac{f'(t)}{f(t)} < 1$,两边从 0 到 x 积分得,$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t < \int_0^x \mathrm{d}t$,其中 $x > 0$,注意到 $f(0) = 1$,从而可得 $\ln f(x) < x$,即 $e^x > f(x)$.

515.(大连工学院) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,且 $f(x) > 0$,证明:$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$.

证 记 $A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,$\because f(x) > 0$,$\therefore A > 0$.

$$\ln\frac{f(x)}{A} = \ln\left[1 + \left(\frac{f(x)}{A} - 1\right)\right] \leqslant \frac{f(x)}{A} - 1. \qquad ①$$

两端积分

$$\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln A\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{A}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 1 = 0.$$

$$\therefore \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln A\mathrm{d}x = \ln A = \ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

516.（华中师范大学，1998年，南开大学） 设$f(x)$在$[0,1]$上可微，而且对任何$x\in(0,1)$，有$|f'(x)|\leqslant M$，求证：对任何正整数n有$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})\right|\leqslant \frac{M}{n}$，其中$M$是一个与$x$无关的常数。

证 由定积分的性质及积分中值定理，有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)，其中$$

$\xi_i\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]，i = 1,2\cdots\cdots,n.$

又因为$f(x)$在$[0,1]$上可微，所以由微分中值定理可知，存在$\eta_i\in(\xi_i,\frac{i}{n})$，使得$f(\frac{i}{n}) - f(\xi_i) = f'(\eta_i)(\frac{i}{n} - \xi_i)，i = 1,2\cdots\cdots,n.$

因此$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n[f(\xi_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})]\right|$

$$= \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^n[f(\xi_i) - f(\frac{i}{n})]\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^n f'(\eta_i)(\xi_i - \frac{i}{n})\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |f'(\eta_i)|(\frac{i}{n} - \xi_i) \leqslant \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n M\cdot\frac{1}{n}) = \frac{M}{n}.$$

517.（南京工学院，成都电讯工程学院，西南古油学院） 设$f(x)$，$g(x)$和它们的平方在$[a,b]$上可积，证明不等式（*Schwarz*不等式）。

$$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2 \leqslant (\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x)(\int_a^b [g(x)]^2\mathrm{d}x).$$

证 令$F(t) = \int_a^t f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^t g^2(x)\mathrm{d}x - [\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2$．则当$t\geqslant a$时，

$$F'(t) = \int_a^t [f(t)g(x) - f(x)g(t)]^2\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

由此可知$F(t)$单调不减，又$F(a) = 0$，所以$F(b)\geqslant 0$，即证

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

518.（中国科学院，1999年；哈尔滨工业大学） 设$h(t)$是$[a,b]$上正值连续函数，求证：$\int_a^b h(t)\mathrm{d}t\int_a^b \frac{1}{h(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2.$

证　在上题 Schwarz 不等式中，令 $f(x)=\sqrt{h(x)}$，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{h(x)}}$，即可证.

519.（北京大学，2000 年）　函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

证　在 Schwarz 不等式中取 $g(x)=1$，即可

520.（中国人民大学，1999 年）　设 $f(x)$ 是 2π 为周期的黎曼可积函数，

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x,k=0,1,2\cdots\cdots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x,k=0,1,2\cdots\cdots,$$

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

$T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(c_k\cos kx+\mathrm{d}_k\sin kx)$ 是任意三角多项式，证明：

$$\int_0^{2\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{2\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x.$$

证　$\because [f(x)-T_n(x)]^2=[f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}(c_k\cos kx+\mathrm{d}_k\sin kx)]^2$

$=f^2(x)+c_0^2+[\sum\limits_{k=1}^{n}(c_k\cos kx+\mathrm{d}_k\sin kx)]^2-2f(x)\cdot c_0$

$-2f(x)\sum\limits_{k=1}^{n}(c_k\cos kx+\mathrm{d}_k\sin kx)+2c_0[\sum\limits_{k=1}^{n}(c_k\cos kx+\mathrm{d}_k\sin kx)]$,

$\therefore \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+c_0^2+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(c_k^2+\mathrm{d}_k^2)-a_0c_0-\sum\limits_{k=1}^{n}(a_kc_k+b_k\mathrm{d}_k)$

$=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\left(c_0-\dfrac{a_0}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}[(c_k-a_k)^2+(\mathrm{d}_k-b_k)^2]-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)-\dfrac{a^2}{4}\geqslant\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\dfrac{a_0^2}{4}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$.

而 $[f(x)-S_n(x)]^2=\left\{f(x)-[\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]\right\}^2$.

$=f^2(x)+\dfrac{a_0^2}{4}+[\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]^2-a_0f(x)-2(f(x)-\dfrac{a_0}{2})[\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]$,

$\therefore \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\dfrac{a_0^2}{4}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)-$

$a_0 \cdot \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$

因此$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\mathrm{d}x.$

521.（哈尔滨工业大学，2002 年）　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明：$\lim\limits_{d\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$，其中 $x_i \leqslant \xi_i, \theta_i \leqslant x_{i+1}(i = 1,2,\cdots\cdots,n-1)$，$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, x_0 = a, x_n = b, \mathrm{d} = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\Delta x_i$.

证　不妨令$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = M$. 当 $M = 0$ 时，$f(x) \equiv 0$，结论显然成立，所以不妨设 $M > 0$.

$\because g(x)$ 在$[a,b]$上连续，从而一致连续，所以 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $|\xi_i - \theta_i| < \delta$ 时，

$|g(\xi_i) - g(\theta_i)| < \frac{\epsilon}{M}, i = 0,1,2\cdots\cdots,n-1.$

$\therefore \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(\xi_i) - g(\theta_i)]\Delta x_i\right| \leqslant$

$\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)| \cdot |g(\xi_i) - g(\theta_i)| \cdot \Delta x_i < \frac{\epsilon}{M}\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|\Delta x_i.$

$\therefore \lim\limits_{d\to 0}\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(\xi_i) - g(\theta_i)]\Delta x_i\right| \leqslant \lim\limits_{d\to 0}\frac{\epsilon}{M}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|\Delta x_i.$

$= \frac{\epsilon}{M}\lim\limits_{d\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|\Delta x_i = \frac{\epsilon}{M}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \frac{\epsilon}{M}\cdot M = \epsilon$

由 ϵ 的任意性，可知

$\lim\limits_{d\to 0}\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(\xi_i) - g(\theta_i)]\Delta x_i\right| = 0.$

$\therefore \lim\limits_{d\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i = \lim\limits_{d\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i$

$= \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$

522.（上海师范大学）　证明：若 $f(x)$ 为$[0,1]$上的连续函数，且对一切 $x \in [0,1]$ 有$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u \geqslant f(x) \geqslant 0$，则 $f(x) \equiv 0$.

证　显然 $f(0) = 0$，对任意 $x_0 \in (0,1)$，有

$0 \leqslant f(x_0) \leqslant \int_0^{x_0} f(u)\mathrm{d}u = f(\xi_1)x_0$，其中 $0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_0$.

而 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，所以 $f(x)$ 在$[0,1]$上存在最大值 M.

对于上面的 ξ_1，有 $0 \leqslant f(\xi_1) \leqslant \int_0^{\xi_1} f(u)\mathrm{d}u = f(\xi_2)\cdot\xi_1$，其中 $0 \leqslant \xi_2 \leqslant \xi_1$，

$\therefore 0 \leqslant f(x_0) \leqslant f(\xi_2)\xi_1 \cdot x_0 \leqslant f(\xi_2)x_0^2$,

……………………

依次进行下去，可知存在 $\xi_n \in [0,x_0]$，使得 $0 \leqslant f(x_0) \leqslant f(\xi_n)x_0^n \leqslant Mx_0^n$.

当 $n \to +\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} Mx_0^n = 0$，所以 $f(x_0) = 0$.

又 $f(x)$ 连续，所以 $f(1) = \lim\limits_{x\to1^-} f(1) = 0$.

$\therefore$ 对一切 $x \in [0,1]$，有 $f(x) \equiv 0$.

523.（北京师范学院） 求 A,B，使得 $A \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x \leqslant B$，要求 $B - A \leqslant 0.1$.

解 将区间 $[0,1]$ n 等分，由定积分的定义可得 $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)$，其中 $\frac{i-1}{n} \leqslant \xi_i \leqslant \frac{i}{n}$，$i = 1,2\cdots\cdots,n$，因为函数 $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqslant f(\xi_i) \leqslant f\left(\frac{i}{n}\right), i = 1,2,\cdots\cdots,n.$$

从而 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$.

此时 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}[f(1) - f(0)] = \frac{1}{n}(\sqrt{2}-1)$,

取 $n = 5$，令 $A = \frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5} f\left(\frac{i-1}{5}\right)$，$B = \frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5} f\left(\frac{i}{5}\right)$，则必有

$A \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x \leqslant B$，且 $B - A = \frac{1}{5}(\sqrt{2}-1) < 0.1$.

524.（清华大学） 设 $f(x)$ 的一阶导数在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0) = f(1) = 0$，求证：$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4}\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1} |f'(x)|$

证 由于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right) =$

$f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$.

因此由积分中值定理及基本积分不等式，有

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\right|\mathrm{d}x = \int_0^1 |f'(x)|\cdot\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x$$

$= |f'(\xi)|\cdot\int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x, \xi \in [0,1]$.

而 $\int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$，所以

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4}|f'(\xi)| \leqslant \frac{1}{4}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|.$$

525.（上海交通大学） 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $2\int_a^b f(x)[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}x = [\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]^2$.

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

令 $F(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，则有 $F'(x) = -f(x)$，所以

$$2\int_a^b f(x)[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}x = 2\int_a^b [-F'(x)]\cdot F(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2\int_a^b F(x)\mathrm{d}F(x) = -F^2(x)\Big|_a^b = F^2(a) - F^2(b).$$

注意到 $F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, F(b) = 0$，所以

$$2\int_a^b f(x)[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}x = [\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]^2.$$

526.（西北大学） 求证：$f(x) = \int_0^x (t-t^2)(\sin t)^{2n}\mathrm{d}t$（$n$ 为正整数）在 $x \geqslant 0$ 上的最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

证 因为 $f'(x) = (x-x^2)(\sin x)^{2n}$，所以当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x > 1$ 时，$f'(x) < 0$. 故对一切 $x \geqslant 0$，$f(x) \leqslant f(1)$. 而

$$f(1) = \int_0^1 (t-t^2)(\sin t)^{2n}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)},$$

所以当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) \leqslant \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$，从而得证.

527.（厦门大学） 把满足下列条件(1)和(2)的实函数 f 的全体记作 F：

(1) $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且非负；

(2) $f(0) = 0, f(1) = 1$.

试证明：$\inf\limits_{f\in F}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，但不存在 $\varphi \in F$，使 $\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. 属于

证 令 $f = f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{n}, \\ nx - (n-1), & 1 - \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$.

易知对一切自然数 n，$f_n(x) \in F$，而

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 [nx - (n-1)]\mathrm{d}x = \frac{1}{2n},$$

所以 $0 \leqslant \inf\limits_{f\in F}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \inf\limits_{n\in N}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \inf\limits_{n\in N}\frac{1}{2n} = 0$,

故 $\inf\limits_{f\in F}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$.

$\forall \varphi \in F$,因为 φ 在[0,1]上连续,$\varphi(1) = 1$,则对 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$,存在 $\delta > 0$,当 $1 - \delta \leqslant x \leqslant 1$ 时,$\varphi(x) \geqslant \frac{1}{2}$,所以

$$\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{1-\delta}^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{1-\delta}^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{\delta}{2} > 0.$$

因此不存在 $\varphi \in F$ 使 $\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x = 0$.

528.(北京广播学院) 设 $f(x)$ 为[0,1]上的非负单调非增连续函数(即当 $x < y$ 时,$f(x) \geqslant f(y)$).利用积分中值定理证明:对于 $0 < \alpha < \beta < 1$,有下面的不等式成立 $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$.

证 由题设及积分中值定理有

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = f(\xi_1)(\beta - \alpha) \leqslant f(\alpha)(\beta - \alpha), \alpha \leqslant \xi_1 \leqslant \beta.$$

从而 $\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant f(\alpha) > \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$.

因此可得 $\quad (\frac{\beta}{\alpha} - 1)\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$.

$$(1 - \frac{\alpha}{\beta})\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x.$$

又因 $0 < \alpha < \beta < 1$,所以 $1 - \frac{\alpha}{\beta} < 1$,故 $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$.

529.(湖南大学) 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在[a,b]上连续,$f(x) \leqslant g(x)$.且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,证明:在[$a,b$]上,$f(x) \equiv g(x)$.

证 设 $F(x) = f(x) - g(x)$,从而在[a,b]上,$F(x) \leqslant 0$,且 $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = 0$.下证 $F(x) \equiv 0, x \in [a,b]$.

反证法:若不然,$F(x) \not\equiv 0$,则存在 $x_1, x_2(a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b)$,使在[$x_1, x_2$]上 $F(x) < 0$.从而 $0 = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_1}^{x_2} F(x)\mathrm{d}x = F(\xi)(x_2 - x_1) < 0$,其中 $\xi \in (x_1, x_2)$,得出矛盾.

故在[a,b]上,$F(x) = 0$,即 $f(x) \equiv g(x)$.

530.(兰州大学)　已知$f(x)$在$(2,+\infty)$上可导,$f(x)>0$且$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xf(x))\leqslant -kf(x)$,$k$为常数,试证在此区间上$f(x)\leqslant Ax^{-(k+1)}$,其中$A$为与$x$无关的常数.

证　由题设得 $xf'(x)+f(x)\leqslant -kf(x)$,

即$\frac{f'(x)}{f(x)}\leqslant -\frac{k+1}{x}$,

对此式两边积分得$\int_2^x \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant -(k+1)\int_2^x \frac{\mathrm{d}x}{x}$,

$$\ln f(x)\leqslant -(k+1)\ln x+[\ln f(2)+\ln 2^{k+1}] \quad ①$$

设 $\ln f(2)+\ln 2^{k+1}=\ln A$,则由①式有

$\ln f(x)\leqslant \ln(Ax^{-(k+1)})$,从而 $f(x)\leqslant Ax^{-(k+1)}$.

531.(上海交通大学,2002年)　设 $f(x)$ 在 R 上连续,又

$\varphi(x)=f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 单调递减,证明:$f(x)=0,x\in R$.

证　令 $F(x)=\frac{1}{2}[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]^2$,则 $F'(x)=\varphi(x)$,而 $\varphi(0)=0$.

若 $\varphi(x)$ 不恒为零,$\varphi(x)$ 又单调递减,因而 $\exists x_0>0$,使 $\varphi(x_0)<0$.

从而有 $\varphi(x)\leqslant 0,\forall x\in[0,x_0]$.

$$\therefore F(x_0)=\int_0^{x_0}\varphi(x)\mathrm{d}x<0, \quad ①$$

$$另外\ F(x_0)=\frac{1}{2}[\int_0^{x_0}f(t)\mathrm{d}t]^2\geqslant 0. \quad ②$$

①,②矛盾,$\therefore \varphi(x)\equiv 0,\forall x\in R$,从而$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 等于一个常数,$\forall x\in R$.

即$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=c(x\in R)$.两边求导,$\therefore f(x)\equiv 0,\forall x\in R$.

532.(湖北大学,2002年)　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$.证明:至少存在两点 $x_1,x_2\in(a,b)$,使得$f(x_1)=f(x_2)=0$.

证　由于$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,则可推知$f(x)$在$[a,b]$上必不能保持同号,从而存在 $x_1\in(a,b)$,使 $f(x_1)=0$.

若 x_1 是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的唯一零点,则$(x-x_1)f(x)$ 在$[a,b]$上保持确定的符号.故$\int_a^b(x-x_1)f(x)\mathrm{d}x\neq 0$,但由已知条件可知

$\int_a^b(x-x_1)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-x_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0-0=0$.产生矛盾.假

设不成立，故至少存在两点 $x_1,x_2\in(a,b)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

533.（中国科技大学） 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+2}t(\sin\frac{3}{t})f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(t)$ 可微，且已知 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=1$.

解 由积分中值定理，存在 $\xi\in[x,x+2]$，使

$$\int_x^{x+2}t\sin(\frac{3}{t})f(t)\mathrm{d}t=2\xi\sin(\frac{3}{\xi})f(\xi),$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+2}t\sin(\frac{3}{t})f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to\infty}2\xi\sin(\frac{3}{\xi})f(\xi)$

$$=6\cdot\lim_{\xi\to\infty}\frac{\sin\frac{3}{\xi}}{\frac{3}{\xi}}\cdot\lim_{x\to\infty}f(\xi)=6\cdot1\cdot1=6.$$

534.（上海交通大学，2000 年；兰州大学） 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

解 对任意给定的 $\varepsilon>0$（不妨假定 $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$），因为在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上，函数 $y=\sin x$ 是单调递增的，所以 $0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$

$$\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x$$

$$=(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2})\cdot\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $0<\sin(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=0$，故存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$，从而有

$$0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2})+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

由 ε 的任意性可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$.

535.（兰州大学） 设 $S(x)=4[x]-2[2x]+1$，其中 $[x]$ 代表数 x 的整数部分（即不超过 x 的整数之最大值），n 代表自然数，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)S(nx)\mathrm{d}x=0$.

证 $\because S(x+1)=4[x+1]-2[2(x+1)]+1=4[x]+4-2[2x]-4+1=S(x)$,

$\therefore S(x)$ 以 1 为周期，且

$$S(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1,\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

$\therefore S(nx)$ 以$\dfrac{1}{n}$ 为周期，将$[0,1]2n$ 等分，

$$S(nx)=4[nx]-2[2nx]+1$$

$$=\begin{cases}1,x\in[\dfrac{2(k-1)}{2n},\dfrac{2k-1}{2n}),\\ -1,x\in[\dfrac{2k-1}{2n},\dfrac{2k}{2n})\end{cases}.$$

$k=1,2\cdots\cdots,n.$

$$\therefore\int_0^1 f(x)S(nx)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{2(k-1)}{2n}}^{\frac{2k-1}{2n}}f(x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k}{2n}}f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k}{2n}}f(x)\mathrm{d}x.$$

记$f(x)$在$[\dfrac{2k-1}{2n},\dfrac{2k}{2n}]$上的上、下确界分别为 M'_k、m'_k，在$[\dfrac{2k-2}{2n},\dfrac{2k}{2n}]$上的上、下确定分别为 M_k、m_k，则$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}m_k\leqslant 2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2n}\cdot m'_k\leqslant 2\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k}{2n}}f(x)\mathrm{d}x$ $\leqslant 2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2n}\cdot M'_k\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}M_k.$

让 $n\to\infty$，由夹逼原则知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}m_k\leqslant\lim_{n\to\infty}2\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2k-1}{2h}}^{\frac{2k}{2n}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M_k.$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}m_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}M_k=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，所以

$$\lim_{n\to\infty}2\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2k-1}{2h}}^{\frac{2k}{2n}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)S(nx)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}2\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2k-1}{2h}}^{\frac{2k}{2n}}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$$

536.（上海交通大学，2000 年） 设$f(x)$为$[a,b]$上的连续递增函数，则成立不等式：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ ①

证 要证 ① 式只要证明

$$\int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) f(x) \mathrm{d}x \geqslant 0. \qquad ②$$

由于 $f(x)$ 单调递增，利用积分第二中值定理，则存在 $\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) f(x) \mathrm{d}x$$

$$= f(a)\int_a^{\xi} (x - \frac{a+b}{2}) \mathrm{d}x + f(b)\int_{\xi}^b (x - \frac{a+b}{2}) \mathrm{d}x.$$

$$= f(a)\int_a^{b} (x - \frac{a+b}{2}) \mathrm{d}x + [f(b) - f(a)]\int_{\xi}^b (x - \frac{a+b}{2}) \mathrm{d}x$$

$$= [f(b) - f(a)][\frac{b^2 - \xi^2}{2} - \frac{a+b}{2}(b - \xi)]$$

$$= [f(b) - f(a)]\frac{b-\xi}{2}(\xi - a) \geqslant 0.$$

537.（武汉大学，1999 年）设 f 为连续函数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} f(x)\mathrm{d}x = f(0)$.

证 由题设知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0(0 < \delta < 1)$，对任意 $x';x'' \in [0,1]$，只要 $|x' - x''| < \delta$，就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{2\varepsilon}{3\pi}.$$

又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界，存在 $M > 0$，对一切 $x \in [0,1]$，有 $|f(x)| < M$.

$$\left|\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}f(0)\right|$$

$$\leqslant \left|\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}[f(x) - f(0)]\mathrm{d}x + [\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}]f(0)\right|$$

$$\leqslant \left|\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}[f(x) - f(0)]\mathrm{d}x\right| + \left|\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\right| \cdot |f(0)|$$

$$\leqslant \left|\int_0^{\delta} \frac{n}{n^2x^2+1}[f(x) - f(0)]\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\delta}^1 \frac{n}{n^2x^2+1}[f(x) - f(0)]\mathrm{d}x\right| + \left|\arctan n - \frac{\pi}{2}\right| \cdot |f(0)|$$

$$\leqslant \int_0^{\delta} \frac{n}{n^2x^2+1} \cdot |f(x) - f(0)|\mathrm{d}x + \int_{\delta}^1 \frac{n}{n^2x^2+1} |f(x) - f(0)|\mathrm{d}x + \left|\arctan n - \frac{\pi}{2}\right| \cdot |f(0)|$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3\pi}\int_0^{\delta} \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x + \int_{\delta}^1 \frac{n}{n^2\delta^2+1} \cdot 2M\mathrm{d}x + |\arctan n - \frac{\pi}{2}| \cdot |f(0)|$$

$$= \frac{2\varepsilon}{3\pi}\arctan(n\delta) + \frac{2nM}{n^2\delta^2+1} \cdot (1 - \delta) + \left|\arctan n - \frac{\pi}{2}\right| \cdot |f(0)|$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2M}{\delta}(1-\delta)+\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|\cdot|f(0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2M}{\delta}+\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|\cdot|f(0)|.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{2M}{\delta}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$，所以当 n 充分大时，必有$\frac{1}{n}\cdot\frac{2M}{\delta}<\frac{\varepsilon}{3}$，$\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|\cdot|f(0)|<\frac{\varepsilon}{3}$，即$\left|\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}f(0)\right|<\varepsilon$，

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$，

即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$.

538.（华中师范大学，1999年）　设$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=1$，试求正常数 a 与 b.

解　显然有$\lim\limits_{x\to0}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=0$，$\lim\limits_{x\to0}(bx-\sin x)=0$，所以由罗必塔法则可得

$$1=\lim_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{b-\cos x},$$

要使此等式成立，必须有$\lim\limits_{x\to0}(b-\cos x)=0$，即 $b=\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$，

而$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sin x}=2$，所以$\frac{2}{\sqrt{a}}=1$，可求得 $a=4$，$b=1$.

539.（浙江大学）　设 $f(x)$ 是在$[-1,1]$上可积在 $x=0$ 处连续的函数，记

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}(1-x)^n, 0\leqslant x\leqslant1,\\ e^{nx}, -1\leqslant x\leqslant0.\end{cases}$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_{-1}^1 f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=f(0)$.

证　$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\therefore$ 对任给 $\varepsilon<0$，存在 $\delta>0(0<\delta<1)$，使得当 $|x|<\delta$ 时，$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{4}$.

又 $f(x)$ 在$[-1,1]$上可积，故存在 $M>0$，使对一切 $x\in[-1,1]$，有 $|f(x)|<M$.

$$\left|\frac{n}{2}\int_{-1}^1 f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x-f(0)\right|$$

$$=\left|\frac{n}{2}\int_{-1}^1[f(x)-f(0)]\varphi_n(x)\mathrm{d}x+\left[\frac{n}{2}\int_{-1}^1\varphi_n(x)\mathrm{d}x-1\right]f(0)\right|$$

$$\leqslant \frac{n}{2}\left|\int_{-1}^{1}[f(x)-f(0)]\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\frac{n}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_n(x)\mathrm{d}x - 1\right|\cdot|f(0)|$$

$$\leqslant \frac{n}{2}\int_{-1}^{1}|f(x)-f(0)|\cdot|\varphi_n(x)|\mathrm{d}x + \left|\frac{n}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_n(x)\mathrm{d}x - 1\right|\cdot|f(0)|$$

$$= \frac{n}{2}\int_{-1}^{-\delta}|f(x)-f(0)|\cdot|\varphi_n(x)|\mathrm{d}x + \frac{n}{2}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x)-f(0)|\cdot|\varphi_n(x)|\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{n}{2}\int_{\delta}^{1}|f(x)-f(0)|\cdot|\varphi_n(x)|\mathrm{d}x + \left|\frac{n}{2}\left[\int_{-1}^{0}e^{nx}\mathrm{d}x + \int_0^1(1-x)^n\mathrm{d}x\right] - 1\right|\cdot|f(0)|$$

$$< \frac{n}{2}\int_{-1}^{-\delta}\cdot 2M|\varphi_n(x)|\mathrm{d}x + \frac{n}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{4}|\varphi_n(x)|\mathrm{d}x + \frac{n}{2}\int_{\delta}^{1}2M\cdot|\varphi_n(x)|\mathrm{d}x + \left|\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}e^{-n}+\frac{1}{n+1}\right)-1\right|\cdot|f(0)|$$

$$= nM\int_{-1}^{-\delta}e^{nx}\mathrm{d}x + \frac{n}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\left[\int_{-\delta}^{0}e^{nx}\mathrm{d}x + \int_0^{\delta}(1-x)^n\mathrm{d}x\right] +$$

$$nM\int_{\delta}^{1}(1-x)^n\mathrm{d}x + \left[\frac{1}{2(n+1)}+\frac{e^{-n}}{2}\right]\cdot|f(0)|$$

$$= M(e^{-n\delta}-e^{-n}) + \frac{n\varepsilon}{8}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{e^{-n\delta}}{n}-\frac{1}{n+1}(1-\delta)^{n+1}\right] +$$

$$\frac{nM}{n+1}(1-\delta)^{n+1} + \left[\frac{1}{2(n+1)}+\frac{e^{-n}}{2}\right]\cdot|f(0)|$$

$$< M\cdot e^{-n\delta} + \frac{n\varepsilon}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) + M\cdot(1-\delta)^{n+1} + \left[\frac{1}{2(n+1)}+\frac{e^{-n}}{2}\right]\cdot M$$

$$< M\cdot e^{-n\delta} + \frac{\varepsilon}{4} + M(1-\delta)^{n+1} + \left[\frac{1}{2(n+1)}+\frac{e^{-n}}{2}\right]\cdot M.$$

当 n 充分大时，必有 $M\cdot e^{-n\delta} < \frac{\varepsilon}{4}$，$M(1-\delta)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{4}$，

$\left[\frac{1}{2(n+1)}+\frac{e^{-n}}{2}\right]\cdot M < \frac{\varepsilon}{4}$，从而有

$$\left|\frac{n}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x - f(0)\right| < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = f(0)$.

540.（哈尔滨电工学院） 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}(\sin x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x = \pi$.

证 因为在 $[0,\pi]$ 上，$0\leqslant\sin x\leqslant 1$，故对任意 n，都有

$$\int_0^{\pi}(\sin x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi}\mathrm{d}x = \pi,$$

从而有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}(\sin x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x \leqslant \pi$. ①

另一方面,对任给 $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$,有

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^{\frac{1}{n}} dx \geqslant \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} (\sin x)^{\frac{1}{n}} dx \quad ②$$

但对一切 $x \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$,当 $n \to \infty$ 时,$(\sin x)^{\frac{1}{n}}$ 一致收敛于 1,故可在积分号下取极限而得到.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} (\sin x)^{\frac{1}{n}} dx = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \lim_{n\to\infty} (\sin x)^{\frac{1}{n}} dx = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} 1 dx = \pi - 2\varepsilon.$$

在 ② 式两端取下极限并利用上式的结果,可得到

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_0^{\pi} (\sin x)^{\frac{1}{n}} dx \geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} (\sin x)^{\frac{1}{n}} dx = \pi - 2\varepsilon$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性便知 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} (\sin x)^{\frac{1}{n}} dx \geqslant \pi$ ③

由 ①,③ 两式便知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} (\sin x)^{\frac{1}{n}} dx = \pi.$$

541.(武汉大学,1995 年) 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n} dx = 1$.

证 因为对一切自然数 n,函数 $f_n(x) = e^{x^n}$ 在 $x \in [0,1]$ 时是单调递增的,所以

$$1 = f_n(0) \leqslant f_n(x) = e^{x^n} \leqslant f_n(1) = e.$$

因此,$\int_0^1 e^{x^n} dx \geqslant \int_0^1 1 \cdot dx = 1$,

从而有 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n} dx \geqslant 1$.

另一方面,对任给 $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$,有

$$\int_0^1 e^{x^n} = \int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n} dx + \int_{1-\varepsilon}^1 e^{x^n} dx \leqslant \int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n} dx + \int_{1-\varepsilon}^1 e dx$$

$$= \int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n} dx + e\varepsilon.$$

但对一切 $x \in [0, 1-\varepsilon]$,当 $n \to \infty$ 时,e^{x^n} 一致收敛于 1,故对于积分 $\int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n} dx$ 可在积分号下取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n} dx = \int_0^{1-\varepsilon} \lim_{n\to\infty} e^{x^n} dx = \int_0^{1-\varepsilon} 1 dx = 1 - \varepsilon.$$

因此 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n} dx \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\left[\int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n} dx + e\varepsilon\right] = 1 - \varepsilon + e\varepsilon = 1 + (e-1)\varepsilon.$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性便知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n} \leqslant 1$.

综合可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}dx = 1$.

542.(北京航空航天大学,2000 年)　求证:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n dx = 0$,其中 $a \in (0,1)$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n dx = 0$.

证　(1)∵ 当 $x \in [a,\frac{\pi}{2}]$ 时,$0 \leqslant 1-\sin x \leqslant 1-\sin a < 1$,

$\therefore 0 \leqslant \int_a^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n dx \leqslant \int_a^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin a)^n dx = (1-\sin a)^n \cdot (\frac{\pi}{2}-a)$,

$\therefore 0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n dx \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty}(1-\sin a)^n \cdot (\frac{\pi}{2}-a) = 0$,

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n dx = 0$.

(2) 任给 $\varepsilon > 0$(不妨设 $0 < \varepsilon < 1$),由(1) 可知

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n dx = 0$,

$\therefore$ 存在 $N > 0$,当 $n > N$ 时,有 $\left|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

又因为 $x \in [0,\frac{\varepsilon}{2}]$ 时,$0 \leqslant (1-\sin x)^n \leqslant 1$,所以 $\left|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}(1-\sin x)^n dx\right| \leqslant \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}|(1-\sin x)^n| dx \leqslant \int_a^{\frac{\varepsilon}{2}}1 \cdot dx = \frac{\varepsilon}{2}$.

从而有 $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n dx\right| \leqslant \left|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}(1-\sin x)^n dx\right| + \left|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^n dx = 0$.

543.(福建师范大学)　设 $f(x) = \int_x^{x^2}(1+\frac{1}{2t})^t \sin\frac{1}{\sqrt{t}}dt\ (x > 0)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)\sin\frac{1}{n}$.

解　首先由积分中值定理可得

$f(x) = (1+\frac{1}{2c})^c \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{c}}(x^2-x)$,

其中 c 介于 x 与 x^2 之间.

当 $x \to +\infty$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{2c})^c = e^{\frac{1}{2}}$, $\sin\frac{1}{\sqrt{c}}(x^2-x) > \sin\frac{1}{x}\cdot(x^2-x)$,

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\cdot(x^2-x) = +\infty$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$.

由罗必塔法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x^2}(1+\frac{1}{2t})^t\sin\frac{1}{\sqrt{t}}dt}{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}.$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{2x^2})^{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot 2x - (1+\frac{1}{2x})^x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot 1}{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{x}}{\sin^2\frac{1}{x}}}.$$

$$= \frac{2\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{2x^2})^{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{2x})^x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}}.$$

$$= \frac{2e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}\cdot 0}{1\cdot 1} = 2\sqrt{e}.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\cdot f(n)\sin\frac{1}{n} = 2\sqrt{e}$.

544.(武汉大学)　设在 $[-1,1]$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足如下条件, 对 $[-1,1]$ 上的任意的偶连续函数 $g(x)$, 积分 $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx = 0$, 试证: $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数.

证　作变换 $x = -t$, 则

$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx = \int_{1}^{-1}f(-t)g(-t)(-1)dt = \int_{-1}^{1}f(-t)g(-t)dt$. 因为

$g(-x) = g(x)$, 所以 $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1}f(-t)g(t)dt = 0$,

故$\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]g(x)\mathrm{d}x=0$.

取 $h(x)=f(x)+f(-x)$，则 $h(x)$ 是$[-1,1]$上的偶函数，由题意有 $\int_{-1}^{1}f(x)h(x)\mathrm{d}x=0$，从而有$\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]h(x)\mathrm{d}x=0$，即

$\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)]^2\mathrm{d}x=0$，从而 $f(x)+f(-x)=0$，即

$f(-x)=-f(x)$，因此 $f(x)$ 是$[-1,1]$上的奇函数.

545.（中国科技大学）已知 $f(x)\geqslant 0$ 且在$[a,b]$上连续，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$，$k$ 为实数，证明：

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 1.$$

证 $\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2$.

$$=\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\cos ky\mathrm{d}y+\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(y)\sin ky\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D f(x)f(y)[\cos kx\cos ky+\sin kx\sin ky]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D f(x)f(y)\cos k(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\iint_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(y)\mathrm{d}y.$$

$$=1.$$

其中 D 为区域$\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$.

546.（华中师范大学，2000年） 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$f(x)>0$，又 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，证明：

(1) $F'(x)\geqslant 2$；

(2) $F(x)=0$ 在$[a,b]$中有且仅有一个实根.

证 (1) $\because f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$\therefore F(x)$ 在$[a,b]$上可微，且

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geqslant 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2.$$

(2) 由(1)可知 $F'(x)\geqslant 2\geqslant 0$，所以 $F(x)$ 在$[a,b]$上单调递增.

因为对一切 $x\in[a,b]$，$f(x)>0$，所以

$$F(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0,$$

$$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0.$$

由零值定理及 $F(x)$ 的单调性可知：$F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个实根.

547.（华中师范大学，2001年；中山大学） 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，$f(\frac{a+b}{2})=0$. 证明：$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant \frac{M(b-a)^3}{24}$，其中 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$.

证法1 考虑函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可微，且 $F'(x)=f(x)$，$F''(x)=f'(x)$，$F'''(x)=f''(x)$.

由 *Taylor* 公式知

$F(a)=F(\frac{a+b}{2})-F'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}F''(\frac{a+b}{2})\cdot(\frac{b-a}{2})^2-\frac{1}{6}F'''(\xi_1)(\frac{b-a}{2})^3$，

$F(b)=F(\frac{a+b}{2})+F'(\frac{a+b}{2})\cdot\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}F''(\frac{a+b}{2})\cdot(\frac{b-a}{2})^2+\frac{1}{6}F'''(\xi_2)(\frac{b-a}{2})^3$，其中 $a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$. 从而

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=F(b)-F(a)\\&=(b-a)F'(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^3}{48}[F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)]\\&=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^3}{48}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)].\end{aligned}$$

又已知 $f(\frac{a+b}{2})=0$，所以

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\frac{(b-a)^3}{48}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\right|\\&\leqslant\frac{(b-a)^3}{48}\cdot[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]\\&\leqslant\frac{M(b-a)^3}{24}.\end{aligned}$$

其中 $M=\max\limits_{a\leqslant b\leqslant b}|f''(x)|$.

证法2 将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处用 *Taylor* 公式展开，注意到 $f(\frac{a+b}{2})=0$，有

$$f(x)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

上式两端在$[a,b]$上积分得

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2!}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\Big|_a^b+\frac{1}{2!}f''(\xi)\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_a^b\right|$$

$$=\frac{1}{24}(b-a)^3\cdot|f''(\xi)|$$

$$\leqslant\frac{M}{24}(b-a)^3.$$

其中$M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$.

548.(华东师范大学) 设$f(x)$处处连续,$F(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)\mathrm{d}t$,其中$\delta$为任何正数,证明:

(1) $F(x)$对任何x有连续导数;

(2) 在任意闭区间$[a,b]$上,当δ足够小时,可使$F(x)$与$f(x)$一致逼近(即任给$\varepsilon>0$,对一切$x\in[a,b]$均有$|F(x)-f(x)|<\varepsilon$).

证 (1) $F'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+h+t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)\mathrm{d}t}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+h+t)-f(x+t)]\mathrm{d}t}{h}$$

$$=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\lim_{h\to0}\frac{f(x+t+h)-f(x+t)}{h}\mathrm{d}t.$$

$$=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f'(x+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\delta}[f(x+\delta)-f(x-\delta)].$$

因为$f(x)$处处连续,所以$F'(x)$连续,即$F(x)$对任何x有连续导数.

(2) $\because F(x)-f(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]\mathrm{d}t,$$

所以由罗必塔法则可得

$$\therefore \lim_{\delta\to 0}[F(x)-f(x)] = \lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]\mathrm{d}t}{2\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{[f(x+\delta)-f(x)]-[f(x-\delta)-f(x)]\cdot(-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}[f(x+\delta)+f(x-\delta)-2f(x)] = 0.$$

故对任给 $\varepsilon>0$,当 δ 足够小时,对一切 $x\in[a,b]$ 均有 $|F(x)-f(x)|<\varepsilon$.因此所证结论成立.

549.(清华大学)　设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\mathrm{d}x.$$

证　设 $y=\pi-x$,则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(|\cos(\pi-y)|)(-1)\cdot\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos y|)\mathrm{d}y \qquad ①$$

设 $y=x-\pi$,则

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(|\cos(\pi+y)|)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} f(|\cos y|)\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos y|)\mathrm{d}y. \qquad ②$$

由①、②即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x.$$

550.(成都科技大学)　求$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^2\sqrt{x}\cdot|x-1|\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1\sqrt{x}(1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2\sqrt{x}(x-1)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{4}{15}(2+\sqrt{2}).$$

551.(国防科技大学)　设 $f(x)$ 在$[-a,a]$$(a>0)$上连续

证明：$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$，并计算$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

证　因 $f(x)+f(-x)$，$f(x)-f(-x)$ 分别为偶、奇函数，所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right]\mathrm{d}x.$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)] + \frac{1}{2}\cdot 0$$

$$= \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

而$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1+\sin(-x)}\right]\mathrm{d}x.$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x+1+\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= 2\tan x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 2.$$

552.（中国科学院，2002 年）　计算积分$\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解　$\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2\pi}\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x.$

$$= \sqrt{2}\left[\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi}\left(-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[2\sin\frac{x}{2}\Big|_{0}^{\pi} - 2\sin\frac{x}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= 4\sqrt{2}.$$

553.（中国科学院，2002 年）　计算积分$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解　作变换 $t=\pi-x$，得

$$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-1)\cdot\mathrm{d}t.$$

$$= \int_{0}^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t = \pi\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x,$$

所以$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$= -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)$

$= -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^\pi$

$= \frac{\pi^2}{4}.$

554.(南京航空学院) 计算积分$\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x}$的值.

解 令$t=\tan\frac{x}{2}$,则$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$,

$\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty}\frac{2(1+t^2)}{t^4+6t^2+1}dt$

$= 2\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}+6}dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+8}$

$= 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t-\frac{1}{t}}{2\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{+\infty}$

$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

555.(长沙铁道学院) 若$f(x)$在$[a,b]$上有连续导函数,$f(a)=f(b)=0$,并且$\int_a^b f^2(x)dx=1$,则

$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}.$

证 由分部积分法可知

$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = \int_a^b xf(x)d(f(x))$

$= \frac{1}{2}\int_a^b xd[f^2(x)] = \frac{x}{2}f^2(x)\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$

$= \frac{b}{2}f^2(b) - \frac{a}{2}f^2(a) - \frac{1}{2}\cdot 1$

$= -\frac{1}{2}.$

556.(北京工业大学) 设$f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2 dt$,求证:$x>0$时,$|f(x)|<\frac{1}{x}$.

证　作变换 $t=\sqrt{u}$，则

$$f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2\mathrm{d}t=\int_{x^2}^{(x+1)^2}\sin u\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}(-\cos u)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\cos u\right)\Bigg|_{x^2}^{(x+1)^2}-\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\cdot\frac{\cos u}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u.$$

$$=\frac{1}{2x}\cos x^2-\frac{1}{2(x+1)}\cos[(x+1)^2]-\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u,$$

从而，当 $x>0$ 时，有

$$|f(x)|<\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}u^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\right|$$

$$=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right).$$

$$=\frac{1}{x}.$$

557.（通讯工程学院）　计算积分 $\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数.

解　$\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin x\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}x\sin x\mathrm{d}x-\int_{3\pi}^{4\pi}x\sin x\mathrm{d}x+\cdots+(-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x\mathrm{d}x$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}x\sin x\mathrm{d}x.$$

而 $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}x\sin x\mathrm{d}x=-x\cos x\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi}+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\cos x\mathrm{d}x$

$$=(-1)^{k-1}(2k-1)\pi+\sin x\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$

$$=(-1)^{k-1}\cdot(2k-1)\pi.$$

所以 $\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot(-1)^{k-1}(2k-1)\pi$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\pi=n^2\pi.$$

558.（同济大学）　计算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\int_{\frac{1}{2}c}^{\frac{\sqrt{3}}{2}c}\sqrt{c^2-x^2}\mathrm{d}x$ 的值.

解　设 $f(x,c)=\sqrt{c^2-x^2}$，则 $f_c(x,c)=\frac{c}{\sqrt{c^2-x^2}}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\int_{\frac{c}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}c}\sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{c}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}c}\frac{c}{\sqrt{c^2-x^2}}\mathrm{d}x+\sqrt{c^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}c)'-\sqrt{c^2-(\frac{c}{2})^2}\cdot(\frac{c}{2})'$$

$$=\int_{\frac{c}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}c}\frac{c}{\sqrt{c^2-x^2}}\mathrm{d}x+\frac{|c|}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}|c|}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=c\cdot\arcsin\frac{x}{c}\Bigg|_{\frac{c}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}c}$$

$$=\frac{\pi}{6}c.$$

559.(哈尔滨工业大学,1999年,武汉钢铁学院) 设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数,令$I=\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x$.

(1) 证明:$I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(2) 求$\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x$.

证 (1) 作变换 $t=\pi-x$,则

$$I=\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int_\pi^0(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\cdot(-1)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\pi(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^\pi f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^\pi tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x-I,$$

所以 $I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$.

(2) 见第553题.

560.(上海交通大学) 计算$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

解 作变换 $t=\arcsin\sqrt{x}$,则 $x=\sin^2t$,$\mathrm{d}x=\sin2t\mathrm{d}t$,当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$t=\frac{\pi}{4}$,当 $x=\frac{3}{4}$ 时,$t=\frac{\pi}{3}$,所以

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{t}{\sqrt{\sin^2t\cdot\cos^2t}}\cdot\sin2t\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2t\mathrm{d}t = t^2 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{7\pi^2}{144}.$$

561.(华东师范大学,1998 年) 设 $f(x)$ 有连续的二阶导函数,且 $f(\pi) = 2, \int_0^{\pi}[f(x) + f''(x)]\sin x\mathrm{d}x = 5$,求 $f(0)$.

解 $\int_0^{\pi}[f(x) + f''(x)]\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}f''(x)\sin x\mathrm{d}x$

$= -\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}(\cos x) + \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}(f'(x))$

$= [-f(x)\cos x]\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x \cdot f'(x)\mathrm{d}x +$

$[\sin xf'(x)]\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}f'(x)\cos x\mathrm{d}x$

$= f(\pi) + f(0)$,

所以 $f(0) = \int_0^{\pi}[f(x) + f''(x)]\sin x\mathrm{d}x - f(\pi) = 5 - 2 = 3.$

562.(中国科学院,2000 年) 求积分 $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x \cdot \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x(1 + \cos 2x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x$,

而 $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\cos 2x\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin 2x\mathrm{d}x$

$= \mathrm{e}^{\pi} - 1 + 2\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{\pi} - 1 + 2\mathrm{e}^x\sin 2x\Big|_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x$

$= \mathrm{e}^{\pi} - 1 - 4\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x$,

所以 $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1)$.

又因为 $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_0^{\pi} = \mathrm{e}^{\pi} - 1$,所以

$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi} - 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1) = \frac{3}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1).$

563.(中国科学院,2003 年) 计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2 + \cos\theta}$.

解 令 $\theta = \pi - x$ 则

$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} = -\int_{\pi}^{-\pi}\frac{dx}{2+\cos(\pi-x)} = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2-\cos x} \neq 0$.（$\because \frac{1}{2-\cos x}$ 是偶函数）

564.（武汉大学，1992 年） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上严格递增且连续，$f(0)=0$，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，试证成立等式：

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^{f(a)}[a-g(x)]dx.$$

证 设 $y=f(x)$，则 $x=g(y)$，注意到 $f(a)=0$，故

$$\int_0^a f(x)dx = \int_{f(0)}^{f(a)} y d(g(y)) = yg(y)\Big|_{f(0)}^{f(a)} - \int_{f(0)}^{f(a)} g(y)dy$$

$$= f(a)g[f(a)] - \int_0^{f(a)} g(y)dy.$$

$$= af(a) - \int_0^{f(a)} g(x)dx$$

$$= \int_0^{f(a)}[a-g(x)]dx.$$

565.（哈尔滨工业大学） 试证对一切正整数 n，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x dx = 2^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx.$$

证 令 $t=2x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}2^{-n}\sin^n(2x)dx = 2^{-n-1}\int_0^{\pi}\sin^n t dt$$

$$= 2^{-n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt + 2^{-n-1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n t dt.$$

作变换 $t=\pi-u$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt.$$

再作变换 $t=\frac{\pi}{2}-v$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0[\sin(\frac{\pi}{2}-v)]^n\cdot(-1)dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx.$$

因此

$$\int_0^{\pi}\sin^n x\cos^n x dx = 2^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt = 2^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx.$$

566.（北京钢铁学院） 计算：$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t dt$（$n$ 为自然数）.

解　$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos t]^{n-1} \mathrm{d}(\sin t)$.

$= \sin t[\cos t]^{n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-2} \cdot \sin^2 t \mathrm{d}t$

$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-2} \cdot (1-\cos^2 t)\mathrm{d}t$

$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$.

从而有 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

又 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \mathrm{d}t = 1$.

故当 $n = 2k$ 时(k 为自然数),

$I_n = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots\cdots \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$.

当 $n = 2k+1$ 时(k 为非负整数).

$I_n = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots\cdots \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$.

567.(华东师范大学,2000 年)　设 $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x$.证明:

(1)$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$, $n = 2,3,\cdots\cdots$

(2)$I_n \geqslant \frac{2}{3\sqrt{n}}$, $n = 1,2,3,\cdots\cdots$

证　(1)$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1} \mathrm{d}x$

$= \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} \mathrm{d}x - \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n-1} \mathrm{d}x$

$= I_{n-1} - [-\frac{1}{2n} x(1-x^2)^{n-1}\Big|_0^1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x]$

$= I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n$,

$\therefore (1+\frac{1}{2n})I_n = I_{n-1}$, $\therefore I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$, $n = 2,3,\cdots\cdots$

(2)$I_1 = \int_0^1 (1-x^2)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$,所以

$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} I_{n-2} = \cdots\cdots$

$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots\cdots \frac{4}{5} \cdot I_1 = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots\cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$.

记 $a = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots\cdots \frac{4}{5}$, $b = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots\cdots \frac{3}{4}$.

易知 $a > b > 0$, $\therefore a^2 > ab > 0$, 而 $ab = \frac{3}{2n+1}$,

$\therefore a^2 > ab = \frac{3}{2n+1} \geqslant \frac{3}{3n} = \frac{1}{n}$,

$\therefore a \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

因此 $I = a \cdot \frac{2}{3} \geqslant \frac{2}{3\sqrt{n}}$, $n = 1,2,3,\cdots\cdots$

568.(华中师范大学,2000年) 设 $a > 0$,函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可微,证明:

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)| \mathrm{d}x.$$

证法 1 $\because f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可微,$\therefore$ 积分 $\int_0^a (a-x)f'(x)\mathrm{d}x$ 存在,且

$$\int_0^a (a-x)f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)\mathrm{d}[f(x)]$$

$$= (a-x)f(x)\Big|_0^a - \int_0^a f(x)\mathrm{d}(a-x)$$

$$= af(0) + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\therefore af(0) = \int_0^a (a-x)f'(x)\mathrm{d}x - \int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\therefore |af(0)| \leqslant \left|\int_0^a (a-x)f'(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \int_0^a (a-x)|f'(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant a\int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x.$$

$$\therefore |f(0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证法 2 因为 $f(x)$ 连续,由积分中值定理,存在 $\xi \in [0,a]$,使得 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)a$.

又因 $f(\xi) - f(0) = \int_0^{\xi} f'(x)\mathrm{d}x$,所以

$$|f(0)| = \left|f(\xi) - \int_0^{\xi} f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |f(\xi)| + \left|\int_0^{\xi} f'(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

569.（长沙铁道学院）　函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则

$$\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x.$$

证　令 $x = \pi - \frac{t}{2}$，则

$$\int_0^\pi x(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^0(\pi - \frac{t}{2})f(\sin\frac{t}{2})\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} f(\sin\frac{t}{2})\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} tf(\sin\frac{t}{2})\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} f(\sin\frac{t}{2})\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\frac{t}{2}f(\sin\frac{t}{2})\mathrm{d}(\frac{t}{2})$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} f(\sin\frac{t}{2})\mathrm{d}t - \int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} f(\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x. \qquad ①$$

另一方面，令 $x = 2\pi - u$

$$\int_\pi^{2\pi} f(\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x = -\int_\pi^0 f(\sin\frac{u}{2})\mathrm{d}u = \int_0^\pi f(\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x. \qquad ②$$

则由 ①② 有

$$\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\left[\int_0^\pi f(\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} f(\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\int_0^\pi f(\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x + \int_0^\pi f(\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x.$$

570.（天津大学）　计算 $\int_0^{N\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$，其中 N 为正整数.

解　令 $a_N = \int_0^{N\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{N\pi}|\sin x - \cos x|\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{N\pi}\left|\sin(x - \frac{\pi}{4})\right|\mathrm{d}x.$$

当 $N = 1$ 时，

$$a_1 = \sqrt{2}\int_0^\pi \left|\sin(x - \frac{\pi}{4})\right|\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\frac{\pi}{4}-x)dx+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin(x-\frac{\pi}{4})dx$$

$$= \sqrt{2}[\cos(x-\frac{\pi}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\sqrt{2}(-\cos(x-\frac{\pi}{4}))\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 2\sqrt{2}.$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2}\int_0^{(n+1)\pi}\left|\sin(x-\frac{\pi}{4})\right|dx = a_n+\sqrt{2}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\sin(x-\frac{\pi}{4})\right|dx.$$

令 $x = n\pi + t$,则 $a_{n+1} = a_n+\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin[n\pi+(t-\frac{\pi}{4})]\right|dt$

$$= a_n+\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin(t-\frac{\pi}{4})\right|dt$$

$$= a_n + a_1,$$

从而可知

$$a_N = a_{N-1}+a_1 = a_{N-2}+2a_1 = \cdots\cdots$$

$$= a_1+(N-1)a_1 = Na_1 = 2\sqrt{2}N.$$

571.(武汉大学,2000年) 设函数 $f(x)$ 在任何有限区间上可积,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = l$,求证:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = l.$$

证 由函数 $f(x)$ 在任何有限区间可积及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = l$ 知,对任给 $\varepsilon > 0$,存在 $M > 0$,当 $x > M$ 时有 $|f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

从而

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - l\right| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - \frac{1}{x}\int_0^x l dt\right|$$

$$= \frac{1}{x}\left|\int_0^M[f(t)-l]dt+\int_M^x[f(t)-l]\right|dt$$

$$\leqslant \frac{1}{x}\left[\left|\int_0^M[f(t)-l]dt\right|+\frac{1}{x}\int_M^x|f(t)-l|dt\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{x}\left[\left|\int_0^M[f(t)-l]dt\right|+\int_M^x\frac{\varepsilon}{2}dt\right].$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{x}\left[\left|\int_0^M[f(t)-l]dt\right|-\frac{M}{2}\varepsilon\right],$$

显然,当 x 足够大时,必有 $\frac{1}{x}\left[\left|\int_0^M[f(x)-l]dt\right|-\frac{M}{2}\varepsilon\right] < \frac{\varepsilon}{2}$,

所以 $\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = l.$

572.（长沙铁道学院） 证明：$\int_1^a f(x^2 + \dfrac{a^2}{x^2}) \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^a f(x + \dfrac{a^2}{x}) \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

证 令 $t = x^2$，则 $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$.

$$\int_1^a f(x^2 + \frac{a^2}{x^2}) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t}) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2x}\mathrm{d}t.$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t}) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\left[\int_1^a f(t + \frac{a^2}{t}) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_a^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t}) \frac{\mathrm{d}t}{t}\right].$$

再令 $u = \dfrac{a^2}{t}$，则

$$\int_1^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t}) \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\int_a^1 f(u + \frac{a^2}{u}) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^a f(t + \frac{a^2}{t}) \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

所以$\int_1^a f(x^2 + \dfrac{a^2}{x^2}) \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^a f(t + \dfrac{a^2}{t}) \dfrac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^a f(x + \dfrac{a^2}{x}) \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{x}.$

573.（华中理工大学，2000年） 设$f(x)$在$(0, +\infty)$内连续，$a > 0$，证明等式：$\int_{\frac{1}{a}}^a f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^a [f(x) + \dfrac{1}{x^2}f(\dfrac{1}{x})]\mathrm{d}x.$

证 令 $t = \dfrac{1}{x}$，则

$$\int_{\frac{1}{a}}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{1}{a}} f(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{t^2}f(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})\mathrm{d}x.$$

$$\therefore \int_{\frac{1}{a}}^a f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{a}}^a [f(x) + \frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})]\mathrm{d}x.$$

574.（天津大学，1998年） 求 $I = \int_{-1}^1 x(1 + x^{1997})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x.$

解 作变换 $t = -x$，得

$$I = \int_{-1}^1 x(1 + x^{1997})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^{-1} (-t)(1 - t^{1997})(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^t) \cdot (-1)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-1}^1 t(1 - t^{1997})(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 x(1 - x^{1997})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x,$$

故 $2I = \int_{-1}^1 x(1 + x^{1997})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 x(1 - x^{1997})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$

$= 2\int_{-1}^{1} x(e^x - e^{-x})dx = 2\int_{-1}^{1} x d(e^x + e^{-x})$

$= 2x(e^x + e^{-x})\Big|_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1}(e^x + e^{-x})dx$

$= 4(e + e^{-1}) - 2(e^x - e^{-x})\Big|_{-1}^{1}$

$= 8e^{-1}$,

$\therefore I = 4e^{-1}$.

575.(北京大学,1995年)　设$f(x)$在$[0, +\infty]$上可微,且满足$\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{3}\int_0^x f(t)dt, x > 0$,求$f(x)$.

解　方程两边对x求导,得

$xf(x) = \frac{1}{3}\int_0^x f(t)dt + \frac{x}{3}f(x)$,

$\therefore \int_0^x f(t)dt = 2xf(x)$.

两边继续对x求导,得

$f(x) = 2f(x) + 2xf'(x)$,即$2xf'(x) = -f(x)$,

解此微分方程得　$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}$($C$为常数).

若$C \neq 0$,则$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$不存在,这与$f(x)$在$x = 0$处连续矛盾,故$C = 0$,从而$f(x) = 0$.

576.(北京航空航天大学,2001年)　设$f(x)$连续,$\forall x > 0, f(x) > 0$且$\forall x \geqslant 0$有$f(x) = \sqrt{\int_0^x f(t)dt}$,求$x \geqslant 0$时,$f(x) = ?$

解　由$f(x) = \sqrt{\int_0^x f(t)dt}$得$f^2(x) = \int_0^x f(t)dt$,方程两边对$x$求导,得

$2f(x)\cdot f'(x) = f(x)$.

而$x > 0$时,$f(x) > 0$,所以$f'(x) = \frac{1}{2}$,从而

$f(x) = \frac{1}{2}x + c$(c为常数).

又因为$f(0) = \sqrt{\int_0^0 f(t)dt} = 0$,且$f(x)$连续,故

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+}(\frac{1}{2}x + c) = c, \therefore c = 0$,

因此$f(x) = \frac{1}{2}x, x \geqslant 0$.

577.(四川联合大学,2000年) 证明:$e^x - e^{\int_{\ln 2}^{x}\frac{dt}{1-e^{-t}}} = 1$.$(x > 0)$

证 $\int_{\ln 2}^{x}\frac{dt}{1-e^{-t}} = \int_{\ln 2}^{x}\frac{e^t}{e^t - 1}dt$

$= \int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{e^t - 1}d(e^t - 1)$

$= \ln|e^t - 1|\Big|_{\ln 2}^{x}$

$= \ln(e^x - 1)$,

所以 $e^x - e^{\int_{\ln 2}^{x}\frac{dt}{1-e^{-t}}} = e^x - e^{\ln(e^x-1)} = e^x - (e^x - 1) = 1$.

§2 反常积分

【考点综述】

一、综述

1. 两类反常积分

(1) 设函数 $f(x)$ 定义在无穷区间

$[a, +\infty)$ 上,且在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积.如果存在极限

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx = J, \quad ①$$

则称此极限 J 为函数 f 在 $[a, +\infty]$ 上的无穷限反常积分(简称无穷积分),记作

$$J = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

并称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.如果极限 ① 不存在,也称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

(2) 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(a, b]$ 上,在点 a 的任一右邻域内无界,但在任何内闭区间 $[u, b] \subset (a, b]$ 上有界且可积.如果存在极限

$$\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx = J, \quad ②$$

则称此极限为无界函数 f 在 $(a, b]$ 上的反常积分,记作

$$J = \int_a^b f(x)dx,$$

并称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.如果极限 ② 不存在,也说反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也称为瑕积分，点a称为f的瑕点.

2. 无穷积分的性质

(1) 无穷积分收敛的柯西准则：无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists G \geqslant a$，只要$u_1, u_2 > G$，便有$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

(2) 线性性质：设k_1, k_2为任意常数，$\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$都收敛，则$\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x$也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x.$$

(3) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

(4) 若f在任何有限区间$[a,u]$上可积，且有$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛，并有

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

当$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收敛时，称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛.称收敛而不绝对收敛者为条件收敛.

3. 无穷极限的收敛判别法

(1) 绝对收敛判别法：$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收敛的充要条件是$\int_a^{u} |f(x)|\mathrm{d}x$存在上界.

(2) 比较判别法：设定义在$[a, +\infty)$上的两个函数f和g都在任何有限区间$[a,u]$上可积，且满足

$$|f(x)| \leqslant g(x), x \in [a, +\infty),$$

则当$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛时$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$必收敛，当$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$必发散.

比较判别法还可以表示成极限形式，当选取$g(x) = \dfrac{1}{x^p}$时，可以得到柯西判别法.

(3) 狄利克雷判别法:若 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界,$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to+\infty$ 时单调趋于 0,则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(4) 阿贝尔($Abel$)判别法:若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界,则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

4. 瑕积分的性质与收敛判别

(1) 瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(瑕点为 a) 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,只要 $u_1,u_2\in(a,a+\delta)$,总有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

(2) 设函数 f_1 和 f_2 的瑕点同为 $x=a$,k_1、k_2 为常数,则当瑕积分 $\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛时,瑕积分 $\int_a^b[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x$ 必定收敛,并有

$$\int_a^b[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 设函数 f 的瑕点为 $x=a$,$c\in[a,b]$ 为任一常数,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b g(x)\mathrm{d}x$.

(4) 设函数 f 的瑕点为 $x=a$,f 在 $(a,b]$ 的任一内闭区间 $[u,b]$ 上可积,则当 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也必定收敛,并有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

当 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时,称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为绝对收敛,称收敛而不绝对收敛的瑕积分是条件收敛的.

(5) 比较判别法:设定义在 $(a,b]$ 上的两个函数 f 与 g,瑕点同为 $x=a$,在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上都可积,且满足

$$|f(x)|\leqslant g(x),x\in(a,b].$$

则当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 必定收敛;当 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散时,

$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 必定发散.

比较判别法也可以写成极限形式.

(6) 设 f 定义于 $(a,b]$，a 为其瑕点，且在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积. 如果

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^p|f(x)|=\lambda,$$

则有：(i) 当 $0<p<1, 0\leqslant\lambda<+\infty$ 时，$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛；

(ii) 当 $p\geqslant 1, 0<\lambda\leqslant+\infty$ 时，$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

5. 反常积分的计算

由于反常积分都是通过变限定积分的极限来定义的，所以依然可以利用牛顿——莱布尼兹公式、换元积分法、分部积分法来计算反常积分，此外，还可以根据具体情况灵活地运用其他一些方法，如：待定系数法、方程法、级数法等.

6.1 欧拉积分

(1) 欧拉积分包括两种类型：

1) Γ 函数：$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x, s>0$.

2) B 函数：$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x, p>0, q>0$.

(2) Γ 函数具有以下性质：

1) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s), s>0$；特别地，$\Gamma(n+1)=n!$（$n$ 为自然数）.

2) $\lim_{s\to 0^+}\Gamma(s)=+\infty$.

3) $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}, 0<s<1$；特别地，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

4) $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}u^{2s-1}e^{-u^2}\mathrm{d}u$，特别地，$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(3) B 函数具有以下性质：

1) $B(p,q)=B(q,p)$.

2) $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, p>0, q>0$.

3) 当 $p+q=1$ 时，有余元公式 $B(p,1-p)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi p)}$.

4) $B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1), p>0, q>1$.

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q),p>1,q>0.$$

二、解题方法

1. 考点1　判断反常积分的敛散性

解题方法(1) 比较判断法(见下面第580题),(2) 定义法,(3) 柯西准则(下面第578题),(4) 狄利克雷判断法(见下面第592题),(5) 阿贝尔判别法.

2. 考点2　计算反常积分

3. 考点3　收敛的反常积分的性质应用

578.(中国科学院,2002年)　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微,并且 $\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x<+\infty$.如果 $|f'(x)|\leqslant C$(当 $x>0$ 时),其中 C 为一常数.试证:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证　$\because f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,$|f'(x)|\leqslant C$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续,从而 $f^2(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上也一致连续.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$,则存在 $\varepsilon_0>0$,对任给 $A>0$,存在 $x_1>A$,使得 $|f(x_1)|>\sqrt{\varepsilon_0}$.

由于 $f^2(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续,对于 $\frac{\varepsilon_0}{2}>0$,存在 $\delta>0$,当 $x',x''\in[0,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时,有

$$|f^2(x')-f^2(x'')|<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

故当 $x\in[x_1,x_1+\delta]$ 时,有

$$|f^2(x)|\geqslant|f^2(x_1)|-|f^2(x_1)-f^2(x)|>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

所以　$\int_{x_1}^{x_1+\delta}f^2(x)\mathrm{d}x>\frac{\varepsilon_0}{2}\delta.$

根据柯西准则,此即表明 $\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 发散,这与已知条件矛盾.所以假设不成立,即应有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

579.(中国科学院,2001年)　设 $f(x)$ 为连续实值函数,并且对所有 x,有 $f(x)\geqslant 0$,还设 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<\infty$.求证:$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\mathrm{d}x\to 0(n\to\infty)$.

证　$\because\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<\infty$,$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists A>0$,当 $A_2>A_1>A$ 时有

$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$，而对所有 x，有 $f(x) \geqslant 0$，故有$\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$.

当 $n \geqslant A+1$ 时，

$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{A+1} xf(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_{A+1}^n xf(x)\mathrm{d}x$.

$\because f(x)$ 为实值连续函数，所以 $xf(x)$ 在$[0, A+1]$上连续且有界；$\therefore$ 存在 $M > 0$，使得对 $x \in [0, A+1]$，有 $|xf(x)| < M$.

$\therefore \frac{1}{n}\int_0^{A+1} xf(x)\mathrm{d}x < \frac{M(A+1)}{n}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M(A+1)}{n} = 0$，从而存在 $N_1 > 0$，当 $n > N_1$ 时，有

$$\frac{1}{n}\int_0^{A+1} xf(x)\mathrm{d}x < \frac{M(A+1)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由积分中值定理可知，存在 $\xi \in [A+1, n]$，使得

$\frac{1}{n}\int_{A+1}^n xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cdot\xi\int_{A+1}^n f(x)\mathrm{d}x < \frac{\xi}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

取 $N = \max\{A+1, N_1\}$，则当 $n > N$ 时，有

$0 \leqslant \frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{A+1} xf(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_{A+1}^n xf(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\therefore$ 当 $n \to +\infty$ 时，$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\mathrm{d}x \to 0$.

580.(北京航空航天大学)　判断积分$\int_1^{+\infty}\left[\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　对 $\forall x \in [1, +\infty)$，有

$0 \leqslant \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x(1+x)} \leqslant \frac{1}{x^2}$.

再由$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，可得$\int_1^{+\infty}\left[\ln(1+\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x})\right]$收敛.

581.(中国科学院，2001 年)　如果广义积分$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$(其中 a 是瑕点)收敛，那么$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.并举例说明命题的逆不成立.

证　由$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，根据柯西准则，$\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，只要 $u_1, u_2 \in (a, a+\delta)$，总有

$$\int_{u_1}^{u_2} |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_{u_1}^{u_2} |f(x)|\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

利用定积分的绝对值不等式,又有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

再由柯西收敛准则的充分性可知,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

命题的逆不成立,例如:设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\sqrt{\frac{1}{x}}$,令 $x=\frac{1}{t^2}$,则 $\int_0^1\frac{1}{x}\sin\sqrt{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=2\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,而由狄利克雷法可以判定 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 是条件收敛的,从而可知 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛但 $\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$ 不收敛.

582.(北京大学,1993年) 判断积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$ 的收敛性,其中 p 和 q 是参数.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x.$

1) 当 $p=q$ 时,$\int_0^1\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$,$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$,易知:当 $p<1$ 时,$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛,当 $p\geqslant1$ 时,$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散;当 $p>1$ 时,$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛,当 $p\leqslant1$ 时,$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.所以不论 $p=q$ 取何值,一定有 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

2) 当 $p\neq q$ 时,不妨设 $p<q$.对于无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^q\cdot\frac{1}{x^p+x^q}=1$ 知:当 $q>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛;当 $q\leqslant1$ 时,$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

下面在 $q>1$ 的前提下讨论 $\int_0^1\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 的收敛性.若 $p\leqslant0$,则 $\int_0^1\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 为正常积分,必收敛.若 $p>0$,由 $\lim\limits_{x\to0^+}x^p\cdot\frac{1}{x^p+x^q}=1$ 知:当 $0<p<1$ 时,$\int_0^1\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛;当 $p\geqslant1$ 时,$\int_0^1\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

综合可知:当 $p<1<q$ 或 $q<1<p$ 时,$\int_0^1\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 都收敛,从而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛;在其他情况下,$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

583.(北京大学,1998 年)　证明反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx(p\geqslant 0)$是收敛的.

证　因为$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx=\int_0^1\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx$,所以只须证明$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx$收敛即可.

记$f(x)=x\sin x^2,g(x)=\frac{1}{x(1+x^p)}$,则对任意$u>1$,

$$\left|\int_1^u f(x)dx\right|=\left|\int_1^u x\sin x^2dx\right|=\frac{1}{2}\left|\cos u^2-\cos 1\right|\leqslant 1,$$

$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减,并且$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1+x^p)}=0$.由狄利克雷判别法可知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx$收敛,故$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx$收敛.

584.(华东师范大学)　设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续,对任意$x\in[1,+\infty)$有$f(x)>0$.另外$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$,试证:若$\lambda>1$,则$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛.

证　用比较判别法.因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$,所以$\forall\varepsilon>0$,存在$A>1$,当$x>A$时有

$\frac{\ln f(x)}{\ln x}<-\lambda+\varepsilon$,即$\ln f(x)<(-\lambda+\varepsilon)\ln x=\ln x^{-\lambda+\varepsilon}$,从而当$x>A$时有$0<f(x)<\frac{1}{x^{\lambda-\varepsilon}}$.

若$\lambda>1$,可取$0<\varepsilon<\lambda-1$,则$\lambda-\varepsilon>1$,从而积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\lambda-\varepsilon}}dx$收敛,根据比较判别法可知,积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛.

585.(北京大学,1995 年;哈尔滨工业大学,2000 年)

设$f(x)$是$[1,+\infty)$上的可微函数,且当$x\to+\infty$时$f(x)$单调下降趋于零.若积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛.证明:积分$\int_1^{+\infty}xf'(x)dx$收敛.

证　当$x\geqslant 1$时,$f(x)\geqslant 0$.否则,存在$c\geqslant 1,f(c)<0$,那么$f(x)\leqslant f(c)<0$,这与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$矛盾.

再证$\lim\limits_{A\to+\infty}Af(A)=0$.事实上由积分中值定理,对充分大的$A$,有

$$\int_{\frac{A}{2}}^{A}f(x)dx=\frac{A}{2}f(\xi)\geqslant\frac{A}{2}f(A)>0,\frac{A}{2}<\xi<A. \quad ①$$

①式左端当$A\to+\infty$时,极限为零.故

$\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{A}{2}f(A)=0$,此即 $\lim\limits_{A\to+\infty}Af(A)=0$. ②

现对任何 $A_1,A_2>1$,考察积分

$$\int_{A_1}^{A_2}xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_{A_1}^{A_2}-\int_{A_1}^{A_2}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=A_2f(A_2)-A_1f(A_1)-\int_{A_1}^{A_2}f(x)\mathrm{d}x \qquad ③$$

由 ② 及 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性,则对 $\forall\varepsilon>0,\exists A>0$,当 $A_1,A_2>A$ 时,有

$$|A_1f(A_1)|<\frac{\varepsilon}{3},|A_2f(A_2)|<\frac{\varepsilon}{3},\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而由 ③ 有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}xf'(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

由柯西准则知 $\int_1^{\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

586.(内蒙古大学) 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调,且 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明:$f(x)=o(\frac{1}{x}).(x\to+\infty)$

证 $\because f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调,不妨设 $f(x)$ 单调递增,则有 $f(x)\leqslant 0$. $(\forall x\in[0,+\infty))$.

事实上,若存在 $x_0\in[0,+\infty)$,使得 $f(x_0)>0$. 则对 $\forall x>x_0$,均有 $f(x)>f(x_0)>0$,从而有 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散,与已知条件矛盾.

由 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,对 $\forall\varepsilon>0,\exists A_0>0$,当 $A_2>A_1>A_0$ 时,

有 $-\int_{A_1}^{A_2}f(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$.

故对 $\forall x>2A_0$,有

$$0\leqslant -xf(x)=-2\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(x)\mathrm{d}t\leqslant -2\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)\mathrm{d}t<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}[-xf(x)]=0$,即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x}}=0,$$

$\therefore$ 当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)=o(\frac{1}{x})$.

587.(武汉大学) 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续,且$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证 因为$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致收敛,对任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$(不妨设$\delta<\varepsilon$),使得对任何$x_1,x_2\in[a,+\infty)$,只要$|x_1-x_2|<\delta$,就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛,所以存在$T>a$,使对任意$x_1,x_2>T$,有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\delta^2}{2}.$$

于是对任意$x>T+\frac{\delta}{2}$,取$x_1=x-\frac{\delta}{2}$,$x_2=x+\frac{\delta}{2}$,则

$$|f(x)|\delta=\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}t-\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-f(t)|\mathrm{d}t+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon\delta}{2}+\frac{\delta^2}{2},$$

从而$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\delta}{2}<\varepsilon$,故$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

588.(新疆大学) 证明:若$f(x)$连续可微,积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$都收敛,则$x\to+\infty$时,有$f(x)\to0$.

证 要证明当$x\to+\infty$时$f(x)$有极限,只要证明,$\forall\{x_n\}\to+\infty$恒有$\{f(x_n)\}$收敛.事实上,因为$\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$收敛,根据柯西准则,$\forall\varepsilon>0$,存在$A>a$,当$x_1,x_2>A$时,恒有$\left|\int_{x_1}^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$,即$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$.那么$\forall\{x_n\}\to+\infty$,存在$N>0$,当$n,m>N$时,有$x_n,x_m>A$,从而

$$\left|\int_{x_n}^{x_m}f'(x)\mathrm{d}x\right|=|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon.$$

因此$\{f(x_n)\}$收敛,从而极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$存在.

下面证明$\alpha=0$.若$\alpha>0$,则由保号性,存在$M>0$,当$x>M$时,有$f(x)>\frac{\alpha}{2}>0$,从而$A>M$时$\int_A^{2A}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\alpha}{2}A\to+\infty$(当$A\to+\infty$时).这与$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛矛盾.同理可证$\alpha<0$也不可能,故$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha=0$.

589.(新疆大学) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,$f(x)>0$,且在任意有限区间$[-A,B](A,B>0)$上可积,又有定数M,使得$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-\frac{|x|}{k}}dx<M$对任意$k>0$成立.试证明:$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛.

证 因为存在定数M,使得对任意$k>0$有$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-\frac{|x|}{k}}dx<M$.而$f(x)>0$,故$M>0$.

任给$A,B>0$,记$c=\max\{A,B\}$,取$k>c$,则

$$0\leqslant\int_{-A}^{B}f(x)dx\leqslant\int_{-A}^{B}f(x)e^{\frac{c-|x|}{k}}dx=e^{\frac{c}{k}}\cdot\int_{-A}^{B}f(x)e^{-\frac{|x|}{k}}dx$$
$$\leqslant e^{\frac{c}{k}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-\frac{|x|}{k}}dx\leqslant e^{\frac{c}{k}}\cdot M<eM,$$

即积分$\int_{-A}^{B}f(x)dx$对任意$A,B>0$保持有界,而$f(x)>0$,所以$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛.

注 若$f(x)\geqslant0$,可以通过考察$\int_{a}^{A}f(x)dx$是否有界来判定反常积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$的敛散性.

590.(北京大学,1997年) 判别广义积分的收敛性:$\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$.

解 积分有瑕点$x=0$及$x=+\infty$,当$x\to+\infty$时,由于对$\forall\varepsilon>0$,有$\ln(1+x)=0(x^{\varepsilon})$,因此当$p>1$时,取$0<\varepsilon<p-1$,则有

$$\frac{\ln(1+x)}{x^p}=0\left(\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}\right),(x\to+\infty).$$

由于$p-\varepsilon>1$,故$\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛.

当$x\to0^+$时,因为

$$\frac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}},(x\to0^+).$$

所以当$p-1<1$,即$p<2$时,$\int_{0}^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛.综上可知当$1<p<2$时,原广义积分收敛.

591.(复旦大学,1996年) 讨论反常积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx$的敛散性.

解 当$p\geqslant1$时,对一切$x\in[1,+\infty]$,有$\frac{x^{p-1}}{1+x}\geqslant\frac{1}{1+x}$,而$\int_{1}^{+\infty}$

$\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$ 发散，故$\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x$ 发散，从而$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x$ 发散.

当 $p<1$ 时，对一切 $x\in[1,+\infty)$，有 $0<\frac{x^{p-1}}{1+x}=x^{p-2}\cdot\frac{x}{1+x}<x^{p-2}$，而$\int_1^{+\infty}x^{p-2}\mathrm{d}x$ 收敛，所以$\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x$ 收敛，又$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x$ 存在，故$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

592.（复旦大学，1996 年） 说明反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\mathrm{d}x$ 绝对收敛或条件收敛.

解 （1）令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+100}$，$g(x)=\cos x$，当 x 充分大时，$f(x)$ 单调递减，且当 $x\to+\infty$，$f(x)\to 0$. 又设 $G(A)=\int_0^A\cos x\mathrm{d}x$，则 $|G(A)|\leqslant 2$，故由狄利克雷判别法知原积分收敛.

（2）现考虑取绝对值的情况，因为当 $x\in[0,+\infty)$ 时，

$$\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\right|\geqslant\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{100+x}+\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}\right)\qquad ①$$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{100+x}=1$ 但$\int_0^{+\infty}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 发散，

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{100+x}\mathrm{d}x$ 发散. 再类似上面（1）可知$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}\mathrm{d}x$ 收敛，

从而由 ① 知 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\right|\mathrm{d}x$ 发散，综上可知原积分是条件收敛的.

593.（湖南大学） 计算 $I_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$，$k$ 为自然数.

解 当 $k=2n-1(n=1,2,\cdots)$ 时，被积函数为奇函数，此时 $I_k=0$.

当 $k=2n(n=1,2,\cdots)$ 时，被积函数为偶函数. 令 $t=\frac{x^2}{2}$，则

$$\begin{aligned}
I_k&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2^{\frac{k+1}{2}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{k+1}{2}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\cdots\cdots\\
&=\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&=(2n-1)!!.
\end{aligned}$$

594.（复旦大学） 讨论$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}$ 的收敛性，其中 $\alpha>\beta>1$.

解　设 m 为自然数，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\int_0^{m\pi}\frac{dx}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}$$

$$\xlongequal{\text{令 } x=n\pi+t}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^\alpha\cdot\sin^\beta t}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^\alpha\sin^\beta t}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^\alpha\sin^\beta t}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n+\sum_{n=0}^{+\infty}B_n.$$

其中 $A_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^\alpha\sin^\beta t}$，$B_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^\alpha\sin^\beta t}$.

设 $f(t)=\frac{\sin t}{t}$，则 $f'(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}=\frac{t-\tan t}{t^2}\cdot\cos t$，而当 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时 $\tan t<t$，所以 $f'(t)<0$，从而对于一切 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 有 $f(t)\geqslant f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$，因此 $\frac{\sin t}{t}\geqslant\frac{2}{\pi}$，即 $\sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t$，从而可知当 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，

$$(n\pi+t)^\alpha\sin^\beta t\geqslant(n\pi)^\alpha\cdot(\frac{2}{\pi}t)^\beta=n^\alpha t^\beta\cdot[\pi^\alpha\cdot(\frac{2}{\pi})^\beta],$$

记 $\pi^\alpha(\frac{2}{\pi})^\beta=b^\beta$，于是

$$A_n\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+n^\alpha b^\beta\cdot t^\beta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(n^{\frac{\alpha}{\beta}}bt)^\beta}\cdot\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot b}d(n^{\frac{\alpha}{\beta}}bt)$$

$$=\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}b}\int_0^{\frac{\pi}{2}\cdot n^{\frac{\alpha}{\beta}}b}\frac{du}{1+u^\beta}\leqslant\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}b}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^\beta},$$

其中 $u=n^{\frac{\alpha}{\beta}}bt$.

注意到 $\beta>1$，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^\beta}$ 收敛，从而 $\frac{1}{b}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^\beta}$ 为一常数，记为 a，则

$$A_n\leqslant\frac{a}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}},\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\leqslant a\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}},$$

而 $\alpha > \beta > 1$,即$\frac{\alpha}{\beta} > 1$,所以$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}$收敛,从而$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$收敛.

对于 B_n,作变换 $U = \pi - t$ 之后可作类似推理,可得$\sum_{n=0}^{+\infty} B_n$收敛.

综合可知,$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + x^{\alpha} |\sin x|^{\beta}}$收敛.

595.(哈尔滨工业大学,1999 年) (1) 证明:广义积分$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$收敛;

(2) 证明:广义积分$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$发散.

证 (1) 因为函数$f(x) = \frac{1}{x}$在$[1, +\infty)$上单调递减,且$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$,而对任给 $A > 1$,

$$\left| \int_1^A \sin x dx \right| = |\cos 1 - \cos A| < 2,$$

所以由狄利克雷判别法可知广义积分$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$收敛.

(2) 对一切 $x \in [1, +\infty)$,有

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

类似 1) 的证法可知$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dt$收敛,但因为广义积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$发散,所以$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$发散,从而广义积分$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$发散.

596.(北京大学) 积分$\int_0^{+\infty} \left[(1 - \frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}} - 1 \right] dx$是否收敛?是否绝对收敛?证明所述结论.

解 $\int_0^{+\infty} \left[(1 - \frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}} - 1 \right] dx =$

$\int_0^1 (1 - \frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}} dx - \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} \left[(1 - \frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}} - 1 \right] dx.$

积分$\int_0^1 (1 - \frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}} dx$是以 $x = 0$ 为瑕点的瑕积分,因为

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$,所以

$(1 - \frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}} - 1 = \left[\frac{1}{3!} x^2 + o(x^2) \right]^{\frac{1}{3}}$ 与 $x^{\frac{2}{3}}$ 同阶,

所以$\int_0^1 (1 - \frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}} dx$收敛,而$(1 - \frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}} > 0$,所以$\int_0^1 (1 - \frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}} dx$绝对

收敛.

积分$\int_1^{+\infty}\left[(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}}-1\right]dx$是无穷积分.当$x>1$时,$\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\frac{1}{x}<1$,可利用$(1+x)^a$的马克劳林公式得

$(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}}-1=1+(-\frac{1}{3})\cdot(-\frac{\sin x}{x})+o(\frac{1}{x^2})-1=\frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}+O(\frac{1}{x^2})$,在前面的题目中已知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$条件收敛,而$\int_1^{+\infty}O(\frac{1}{x^2})dx$绝对收敛,所以无穷积分$\int_1^{+\infty}\left[(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}}-1)\right]dx$条件收敛但不绝对收敛.

综合可知$\int_0^{+\infty}\left[(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}}-1)\right]dx$条件收敛.

597.(同济大学) 设$f(x)$在每个有限区间$[a,b]$上可积,并且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$存在.求证:对任何一个实数$a>0$,$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+a)-f(x)]dx$存在,并求出它的值.

证 任给$\alpha,\beta\in(-\infty,+\infty)$,$\alpha<\beta$,则

$$\int_\alpha^\beta[f(x+a)-f(x)]dx=\int_\alpha^\beta f(x+a)dx-\int_\alpha^\beta f(x)dx$$
$$=\int_{\alpha+a}^{a+\beta}f(t)dt-\int_\alpha^\beta f(x)dx$$
$$=\int_\beta^{\beta+a}f(x)dx-\int_\alpha^{\alpha+a}f(x)dx$$
$$=\int_\beta^{\beta+a}[A+f(x)-A]dx-\int_\alpha^{\alpha+a}[B+(f(x)-B)]dx$$
$$=Aa+\int_\beta^{\beta+a}[f(x)-A]dx-Ba-\int_\alpha^{\alpha+a}[f(x)-B]dx$$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$,所以$\forall\varepsilon>0$,存在$M>0$,当$x>M$时,$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{a}$,当$x<-M$时,$|f(x)-B|<\frac{\varepsilon}{a}$.所以当$\alpha+a<-M$,$\beta>M$时,有

$$\left|\int_\alpha^{\alpha+a}[f(x)-B]dx\right|\leqslant\int_\alpha^{\alpha+a}|f(x)-B|dx<\int_\alpha^{\alpha+a}\frac{\varepsilon}{a}dx=\varepsilon,$$
$$\left|\int_\beta^{\beta+a}[f(x)-A]dx\right|\leqslant\int_\beta^{\beta+a}|f(x)-A|dx<\int_\beta^{\beta+a}\frac{\varepsilon}{a}dx=\varepsilon,$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+a)-f(x)]dx=\lim\limits_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}}\int_\alpha^\beta[f(x+a)-f(x)]dx$

$$=\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}}\left\{Aa+\int_\beta^{\beta+a}[f(x)-A]dx-Ba-\int_\alpha^{\alpha+a}[f(x)-B]dx\right\}$$

$$= (A-B)a + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{\beta}^{\beta+a}[f(x)-A]\mathrm{d}x - \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\alpha+a}[f(x)-B]\mathrm{d}x$$
$$= (A-B)a + 0 - 0$$
$$= (A-B)a.$$

598.(中国科学院,2000 年)　求积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^n}$.

解　作变换 $t = x+1$,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1)^n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{[(x+1)^2+1]^n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}.$$

记　$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$.

解法 1　$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{t}{(t^2+1)^n}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\frac{-2nt}{(t^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}t$$
$$= 0 + 2n\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(t^2+1)^n} - \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\right]\mathrm{d}t$$
$$= 2n\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^n}\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}t\right]$$
$$= 2n(I_n - I_{n+1}).$$

所以　$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n$.

而　$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \arctan t\,\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$,故

$$I_n = \frac{I_n}{I_{n-1}}\cdot\frac{I_{n-1}}{I_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{I_2}{I_1}\cdot I_1$$
$$= \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi$$

解法 2　令 $t = \tan\theta$,则 $n \geqslant 2$ 时,

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n-2}\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n-3}\mathrm{d}(\sin\theta)$$
$$= (\cos\theta)^{2n-3}\cdot\sin\theta\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot(2n-3)(\cos\theta)^{2n-4}\cdot(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$= (2n-3)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n-4}\cdot(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$= (2n-3)(I_{n-1} - I_n).$$

所以 $I_n = \frac{2n-3}{2n-2}, I_{n-1}$,又 $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta = \pi$,所以

$$I_n = \frac{I_n}{I_{n-1}}\cdot\frac{I_{n-1}}{I_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{I_2}{I_1}\cdot I_1 = \frac{(2n-3)}{(2n-2)}\cdot\frac{(2n-5)}{(2n-4)}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\pi.$$

因此,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^n}=\frac{(2n-3)}{2n-2}\cdot\frac{(2n-5)}{2n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi.$$

599.(大连工学院) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,$\int_A^{+\infty}\frac{f(z)}{z}dz(A>0)$存在.证明:

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.(a,b>0).$$

证 设$A>0$,记$g(A)=\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$,则

$$g(A)=\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_A^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx=\int_{aA}^{+\infty}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{bA}^{+\infty}\frac{f(z)}{z}dz$$

$$=\int_{aA}^{bA}\frac{f(z)}{z}dz.$$

由积分中值定理可知,$\exists\xi\in(aA,bA)$,使得

$$g(A)=\int_{aA}^{bA}\frac{f(z)}{z}dz=f(\xi)\int_{aA}^{bA}\frac{1}{z}dz=f(\xi)\cdot\ln\frac{b}{a}.$$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$

$$=\lim_{A\to0^+}g(A)=\lim_{\xi\to0^+}f(\xi)\cdot\ln\frac{b}{a}$$

$$=f(0)\ln\frac{b}{a}.(a,b>0)$$

600.(中国人民大学,2000年) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$,求证:对任何$b>a>0$,有$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-k]\ln\frac{b}{a}$.

证法1 设$0<A<B$,记$g(A,B)=\int_A^B\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$,

则
$$g(A,B)=\int_A^B\frac{f(ax)}{x}dx-\int_A^B\frac{f(bx)}{x}dx$$

$$=\int_{Aa}^{aB}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{bA}^{bB}\frac{f(z)}{z}dz$$

$$=\int_{aA}^{bA}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{aB}^{bB}\frac{f(z)}{z}dz$$

由积分中值定理可知,存在$\xi\in(aA,bA)$,$\eta\in(aB,bB)$使得

$$\int_{aA}^{bA}\frac{f(z)}{z}dz=f(\xi)\int_{aA}^{bA}\frac{1}{z}dz=f(\xi)\ln\frac{b}{a},$$

$$\int_{aB}^{bB}\frac{f(z)}{z}dz=f(\eta)\int_{aB}^{bB}\frac{1}{z}dz=f(\eta)\ln\frac{b}{a}.$$

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\substack{A\to0^+\\B\to\infty}}g(A,B)$

$$=\lim_{A\to0^+}\int_{aA}^{bA}\frac{f(z)}{z}dx-\lim_{B\to+\infty}\int_{aB}^{bB}\frac{f(z)}{z}dx$$

$$=f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}-k\cdot\ln\frac{b}{a}$$

$$=[f(0)-k]\ln\frac{b}{a}\quad(a,b>0)$$

证法2 因为$f(x)$在$[0,+\infty]$上连续,所以$f(x)$在任何有限区间上可微,从而对一切$x>0$,有

$$\frac{f(ax)-f(bx)}{x}=\int_b^a f'(xt)dt,$$

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_0^{+\infty}\left[\int_b^a f'(xt)dt\right]dx$

$$=\int_b^a\left[\int_0^{+\infty}f'(xt)dx\right]dt$$

$$=\int_b^a\left[\frac{1}{t}f(xt)\Big|_0^{+\infty}\right]dt$$

$$=\int_b^a\frac{1}{t}[\lim_{x\to+\infty}f(xt)-f(0)]dt=\int_b^a\frac{1}{t}[k-f(0)]dt$$

$$=[k-f(0)]\ln t\Big|_b^a=[f(0)-k]\ln\frac{b}{a}\quad(a,b>0).$$

601.(上海交通大学) 求$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx,(0<a<b)$.

解 在上题中,令$f(x)=e^{-x}$,可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\frac{b}{a}.$$

602.(北京航空航天大学) 求证:

(1) 当$s>0$时,$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$收敛;

(2) 当$s>1$时,$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.其中$[x]$表示$x$的整数部分.

证 (1) 当$x\geqslant1$时,$x-1<[x]\leqslant x$,所以$0\leqslant x-[x]<1$,从而$0\leqslant\dfrac{x-[x]}{x^{s+1}}<\dfrac{1}{x^{s+1}}$.

当$s>0$时,$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{s+1}}dx$收敛,故$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$收敛.

(2) 当 $s>1$ 时,

$$\int_1^{+\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^s}\mathrm{d}x-\int_1^{+\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1-s}x^{1-s}\Big|_1^{+\infty}-\sum_{n=1}^{+\infty}\cdot\int_n^{n+1}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{s-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}n\int_n^{n+1}\frac{1}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{s-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}n\int\left[n\cdot\left(-\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{x^s}\Big|_n^{n+1}\right]\right.$$

$$=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{+\infty}n\left[\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{n^s}\right]$$

$$=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^s}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{s-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{s-1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^s}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{s-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^s}+1\right]$$

$$=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$

603.(北京大学,1992 年) 讨论瑕积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x}=0$,其中 $p=\frac{1}{2}$,由柯西判别法的极限形式知原积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$ 收敛.

注 $x=1$ 不是被积函数瑕点,因为

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=1.$

604.(华中理工大学) 已知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,求 $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$.

解 设 $f(x)=\ln(1-x)$,则当 $|x|<1$ 时,有

$$f'(x)=-\frac{1}{1-x}=-(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots),$$

上式在 $[0,x](x<1)$ 上逐项积分可得

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n},$$

故 $$\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1(-1)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}x^n\Big|_0^1\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$= -\frac{\pi^2}{6}.$$

605.(国防科技大学) 计算$\int_0^{+\infty}x^n e^{-ax}dx$,其中 n 为正整数,a 为正的常数.

解 $\int_0^{+\infty}x^n e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}x^n e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} + \frac{n}{a}\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-ax}dx$

$$= 0 - \frac{n}{a^2}x^{n-1}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} + \frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^{+\infty}x^{n-2}e^{-ax}dx$$

$$= \frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^{+\infty}x^{n-2}\cdot e^{-ax}dx$$

$$= \cdots = \frac{n!}{a^n}\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$$

$$= \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

606.(北京航空航天大学,2000 年) 求$\int_0^{+\infty}x^{10}e^{-x}dx$.

解 在上题中,令 $n = 10, a = 1$,则

$$\int_0^{+\infty}x^{10}e^{-x}dx = 10!.$$

607.(北京师范大学) 设 m、n 为自然数,求$\int_0^1 t^n(\ln t)^m dt$.

解 记 $I_m = \int_0^1 t^n(\ln t)^m dt$,则

$$I_m = \int_0^1(\ln t)^m\cdot\frac{1}{n+1}d(t^{n+1})$$

$$= \frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^m\Big|_0^1 - \frac{m}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{m-1}dt$$

$$= -\frac{m}{n+1}I_{m-1}\quad(m\geqslant 1)$$

注意到 $I_0 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$,所以

$$I_m = -\frac{m}{n+1}\cdot I_{m-1} = \left(-\frac{m}{n+1}\right)\cdot\left(-\frac{m-1}{n+1}\right)I_{m-2} = \cdots$$

$$= \left(-\frac{m}{n+1}\right)\left(-\frac{m-1}{n+1}\right)\cdot\left(-\frac{m-2}{n+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{n+1}\right)I_0$$

$$= (-1)^m\cdot\frac{m!}{(n+1)^m}\cdot\frac{1}{n+1} = (-1)^m\cdot\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

608.(浙江大学) 求证:

(1)$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+n\pi}dx$;

(2)$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx<\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$.

证 (1) 在右端积分中作变换 $t=x+n\pi$,得

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+n\pi}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\int_0^{m\pi}\frac{\sin t}{t}dt.(m\text{ 为自然数})$$

设 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt(x>0)$,广义积分 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ 是收敛的,因此

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+n\pi}dx=\lim_{m\to+\infty}\int_0^{m\pi}\frac{\sin t}{t}dt=\lim_{m\to+\infty}f(m\pi)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

(2) 由(1) 得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+n\pi}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+(2k-1)\pi}dx+\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+2k\pi}dx\right)$$

$$=-\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{[x+(2k-1)\pi](x+2k\pi)}dx.$$

因右端诸被积函数均非负,仅在积分区间的端点处为0,所以积分值为正,于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx<0,$$

即 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx<\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx.$$

609.(北京航空学院) 证明:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

证 令 $x=\frac{1}{t}$,当 $x\to+0$ 时,$t\to+\infty$;当 $x\to+\infty$ 时,$t\to+0$,则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_{+\infty}^0\frac{-t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x.$$

记 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{1+x^4}\mathrm{d}x$,下证 $I=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

令 $x-\frac{1}{x}=t$,当 $x\to+0$ 时,$t\to-\infty$;当 $x\to+\infty$ 时,$t\to+\infty$,则

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2+t^2}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{2+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{A\to+\infty}2\int_0^A\frac{1}{2+t^2}\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^A$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\sqrt{2}\arctan\frac{A}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

610.(上海师范学院) 设 $F(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,x\in[0,+\infty)$.

试证:(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$;

(2) $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递减.

证 (1) 由罗必达法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}=0.$$

(2) 因为 $F'(x)=x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t-1<\int_x^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t-1$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}})\Big|_0^{+\infty}-1=0,$$

所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递减.

611.(北京钢铁学院) 计算 $I_{2n-1}=\int_0^{+\infty}x^{2n-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,n\geqslant1$.

解 作变换 $t=x^2$,则 $x=\sqrt{t}$,

$$I_{2n-1}=\int_0^{+\infty}t^{\frac{2n-1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left[-t^{n-1}e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + (n-1)\int_0^{+\infty} t^{n-2}\cdot e^{-t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)\int_0^{+\infty} t^{n-2}\cdot e^{-t}dt = \cdots$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)!\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{1}{2}(n-1)!.$$

612.(中山大学)　已知$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,求$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$ $(\alpha > \beta > 0)$.

解　原式 $= \lim\limits_{\substack{b\to+\infty \\ \varepsilon\to0^+}}\left[-\int_\varepsilon^b (e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2})d\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ \varepsilon\to0^+}}\left[\frac{e^{-\beta x^2} - e^{-\alpha x^2}}{x}\Bigg|_\varepsilon^{+\infty}\right] + \int_0^{+\infty}(-2\alpha e^{-\alpha x^2} + 2\beta e^{-\beta x^2})dx$$

$$= 0 - 2\alpha\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx + 2\beta\int_0^{+\infty} e^{-\beta x^2}dx$$

$$= -2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt + 2\beta\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$$

$$= -2\sqrt{\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 2\sqrt{\beta}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \sqrt{\beta\pi} - \sqrt{\alpha\pi}.$$

613.(华北电力学院)　已知积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$,求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos xt}{x}dx$.

解　记 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos xt}{x}dx$,则

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin[x(1+t)] + \sin[x(1-t)]}{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin[(1+t)x]}{x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-t)x}{x}dx.$$

当 $|t| < 1$ 时,分别令 $(1+t)x = u$,$(1-t)x = v$,得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin[(1+t)x]}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin[(1-t)x]}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v}dv = \frac{\pi}{2}.$$

故 $|t| < 1$ 时,$I(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

当 $t=1$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin[(1+t)x]}{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x)=\frac{\pi}{2}$，

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin[(1-t)x]}{x}dx=0.$

同理，当 $t=-1$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin[(1+t)x]}{x}dx=0$，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin[(1-t)x]}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，故当 $|x|=1$ 时，$I(t)=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+0)=\frac{\pi}{4}$.

当 $t>1$ 时，分别令 $(1+t)x=u$，$(t-1)x=v$，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin[(1+t)x]}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin[(1-t)x]}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(-v)}{-v}\cdot(-1)dv=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}dv=-\frac{\pi}{2}.$$

故 $t>1$ 时，$I(t)=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})=0.$

同理可求得 $t<-1$ 时，有 $I(t)=0$，即 $|t|>1$ 时，$I(t)=0$.

总之，有
$$I(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1,\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

614.（中国科技大学） 已知 $0\leqslant h\leqslant 1$，正整数 $n\geqslant 3$. 证明：

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\geqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h.$$

证 作变量代换 $t=h\sqrt{x}$，则

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt=\int_0^1(1-h^2x)^{\frac{n-3}{2}}\cdot\frac{h}{2\sqrt{x}}dx=h\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-h^2x)^{\frac{n-3}{2}}dx,$$

因为 $0\leqslant h\leqslant 1$，故当 $x\in[0,1]$ 时，有

$$(1-h^2x)^{\frac{n-3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\geqslant(1-x)^{\frac{n-3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\geqslant 0,$$

从而可得

$$\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-h^2x)^{\frac{n-3}{2}}dx\geqslant\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x)^{\frac{n-3}{2}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{\frac{n-1}{2}-1}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}dx=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

所以 $\int_0^h (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot h.$

615.(西北大学) 求 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} dx, n > 0.$

解 令 $x^n = t$,则 $x = \sqrt[n]{t}, dt = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}$,所以

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{(1-\frac{1}{n})-1} dt$$

$$= \frac{1}{n} B(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

616.(北京大学,1999 年) 求 $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$

解 作变换 $t = x^2$,得

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^n \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} \cdot (1-t)^{(n+1)-1} dt$$

$$= \frac{1}{2} B(\frac{1}{2}, n+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot n!}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2}) \cdot (n-\frac{3}{2}) \cdots \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)(2n-1) \cdots \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}$$

$$= \frac{2n \cdot (2n-2) \cdots \cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots \cdots 5 \cdot 3}$$

令 $x_n = \frac{2n \cdot (2n-2) \cdots \cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots \cdots 5 \cdot 3}$,

$y_n = \frac{(2n+1)(2n-1) \cdots \cdots 5 \cdot 3}{(2n+2) \cdot 2n \cdot \cdots \cdot 6 \cdot 4}$,则由于对一切自然数 k,有 $\frac{2k}{2k+1}$

$< \dfrac{2k+1}{2k+2}$,所以

$0 < x_n < y_n$,故 $0 < x_n^2 < x_n y_n = \dfrac{1}{n+1}$,即 $0 < x_n < \sqrt{\dfrac{1}{n+1}}$.而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{n+1}} = 0$,由夹逼原则可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,即

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = 0$.

617.(武汉大学,2001 年)　计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解　设 $S_a = [0,a]\times[0,a]$,显然 $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 在 S_a 上可积,且

$$F(a) = \iint\limits_{S_a} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = (\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x)^2.$$

作半径为 a 和$\sqrt{2}a$ 的$\dfrac{1}{4}$ 圆 D_1 和 D_2,使得 $D_1 \subset S_a \subset D_2$,由 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} > 0$ 有

$$H(a) = \iint\limits_{D_1} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant F(a) \leqslant \iint\limits_{D_2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = G(a).$$

而　$H(a) = \iint\limits_{D_1} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \dfrac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-a^2})$.

类似会,$G(a) = \dfrac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-2a^2})$,且有

$$\lim_{a\to+\infty} H(a) = \lim_{a\to+\infty} G(a) = \frac{\pi}{4}.$$

由夹逼原则可得 $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a) = \dfrac{\pi}{4}$,即 $\lim\limits_{a\to+\infty}\left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$.

所以　$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

618.(北京师范大学,1993年)　设 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$,$n$ 为自然数.求证:

(1)$a_n = \dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$;

(2)$a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant a_{n-2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

证　(1) 令 $t = x^2$,则 $x = \sqrt{t}$,$\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$,

$$a_n = \int_0^1 (x^2)^{\frac{n}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 t^{\frac{n}{2}}\cdot(1-t)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}\cdot(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n+1}{2}-1}(1-t)^{1-\frac{1}{2}}dt$$
$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{3}{2}\right).$$

由 B 函数的性质可知$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$,所以

$$a_n = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{n+1}{2}-1}{\frac{n+1}{2}+\frac{3}{2}-1}B\left(\frac{n-1}{2},\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n+2}\cdot B\left(\frac{n-1}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}.$$

(2) 对一切 $x\in[0,1]$,有 $x\leqslant 1$ 且只在 $x=1$ 时取等号,所以

$$a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 x\cdot x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$\leqslant \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\,dx = a_{n-1},$$

从而 $\quad a_n \leqslant a_{n-1}\leqslant a_{n-2}$.

(3) 由(1) 知 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$,故$\frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{n-1}{n+2}$,从而

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-2}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n+2} = 1$,而由 2) 知$\frac{a_n}{a_{n-2}}\leqslant\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant 1$,

所以$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-2}}\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant 1$,因此$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

§3 含参变量积分

【考点综述】

一、综述

1. 含参变量的正常积分

设 f 是定义在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的二元函数,当 x 取$[a,b]$上某定值时,$f(x,y)$是定义在$[c,d]$上的一元函数,若$f(x,y)$在$[c,d]$上可积,则其积分 $I(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ 称为含参变量积分,x 为积分参量,$x\in[a,b]$.

它有以下几个性质:

(1) 若 $f(x,y)D$ 上连续,则 $I(x)$ 在$[a,b]$上连续,

(2) 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积,则 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \iint f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 若 $f(x,y)$ 与 $f'_x(x,y)$ 都在 D 上连续,则 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,且 $I'(x) = \int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y$.

(4) 若 $f(x,y)$ 在 D 上连续,$y_1(x),y_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时,$c \leqslant y_1(x) \leqslant d$,$c \leqslant y_2(x) \leqslant d$,则 $G(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(5) 若 $f(x,y)$ 与 $f'_x(x,y)$ 在 D 上连续,$y_1(x),y_2(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上其值域含于 $[c,d]$ 上的两个可微函数,则函数 $G(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上可导,且

$$G'(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y + f(x,y_2(x))y_2'(x) - f(x,y_1(x))y_1'(x).$$

(6) 若每个 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $n\to\infty$ 时,$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ 于 $[a,b]$ 上,则可在积分号下取极限,即:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(7) 若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[y_0-\delta,y_0+\delta](\delta>0)$ 上连续,则可在积分号下取极限,即

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x.$$

2. 含参变量的非常正积分

设函数 f 定义在无界区域 $E = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y < +\infty\}$ 上,若对每一个固定的 $x\in[a,b]$,非正常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 都收敛,则它的值是 x 在 $[a,b]$ 上取值的函数,记为

$$I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y, x\in[a,b].$$

称为定义在 $[a,b]$ 上的含参变量 x 的无穷限非正常积分,简称为含参量非正常积分.

(1) 若含参量非正常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 与函数 $I(x)$ 对任给的正数 ε,总存在某一实数 $N > C$,使得当 $M > N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$,都有

$$\left|\int_c^m f(x,y)\mathrm{d}y - I(x)\right| < \varepsilon,\text{即}\left|\int_M^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon,$$

则称含参变量非正常积分$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛于 $I(x)$,或称含参量积分$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛.

(2)(一致收敛的柯西准则) 含参量积分$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$在$[a,b]$上一致收敛的充要条件是:对任给的正数 ε,总存在某一实数 $M > C$,使得当 $A_1,A_2 > M$ 时,对一切 $x \in [a,b]$,都有,$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right| > \varepsilon$.

(3)(M 判别法) 设有函数 $g(y)$,使得

$|f(x,y)| \leqslant g(y), a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y < +\infty$

若$\int_c^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$ 收敛,则$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛.

(4)(*Abel* 判别法) 设 ⅰ)$\int_c^{+\infty} f(x,y)$ 在$[a,b]$上一致收敛;

ⅰ)对每一个 $x \in [a,b]$ 函数 $g(x,y)$ 为 y 的单调函数,且对参量 x,$g(x,y)$ 在$[a,b]$上一致有界,则含参量非正常积分$\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛.

(5)(狄利克雷判别法) 设 ⅰ)对一切实数 $N > C$,含参量的正常积分$\int_c^N f(x,y)\mathrm{d}y$ 对参量 x 在$[a,b]$上一致有界;

ⅱ)对每一个 $x \in [a,b]$,函数 $g(x,y)$ 关于 y 是单调的,且当 $y \longrightarrow +\infty$ 时,对参量 x,$g(x,y)$ 一致收敛于 0.

则含参量非正常积分$\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛.

(6)(连续性) 设 f 为$[a,b]\times[c,+\infty)$上的连续函数,若含参量非正常积分 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$一致收敛,则 $yI(x)$ 在$[a,b]$上连续.

(7)(可微性) 设 f 和 f_x 均为$[a,b]\times[c,+\infty)$上的连续函数.若 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上收敛,$\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛,则 $I(x)$ 在$[a,b]$上可微,且

$$I'(x) = \int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y.$$

(8)(可积性) 设 f 为$[a,b]\times[c,+\infty]$上的连续函数,

若 $I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛,则 $I(x)$ 在$[a,b]$上可积,

且$\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y$.

二、解题方法

1. 考点 1. 判断一致收敛

解题方法:(1) 利用定义判断;

(2) 利用柯西准则判断;

(3) 利用 M 判别法;

(4) 利用 *Abel* 与 *Dirichlet* 判别法。

2. 考点 2. 含参变量反常积分的极限

解题方法:(1) 直接利用积分号下取极限的定理;

(2) 采用积分下取极限的定理中所使用的证法进行证明.

3. 考点 3. 含参变量反常积分的连续性

解题方法:(1) 直接利用连续守恒定理;

(2) 利用该定理的推论:

ⅰ) $f(x,y)$ 在 $x\geqslant a,y\in(c,\mathrm{d})$(有限或无穷区间) 上连续;

ⅱ) $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y\in(c,\mathrm{d})$ 内闭一致收敛.

则 $g(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在(c,d) 内连续.

4. 考点 4. 反常积分的计算

解题方法:(1) 积分号下求积分;

(2) 利用积分号下求导;

(3) 通过建立微分方程求积分值;

(4) 利用反常积分定义及变量代换;

(5) 级数解法;

(6) 转化为其它积分进行计算.

5. 考点 5. 含参变量的正常积分

解题方法:(1) 利用积分号下取极限;

(2) 利用积分号下求导;

(3) 利用积分号下求积分.

【经典题解】

619.(北京大学,2000 年)　求积分$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$,其中 $a>b>0$,

解 由于$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\frac{x^y}{\ln x}\Big|_a^b=\int_a^b x^y\mathrm{d}y$,所以$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y$.
令$f(x,y)=x^y$,显然$f(x,y)$在$[0,1]\times[a,b]$上连续.
所以$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y=\ln\frac{1+b}{1+a}$.

620.(华中师范大学) 求$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-x^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta(|x|<1)$.

解法1 (利用积分号下求导)记$g(x,\theta)=\ln(1-x^2\cos^2\theta)$,则$g'_x(x,\theta)=\frac{-2x\cos^2\theta}{1-x^2\cos^2\theta}$,显然$g(x,\theta),g'_x(x,\theta)$在$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,$|x|<1$上连续,故可在积分号下求导.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g'_x(x,\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2x\cos^2\theta}{1-x^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{2}{x}-\frac{1}{x}(1+\frac{1}{1+x\cos\theta}+\frac{1}{1-x\cos\theta})]\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\pi}{x}-\frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{1+x\cos\theta}+\frac{1}{1-x\cos\theta})\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

令$t=\tan\frac{\theta}{2}$,得$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,$\mathrm{d}\theta=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$,所以

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{1+x\cos\theta}+\frac{1}{1-x\cos\theta})\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^1\left[\frac{1}{1+x\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}+\frac{1}{1-x\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\right]\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{2}{(1+x)+(1-x)t^2}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{2}{(1-x)+(1+x)t^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\arctan\frac{t}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\Big|_0^1+\frac{2}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\arctan\frac{t}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\Big|_0^1\\&=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}(\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})=\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

所以$f'(x)=\frac{\pi}{x}(1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$,故$f(x)=\pi\cdot\ln(1+\sqrt{1-x^2})+C$.

注意到 $f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln1\mathrm{d}\theta=0$,$\therefore C=-\pi\ln2$.
因此

$$f(x)=\pi\ln(1+\sqrt{1-x^2})-\pi\ln2=\pi\ln[\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-x^2})].$$

解法2 （级数解法）

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-x^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= -\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n\cdot(2n)!!}x^{2n}.
\end{aligned}
$$

注 比较两种解法的结果，可以得到 $\ln(1+\sqrt{1-x^2})$ 的马克劳林展开式，以及在 $x=0$ 处的各阶导数的值.

621.（天津大学，1998 年） 设 $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}\mathrm{d}y, g(x)=\left(\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^2, x\geqslant 0$. 试证：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$.

证 记 $f(x,y)=\frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}$，则 $f'_x(x,y)=-2xe^{-x^2(y^2+1)}$ 显然 $f(x,y)$，$f'_x(x,y)$ 在 $x\geqslant 0, y[0,1]$ 上连续，所以可以在积分号下求导，即

$$f'(x)=\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 -2xe^{-x^2(y^2+1)}\mathrm{d}y=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2y^2}\mathrm{d}y.$$

令 $y=\frac{z}{x}$，则 $f'(x)=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-z^2}\mathrm{d}z$.

$g'(x)=2\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y\cdot e^{-x^2}=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-z^2}\mathrm{d}z$.

故 $f'(x)+g'(x)=0$.

从而 $f(x)+g(x)=C$，C 为常数.

当 $x=0$ 时，$f(0)=\int_0^1 \frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$，$g(0)=0$. 所以

$C=f(0)+g(0)=\frac{\pi}{4}$.

因此，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$.

622.（武汉师范学院） 设 $F(y)=\int_a^b f(x)\,|y-x|\,\mathrm{d}x$，其中 $a<b$，而 $f(x)$ 为可微函数，求 $F''(y)$

解　当 $y \in (a,b)$ 时，

$$F(y) = \int_a^b f(x)\,|y-x|\,\mathrm{d}x = \int_a^y f(x)(y-x)\mathrm{d}x + \int_y^b f(x)(x-y)\mathrm{d}x.$$

于是　$F'(y) = \int_a^y f(x)\mathrm{d}x - \int_y^b f(x)\mathrm{d}x, F''(y) = f(y) + f(y) = f(y)$

当 $y \geqslant b$ 时，$F(y) = \int_a^b f(x)(y-x)\mathrm{d}x, F'(y) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, F''(y) = 0$；

同理当 $y \leqslant a$ 时，$F''(y) = 0$.

因此　$F''(y) = \begin{cases} 2f(y), 当\ y \in (a,b)\ 时, \\ 0, 当\ y \notin (a,b)\ 时. \end{cases}$

623.（南开大学，1999 年）　设 $f(x,t)$ 于 $[a,+\infty;c,d]$ 上连续，$\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 于 $[c,d)$ 一致收敛，证明：$\int_a^{+\infty} f(x,\mathrm{d})\mathrm{d}x$ 收敛.

证　因为 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 于 $[c,\mathrm{d})$ 一致收敛，所以任给 $\varepsilon > 0$，存在 $M > 0$，对一切 $A_1, A_2 > M$（其中 $A_1 < A_2$），$\forall t \in [c,\mathrm{d})$，有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,t)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$f(x,t)$ 于 $[a,+\infty;c,\mathrm{d}]$ 上连续，故 $f(x,t)$ 在 $[A_1,A_2]\times[c,\mathrm{d}]$ 上一致连续，所以任给 $x \in [A_1,A_2]$，存在 $\delta > 0$，当 $|t-\mathrm{d}| < \delta$ 时，

$$|f(x,t) - f(x,\mathrm{d})| < \frac{\varepsilon}{2(A_2 - A_1)}$$

从而 $\left|\int_{A_1}^{A_2} [f(x,t) - f(x,\mathrm{d})\mathrm{d}x]\right| < \frac{\varepsilon}{2}$，

故

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,\mathrm{d})\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,t)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{A_1}^{A_2} [f(x,t) - f(x,\mathrm{d})]\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$\therefore \int_a^{+\infty} f(x,\mathrm{d})\mathrm{d}x$ 收敛.

624.（武汉大学，1998 年）　设 $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^3}, x \in [0,+\infty)$.

证明：1) $f_n \rightrightarrows 0, x \in [0,+\infty]$；

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

证　1) 对 $\forall x \in [0,+\infty)$，

$$|f_n(x) - 0| = f_n(x) = \frac{x}{1+n^3x^3} = \frac{x}{1+nx} \cdot \frac{1}{(nx-1)^2 + nx}$$

$$\leqslant \frac{x}{1+nx}\cdot\frac{1}{nx}=\frac{1}{1+nx}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0$,存在 $N=\frac{1}{\varepsilon}$,当 $n>N$ 时,有

$$|f_n(x)-0|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

所以 $f_n(x)\rightrightarrows 0, x\in[0,+\infty)$.

2) 因为每个 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上都连续,且当 $n\to+\infty$ 时,$f_n(x)\rightrightarrows 0$ 对一切 $x\in[0,+\infty)$ 都成立,所以可以在积分号下取极限,所以

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{1+n^3x^3}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}0\mathrm{d}x=0.$$

625.(武汉大学,1995年) 设对任意自然数 n,$f_n(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且反常积分 $\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$ 关于 n 一致收敛,对任意 $M>a$,在 $[a,M]$ 上有 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$(当 $n\to+\infty$),证明:

(1) 反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$.

证 (1) 因为 $\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$ 关于 n 一致收敛,所以 $\forall\varepsilon>0$,在在 $A_1>0$,当 $A_3>A_2>A_1$ 时,对任给 $n\in N$,有

$$\left|\int_{A_2}^{A_3}f_n(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为对任意 $M>a$,在 $[a,M]$ 上有 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$,所以存在 $N>0$,当 $n>N$ 时

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2(A_3-A_2)}.$$

从而

$$\left|\int_{A_2}^{A_3}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{A_2}^{A_3}[f(x)-f_n(x)]\mathrm{d}x+\int_{A_2}^{A_3}f_n(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{A_2}^{A_3}[f(x)-f_n(x)]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{A_2}^{A_3}f_n(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_{A_2}^{A_3}\cdot\frac{\varepsilon}{2(A_3-A_2)}\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}$$

$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$= \varepsilon.$

所以反常积分$\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$收敛.

(2) 因为$\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$关于$n$一致收敛,所以任给$\varepsilon > 0$,存在$M_1 > 0$,当$A > M_1$时,对于一切$N \in N$,

有 $\left|\int_A^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$

又因为$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,所以存在$M_2 > 0$,当$A > M_2$时,有

$\left|\int_A^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$

取某一个A_0,使$A_0 > \max\{M_1, M_2\}$,则

$\left|\int_{A_0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \left|\int_{A_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$

因为$f_n(x)$在$[a, A_0]$上一致收敛于$f(x)$,所以对于上面的$\varepsilon > 0$,存在$N > 0$,使得当$n > N$时,对一切$x \in [a, A_0]$,有

$| f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{3(A_0 - a)}.$

从而可得

$\left| \int_a^{+\infty} [f_n(x) - f(x)]\mathrm{d}x \right|$

$= \left| \int_a^{A_0} [f_n(x) - f(x)]\mathrm{d}x + \int_{A_0}^{+\infty} [f_n(x) - f(x)]\mathrm{d}x \right|$

$\leqslant \left| \int_a^{A_0} [f_n(x) - f(x)\mathrm{d}x] \right| + \left| \int_{A_0}^{+\infty} [f_n(x) - f(x)]\mathrm{d}x \right|$

$\leqslant \int_a^{A_0} | f_n(x) - f(x) | \mathrm{d}x + \left| \int_{A_0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{A_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \right|$

$\leqslant \int_a^{A_0} \frac{\varepsilon}{3(A_0 - a)}\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$

$= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$

$= \varepsilon.$

故 $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^{+\infty} [f_n(x) - f(x)]\mathrm{d}x = 0,$

即 $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$

626.(武汉大学,1996年)　设 $\varphi(x),f(x)$ 是连续函数,且有 $R>0$,当 $|x|\geqslant R$ 时,$\varphi(x)=0$.证明:

(1) 当 $n\to+\infty$ 时有 $\varphi(x)f(\frac{x}{n})\rightrightarrows\varphi(x)f(0),-\varphi<x<+\infty$;

(2) 若还有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$,则

$\lim\limits_{n\to+\infty}n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(nx)f(x)\mathrm{d}x=f(0)$.

证　(1) 当 $|x|\geqslant R$ 时,显然所证结论成立.

当 $|x|<R$ 时,$\varphi(x)$ 是 $[-R,R]$ 上的连续函数,所以存在 $M>0$,使得 $\forall x\in[-R,R]$ 有 $|\varphi(x)|<M$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $|x|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

取 $N=\frac{R}{\delta}$,则当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[-R,R]$,有

$$\left|\frac{x}{n}-0\right|=\frac{|x|}{n}<\frac{|x|}{N}\leqslant\frac{R}{N}=\delta,$$

所以　$|f(\frac{x}{n})-f(0)|<\frac{\varepsilon}{M}$.

从而　$|\varphi(x)f(\frac{x}{n})-\varphi(x)f(0)|$

$=|\varphi(x)|\cdot|f(\frac{x}{n})-f(0)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$.

所以当 $|x|<R$ 时,有 $\varphi(x)f(\frac{x}{n})\rightrightarrows\varphi(x)f(0).(n\to+\infty)$

综合可知,对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,当 $n\to+\infty$ 时有 $\varphi(x)f(\frac{x}{n})\rightrightarrows\varphi(x)f(0)$.

(2) 作变量代换 $x=\frac{t}{n}$,则

$$n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(nx)f(x)\mathrm{d}x=n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)f(\frac{t}{n})\cdot\frac{1}{n}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)f(\frac{t}{n})\mathrm{d}x.$$

容易验证求积分和求极限这两种运算可以交换顺序,所以

$$\lim_{n\to\infty}n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(nx)f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)f(\frac{t}{n})\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\lim_{n \to +\infty} \varphi(t) f(\frac{t}{n})] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(0) dt$$

$$= f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$$

$$= f(0) \cdot 1 = f(0).$$

627.（武汉大学，2000年） 证明：$\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t du$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 中一致收敛.

证　作变量代换　$\varphi = \sqrt{t}u$，则当 $t \in [0, +\infty]$ 时，

$$\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t du = \int_0^{+\infty} e^{-a^2} \cdot \sin t \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} d\delta$$

$$= \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\partial^2} d\partial = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sin t}{\sqrt{t}}.$$

当 $t = 0$ 时，$\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t du = 0.$

所以 $\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t du$ 在 $t \in [0, +\infty]$ 上一致收敛.

628.（北京科技大学，1996年） 求积分 $\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx (a > 0)$ 的值.

解　记 $I(a) = \int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$，则

$$I'(a) = \int_0^a (\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}})' dx + \arctan\sqrt{\frac{a-a}{a+a}}$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\frac{1}{2a}\int_0^a \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} d(a^2-x^2)$$

$$= -\frac{1}{2a}\sqrt{a^2-x^2} \Big|_0^a = \frac{1}{2}.$$

$\therefore I(a) = \frac{1}{2}a + C$，即　$\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx = \frac{1}{2}a + C.$

629.（南开大学） 证明：$\int_0^{+\infty} xe^{-ax} dx$ 在 $0 < a_0 \leqslant a < +\infty$ 上一致收敛，但在 $0 < a < +\infty$ 内不一致收敛.

证　对 $A > 0$，作变换 $t = ax$，

$$0 \leqslant \left| \int_0^{+\infty} xe^{-ax} dx \right| = \int_A^{+\infty} xe^{-ax} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\int_{\alpha A}^{+\infty} te^{-t}dt = -\frac{1}{\alpha^2}te^{-t}\Big|_{-\alpha A}^{+\infty} - \frac{1}{\alpha^2}e^{-t}\Big|_{\alpha A}^{+\infty}$$

$$= \frac{A}{\alpha}e^{-\alpha A} + \frac{e^{-\alpha A}}{\alpha^2} \leqslant \frac{Ae^{-\alpha_0 A}}{\alpha_0} + \frac{e^{-\alpha_0 A}}{\alpha_0^2},$$

而 $\lim\limits_{A\to+\infty} Ae^{-\alpha_0 A} = 0$, $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\alpha_0 A} = 0$,所以对一切 $\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$,有

$$\left|\int_A^{+\infty} xe^{-\alpha x}dx\right| \longrightarrow 0,$$

故 $\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x}dx$ 在 $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上一致收敛.

另外,同上可知,$\forall A > 0$,有

$$\int_A^{+\infty} xe^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}Ae^{-\alpha A} + \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha A},$$

对于每一个 A,当 $\alpha \longrightarrow 0$ 时,此式 $\longrightarrow +\infty$,故原积分在 $0 < \alpha < +\infty$ 上非一致收敛.

630.(北京大学,1999年) 证明:积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-xy}dy$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

证 设 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2e}$,对 $\forall N > 0$,存在 $A = 2N > N$,$x_0 = \frac{1}{2N} \in (0, +\infty)$,使得

$$\left|\int_A^{+\infty} x_0 e^{-x_0 y}dy\right| = \left|-e^{-x_0 y}\Big|_A^{+\infty}\right| = \frac{1}{e} > \varepsilon_0.$$

所以积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-xy}dy$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

631.(北京科技大学,1999年) 设 $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-yx}dx$.

证明:(1) 对任意的 $b > a > 0$,含参变量的积分 $I(y)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛;

(2) 在任何区间 $[0, b]$ 上 $I(y)$ 不一致收敛.

证 (1) 对一切 $y \in [a, b]$,有

$$|ye^{-yx}| \leqslant be^{-ax}, x \in (0, +\infty),$$

而 $\int_0^{+\infty} be^{-ax}dx = -\frac{b}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{b}{a}$ 收敛,所以 $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-yx}dx$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

(2) 设 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2e}$,对于任意的 $N > 0$,存在 $A = 2N > N$,$y_0 = \frac{1}{2N} \in [0, b]$,使得

$$\left|\int_A^{+\infty} y_0 e^{-y_0 x} dx\right| = \left| -e^{-y_0 x} \big|_A^{+\infty} \right| = e^{-y_0 A} = \frac{1}{e} > \varepsilon_0,$$

所以积分 $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-yx}dx$ 在任何区间$[0,b]$上不一致收敛.

632.(北京航空学院) 设$f(x,y)$在$a \leqslant x < +\infty, c \leqslant y \leqslant d$上连续,$\forall y \in [c,d]$,$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$收敛,但$y = d$时积分发散.求证:$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$在$y \in [c,d)$上非一致收敛.

证 因为$\int_a^{+\infty} f(x,d)dx$发散,故有$\varepsilon_o > 0, \forall A > 0$,存在$A_2 > A_2 > A$,使得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,d)dx\right| \geqslant 2\varepsilon_0.$$

因为$f(x,y)$在$a \leqslant x < +\infty, c \leqslant y \leqslant d$上连续,从而在有界闭区域$A_1 \leqslant x \leqslant A_2, c \leqslant y \leqslant d$上一致收敛,于是对上面的$\varepsilon_0 > 0$,存在$\delta > 0$当$|x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta, x_1, x_2 \in [A_1, A_2], y_1, y_2 \in [c,d]$时,有

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon_o}{A_2 - A_1},$$

特别地,当$|y - d| < \delta$时,有

$$|f(x,y) - f(x,d)| < \frac{\varepsilon_o}{A_2 - A_1},$$

从而 $\left|\int_{A_1}^{A_2}[f(x,y) + f(x,d)]dx\right| < \varepsilon_o$.

因此

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx\right| = \left|\int_{A_1}^{A_2}[f(x,y) - f(x,d)]dx + \int_{A_1}^{A_2} f(x,d)dx\right|$$

$$\geqslant \left|\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,d)dx\right| - \left|\int_{A_1}^{A_2}[f(x,y) - f(x,d)dx\right|\right| \geqslant 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

由 *Cauchy* 准则可知:$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$在$y \in [c,d)$上非一致收敛.

注 *Cauchy* 准则的优越性在于不必考虑充分后的无穷区间$[A, +\infty)$,而只须考虑充分后的有限区间$[A', A'']$,从而使难度大大降低.

633.(北京师范大学,1992年) 假设$f(x)$在$t > 0$时连续,如果积分$\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)dt$在$\lambda = \alpha$和$\lambda = \beta (\alpha < \beta)$时收敛,证明:$\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)dt$关于$\lambda$在$[\alpha, \beta]$上一致收敛.

证 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{\lambda-\alpha}\cdot t^\alpha f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{\lambda-\beta}\cdot t^\beta f(t)\mathrm{d}t.$

对于积分$\int_1^{+\infty} t^{\lambda-\beta}\cdot t^\beta f(t)\mathrm{d}t$，由于$\int_0^{+\infty} t^\beta f(t)\mathrm{d}t$收敛，故对$\lambda$一致收敛，而$t^{\lambda-\beta}$显然单调，并且$|t^{\lambda-\beta}|\leqslant 1$，故由阿贝尔判别法知，$\int_1^{+\infty} t^{\lambda-\beta}t^\beta f(t)\mathrm{d}t$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

对于积分$\int_0^1 t^{\lambda-\alpha}\cdot t^\alpha f(t)\mathrm{d}t$，由于$\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\mathrm{d}t$收敛，故$\int_0^1 t^\alpha f(t)\mathrm{d}t$收敛，从而对$\lambda$一致收敛，而对一切$t\in[0,1]$，$t^{\lambda-\alpha}$显然单调，并且$|t^{\lambda-\alpha}|\leqslant 1$，故由阿贝尔判别法知，$\int_0^1 t^{\lambda-\alpha}\cdot t^\alpha f(t)\mathrm{d}t$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

因此，积分$\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$关于$\lambda$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

634.(**复旦大学，华中师范大学，同济大学**) 假设$\{f_n(x)\}$是$[0,+\infty)$上的连续函数序列

1) 在$[0,+\infty)$上$|f_n(x)|\leqslant g(x)$，且$\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛；

2) 在任何有限区间$[0,A]$上$(A>0)$，序列$\{f_n(x)\}$一致收敛于$f(x)$.

试证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$

证 由条件(1)可知，$\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$关于$n\in N$一致收敛.

由条件(2)知，$\{f_n(x)\}$在区间$[0,+\infty)$在内闭一致收敛于$f(x)$.

对不等式$|f_n((x)|\leqslant g(x)$两边取极限，可知$|f(x)|\leqslant g(x)$，而已知$\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛，所以由比较判别法可知$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

因此，

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

635.(**武汉大学，2000年**) 证明$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tu^2}\sin t\mathrm{d}u$在$t\in[0,+\infty)$中一致收敛.

证 当$t\in(0,+\infty)$时，作变量代换$\alpha=\sqrt{t}u$，则

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tu^2}\sin t\mathrm{d}u = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^2}\mathrm{d}\alpha = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

当$t=0$时，$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tu^2}\cdot\sin t\mathrm{d}u = 0.$

所以$\int_0^{+\infty} e^{-xu^2}\sin t\mathrm{d}u$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 中一致收敛.

636.(厦门大学,2000 年)　证明函数 $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续,在 $(0, +\infty)$ 上有连续导函数.

证　$\forall x_0 \in [0, +\infty)$,取 $[a, b] \subset [0, +\infty)$,使 $x_0 \in [a, b]$.

由 $\left|\frac{\sin xt}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ 和 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 收敛可知,$F(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛,故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,从而 $F(x)$ 在 x_0 处连续,由 x_0 的任意性,知 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

$\forall x_0 \in [0, +\infty)$,取 $[c, \mathrm{d}] \subset (0, +\infty)$,使 $x_0 \in [c, \mathrm{d}]$,

记 $f(x, t) = \frac{\sin xt}{1+t^2}$,则 $f'_x(x, t) = \frac{t\cos xt}{1+t^2}$ 和 $f(x, t)$ 均在 $[c, \mathrm{d}] \times [0, +\infty)$ 上连续.

对任意 $A > 0$,$\int_0^A \cos xt\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\sin xt \Big|_0^A = \frac{\sin Ax}{x}$,而 $\left|\frac{\sin Ax}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{c}$,所以$\int_0^A \cos xt\mathrm{d}t$ 对参数 x 在 $[c, \mathrm{d}]$ 上一致有界.

当 $t > 1$ 时,$\frac{t}{1+t^2}$ 关于 t 是单调减少的,且当 $t \to +\infty$ 时,对一切 x,有 $\frac{t}{1+t^2} \to 0(t \to +\infty$ 时).

由狄利克雷判别法可知,$\int_0^{+\infty} f'_x(x, t)\mathrm{d}t$ 在 $[c, \mathrm{d}]$ 上一致收敛.

所以 $F(x)$ 在 $[c, \mathrm{d}]$ 上有连续的导函数,从而 $F(x)$ 在 x_0 处有连续的导函数,由 x_0 的任意性知,$F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有连续的导函数.

637.(厦门大学,2002 年)　证明 $F(x)\int_e^{+\infty} \frac{\cos t\mathrm{d}t}{t^x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上连续可微.

证　令 $f(x, t) = \frac{\cos t}{t^x}$,$\forall [a, b] \subset (1, +\infty)$,显然 $f(x, y)$ 在 $x \in [a, b]$,$t \in [\mathrm{e}, +\infty]$ 上连续.

对一切 $x \in [a, b]$,$\left|\frac{\cos t}{t^x}\right| \leqslant \frac{1}{t^x}$,而$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t$ 收敛,从而 $F(x) = \int_e^{+\infty} \frac{\cos t}{t^x}\mathrm{d}t$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

因此 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,由 $[a, b]$ 的任意性知,$F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续.

$f'_x(x,t) = -\dfrac{\cos t\ln t}{t^x}$，显然 $f(x,t)$，$f'_x(x,t)$ 在 $a \leqslant x \leqslant b, t \in [e, +\infty)$ 上连续.

显然 $\int_e^u (-\cos t)dt$ 在 $[e, +\infty)$ 上有界，$\dfrac{\ln t}{t^x}$ 在 $t \in [e, +\infty)$ 上当 $t \to +\infty$ 时单调趋于 0，所以 $\int_e^{+\infty} f'_x(x,t)dt$ 在 $x \in [a,b]$ 上一致收敛.

又 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，由 $[a,b]$ 的任意性可知，$F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上可微.

638.(四川大学)　确定函数 $F(t) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^t}dx$ 的连续范围.

解　$F(t) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^t}dx = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^t}dx + \int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^t}dx$.

记　$F_1(t) = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^t}dx$，$F_2(t) = \int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^t}dx$，则 $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$.

$F_1(t)$ 以 0 为奇点，当 $x \longrightarrow 0^+$ 时，$\dfrac{\ln(1+x^3)}{x^t} \sim \dfrac{1}{x^{t-3}}$，当且仅当 $t-3 < 1$ 即 $pt < 4$ 时，$F(t)$ 收敛.

$F_2(t)$ 以 $+\infty$ 为奇点，易知当 $t > 1$ 时收敛，当 $t \leqslant 1$ 时发散.

因此 $F(t)$ 当且仅当 $1 < t < 4$ 时收敛.

假设 $[a,b]$ 为 $(1,4)$ 内任一闭区间，对于积分 $F_1(t) = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^t}dx$，当 $t \leqslant b$ 时，对一切 $0 < x < 1$，

$$\left|\frac{\ln(1+x^3)}{x^t}\right| = \frac{\ln(1+x^3)}{x^t} \leqslant \frac{\ln(1+x^3)}{x^b},$$

且 $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^b}dx$ 收敛，所以 $F_1(t)$ 在 $t \leqslant b$ 时一致收敛.

对于积分 $F_2(t) = \int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^t}dx$，当 $t \geqslant a$ 时(注意到 $x \geqslant 1$)，

$$\left|\frac{\ln(1+x^3)}{x^t}\right| = \frac{\ln(1+x^3)}{x^t} \leqslant \frac{\ln(1+x^3)}{x^a},$$

且 $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^a}dx$ 收敛，所以 $F_2(t)$ 在 $t \geqslant a$ 时一致收敛.

综合可知，$F(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，即 $F(t)$ 在 $(1,4)$ 上内闭一致收敛，从而由被积函数的连续性，可知 $F(t)$ 在 $(1,4)$ 内连续.

即 $(1,4)$ 为所求的连续范围.

639.(内蒙古大学) 指出函数 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left|t^2-\frac{1}{t^2}\right|^\alpha dt$ 的定义域.

解 $F(\alpha)=\int_0^1\left|t^2-\frac{1}{t^2}\right|^\alpha dt+\int_1^{+\infty}\left|t^2-\frac{1}{t^2}\right|^\alpha dt$

$$=\int_0^1\frac{(1-t^2)^\alpha}{t^{2\alpha}}dt+\int_1^{+\infty}(t^2-\frac{1}{t^2})^\alpha dt.$$

令 $x=t^2$,则

$\int_0^1\frac{(1-t^2)^\alpha}{t^{2\alpha}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x)^\alpha}{x^\alpha}\cdot x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{(1+\alpha)-1}\cdot x^{(\frac{1}{2}-\alpha)-1}dx$.它的定义域为 $1+\alpha>0,\frac{1}{2}-\alpha>0$,即 $-1<\alpha<\frac{1}{2}$.

令 $\frac{1}{t^4}=y$,则

$$\int_1^{+\infty}(t^2-\frac{1}{t^2})^\alpha dt=\int_1^0(y^{-\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})^\alpha\cdot(-\frac{1}{4})\cdot y^{-\frac{5}{4}}dy.$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(1-y)^\alpha\cdot y^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(1-y)^{(1+\alpha)-1}y^{(-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4})-1}dy.$$

它的定义域为 $1+\alpha>0,-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}>0$,即 $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$,综合可知 $F(\alpha)$ 的定义域为 $(-1,-\frac{1}{2})$.

640.(吉林工业大学,四川师范大学,湘潭大学) 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ 存在,证明函数 $g(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证 要证明 $g(\alpha)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续,即要证明:$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$,当 $|\alpha_2-\alpha_1|<\delta$ 时,

$|g(\alpha_2)-g(\alpha_1)|<\epsilon$.

当 $-A<x<A$ 时,

$$|\cos\alpha_2x-\cos\alpha_1x|=2\left|\sin\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}x\right)\right|\cdot\left|\sin\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}x\right)\right|$$

$$\leqslant 2\cdot\left|\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}x\right|\leqslant|\alpha_2-\alpha_1|\cdot A.$$

故 $|g(\alpha_2)-g(\alpha_1)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha_2xdx-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha_1xdx\right|$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\cdot|\cos\alpha_2x-\cos\alpha_1x|dx$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|\mathrm{d}x+2\int_{A}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x+A|\alpha_2-\alpha_1|\cdot\int_{-A}^{A}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

因为$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$存在,所以当$A>0$充分大时,

$\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}$,$\int_{A}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}$,

即 $2\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|\mathrm{d}x+2\int_{A}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$.

将A固定,取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2A\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x}$,则当$|\alpha_2-\alpha_1|<\varepsilon$时,

$$A|\alpha_2-\alpha_1|\int_{-A}^{A}|f(x)|\mathrm{d}x<A|\alpha_2-\alpha_1|\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$|g(\alpha_2)-g(\alpha_1)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此$g(\alpha)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

641.(华中师范大学,2001年) 设$F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\cos xy\mathrm{d}y$.

证明:(1)$2F'(x)+xF(x)=0$;

(2)求$F(x)$.

证 (1)记$f(x,y)=e^{-y^2}\cos xy$,则$f'_x(x,y)=-ye^{-y^2}\sin xy$.显然$f(x,y),f'_x(x,y)$连续.

因为对一切$x\in(-\infty,+\infty),y\in[0,+\infty)$,有

$|e^{-y^2}\cos xy|\leqslant e^{-y^2}$,$|-ye^{-y^2}\sin xy|\leqslant ye^{-y^2}$,

而$\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y$收敛,所以$\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$一致收敛.

又$\int_0^{+\infty}ye^{-y^2}\mathrm{d}y$收敛,所以$\int_0^{+\infty}f'_x(x,y)$也一致收敛.

因此$F(x)$可微,且

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}f'_x(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}(-ye^{-y^2})\sin(xy)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\sin(xy)\mathrm{d}(e^{-y^2})$$

$$=\frac{1}{2}\sin(xy)e^{-y^2}\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\cdot x\cdot\cos xy\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}x\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\cos xy\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}xF(x).$$

即 $2F'(x)+xF(x)=0$

(2) 由 $2F'(x)+xF(x)=0$,得

$\frac{\mathrm{d}F(x)}{F(x)}=-\frac{x}{2}\mathrm{d}x$,

所以 $F(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$,$C$ 为常数.

又因为 $F(0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,所以

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=C\cdot\mathrm{e}^0$,即 $C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

因此 $F(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$.

642.(上海师范学院) 设 $F(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t, x\in[0,+\infty)$,试证:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$;

(2) $F(x)$ 在$[0,+\infty)$内单调递减.

证 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(2) 因为$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ 收敛,所以$\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ 收敛,且

$F'(x)=x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=\int_x^{+\infty}x\mathrm{e}^{\frac{x^2-t^2}{2}}\mathrm{d}t-1$

$\leqslant\int_x^{+\infty}t\mathrm{e}^{\frac{x^2-t^2}{2}}\mathrm{d}t-1=-\mathrm{e}^{\frac{x^2-t^2}{2}}\Big|_x^{+\infty}-1=0$,

即 $F'(x)\leqslant 0$,所以 $F(x)$ 在$[0,+\infty)$内单调递减.

643.(山东大学) 求积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{x}\mathrm{d}x(\alpha>0)$ 之值.

解 由于$\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{2}=\int_1^{\alpha}x\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}t$,所以

$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{\alpha}x\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}t$.

记 $f(x,t)=x\mathrm{e}^{-tx^2}$,则 $f(x,t)$ 在$[0,+\infty)\times[1,\alpha]$(或$[0,+\infty]\times[\alpha,$

1]) 上连续，且$\int_0^{+\infty} xe^{-tx^2}dx$ 对一切 $t \in [1,\alpha]$(或$[\alpha,1]$) 上一致收敛，所以

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} dx\int_1^{\alpha} xe^{-tx^2}dt = \int_1^{\alpha} dt\int_0^{+\infty} xe^{-tx^2}dx$$

$$= \int_1^{\alpha}[-\frac{t}{2}e^{-tx^2}|_0^{+\infty}]dt = \int_1^{\alpha}\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{4}.$$

644.(北京科技大学,1996 年)　计算积分　$I = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$，$(0 < a < b)$.

解　由于　$e^{-ax} - e^{-bx} = -e^{-tx}|_a^b = \int_a^b xe^{-tx}dt$.

故　$I = \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}dx\int_a^b xe^{-tx}dt = \int_a^b dt\int_0^{+\infty}e^{-tx}dx$

$$= \int_a^b\frac{1}{t}dt = \ln t|_a^b = \ln\frac{b}{a}.$$

645.(复旦大学)　求 $f(x) = \int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos 2xt\,dx$(已知 $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

解　类似第641题可得$f'(x) = -2xg(x)$，进而可求得$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$.

646.(新乡师范学院)　计算积分

$$g(\alpha) = \int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx.$$

解　显然 $g(\alpha) = -g(-\alpha)$，所以只须考虑 $\alpha \geqslant 0$ 的情况.

奇点为 $x = 1$ 和 $x = +\infty$.

1) 注意到$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{2}$，即当 $x \longrightarrow 1^+$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 与$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 同价，从而被积函数与$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 同阶，而积分$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ 收敛，所以

$\int_1^2\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$ 收敛.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\cdot\frac{\arctan\alpha x}{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\alpha x \geqslant 0$，所以 $\int_2^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$ 收敛.

因此积分 $g(\alpha)$ 收敛.

2) 又因为 $\int_1^{+\infty}(\frac{\arctan\alpha x}{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}})'_\alpha dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)}$，$\left|\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)}\right| \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$，而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ 收敛，因此 $\int_1^{+\infty}(\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}})'_\alpha dx$ 关于 α 一致收敛.

3) 被积函数及其对 α 的导数的连续性是明显的. 由 1),2),3) 可得

$$g'(\alpha) = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)}(\text{令 } x = \sec t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\alpha^2\sec^2 t}(\text{再令 } u = \tan t)$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2(1+u^2)}\cdot\frac{1}{1+u^2}du$$

$$= \int_0^{+\infty}[\frac{1}{1+u^2} - \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)+\alpha^2u^2}]du$$

$$= \frac{\pi}{2}(1 - \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}).$$

即当 $\alpha \geqslant 0$ 时，$g'(\alpha) = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}})$

又因为 $g(0) = 0$，所以当 $\alpha \geqslant 0$ 时

$$g(\alpha) = \int_0^\alpha g'(t)dt = \frac{\pi}{2}\int_0^\alpha(1 - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}})dt$$

$$= \frac{\pi}{2}(\alpha + 1 - \sqrt{1+\alpha^2}).$$

从而当 $\alpha < 0$ 时，

$$g(\alpha) = -g(-\alpha) = -\frac{\pi}{2}(-\alpha + 1 - \sqrt{1+\alpha^2}).$$

综合可知

$$g(\alpha) = \frac{\pi}{2}(|\alpha| - 1 - \sqrt{1+\alpha^2})\operatorname{sgn}\alpha, -\infty < \alpha < +\infty.$$

647.（北京师范大学，1999 年） 计算：$f(y) = \int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)dx$，此处 $-\infty < y < +\infty$.（计算过程要有理由.）

解 记 $g(x,y) = e^{-x^2}\cos(2xy)$，则 $g'_y(x,y) = -2x\sin(2xy)e^{-x^2}$，显然 $g(x,y), g'(x,y)$ 在 $0 \leqslant x < +\infty, y \in R$ 上连续.

因为 $|e^{-x^2}\cos(2xy)| \leqslant e^{-x^2}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以 $\int_0^{+\infty}g(x,y)dx$ 关

于 $y\in(-\infty,+\infty)$ 是一致收敛的.

又因为 $|-2x\sin(2xy)e^{-x^2}|\leqslant 2xe^{-x^2}$,而$\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}=1$,所以,

$\int_0^{+\infty}g'_y(x,y)dx$ 关于 $y\in(-\infty,+\infty)$ 是一致收敛的.

于是可在积分号下求导,即

$$f'(y)=\int_0^{+\infty}g'_y(x,y)dx=\int_0^{+\infty}[-2x\sin(2xy)e^{-x^2}]dx$$
$$=e^{-x^2}\sin(2xy)\Big|_0^{+\infty}-2y\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)dx$$
$$=-2yf(y).$$

所以有 $f(y)=ce^{-y^2}$,c 为任意常数.

又因为 $f(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,故 $c=f(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

因此 $f(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2}$.

648.(南京航空航天大学,1999年) $\forall\alpha\in(0,1)$,讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{x+10}dx$ 的敛散性(绝对收敛,条件收敛或发散;)

解 $\forall A>0$,$\left|\int_0^A\sin xdx\right|\leqslant 2$

因为 $\left(\frac{x^\alpha}{x+10}\right)'=\frac{x^{\alpha-1}}{(x+10)^2}[\alpha(x+10)-x]$,当 $x>\frac{10\alpha}{1-\alpha}$ 时,$\left(\frac{x^\alpha}{x+10}\right)'<0$,即$\frac{x^\alpha}{x+10}$在$\left(\frac{10\alpha}{1-\alpha},+\infty\right)$上单调下降,并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x+10}=0$.

因此由狄利克雷判别法可知,广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{x+10}dx$ 收敛.

另一方面 $\left|\frac{x^\alpha\sin x}{x+10}\right|\geqslant\frac{x^\alpha\sin^2x}{x+10}=\frac{x^\alpha(1-\cos 2x)}{2(x+10)}$,同上面类似可证 $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\cdot\cos 2x}{2(x+10)}dx$ 收敛.但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha\cdot x^{1-\alpha}}{x+10}=1$,所以$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{x+10}dx$ 发散,因此 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{x^\alpha\sin x}{x+10}\right|dx$ 发散

所以 $\forall\alpha\in(0,1)$,$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{x+10}dx$ 条件收敛.

第七章　级　　数

§1　数项级数

【考点综述】

一、综述

1. 给定一个数列$\{u_n\}$，对它的各项依次用"+"号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots\cdots u_n + \cdots\cdots \quad ①$$

称为数项级数或无穷级数(也常简称级数)，其中 u_n 称数项级数 ① 的通项.数项级数 ① 记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 或$\sum u_n$.

2. 若数项级数的部分和数列$\{S_n\}$收敛于 S(即 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$)，则称数项级数 ① 收敛，称 S 为数项级数 ① 的和，记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots u_n + \cdots\cdots \text{ 或 } S = \sum u_n$$

若$\{S_n\}$为发散数列，则称数项级数 ① 发散.

3. 级数收敛的柯西准则　级数 ① 收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon > 0$，总存在自然数 N，使得当 $m > N$ 和任意的自然数 p，都有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \varepsilon.$$

反之，级数 ① 发散的充要条件是：存在某正数 ε_0，对任何自然数 N，都存在 $m_0 > N$ 和自然数 p_0，有

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0.$$

由此易得：若级数 ① 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. 若级数$\sum u_n$ 与$\sum v_n$ 都收敛，c、d 是常数，则由它们的项的线性组合所得到的级数$\sum(cu_n + \mathrm{d}v_n)$也收敛，且

$$\sum(cu_n + \mathrm{d}v_n) = c\sum u_n + \mathrm{d}\sum v_n.$$

5. 去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.

6. 在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和.

7. 正项级数收敛性的判别方法

(1) 正项级数 $u_1 + u_2 + \cdots + u_2 + \cdots$ 收敛的充要条件是：部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，即存在某正数 M，对一切自然数 n 有 $S_n < M$.

(2) 比较判别法　设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数，如果存在某正数 N，对一切 $n > N$ 都有

$u_n \leqslant v_n$,

那么

(i) 若级数 $\sum v_n$ 收敛，则级数 $\sum u_n$ 也收敛；

(ii) 若级数 $\sum u_n$ 发散，则级数 $\sum v_n$ 也发散.

(3) 比较判别法的极限形式　设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数. 若

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l.$$

则

(i) 当 $0 < l < +\infty$ 时，$\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 同时收敛或同时发散；

(ii) 当 $l = 0$ 且级数 $\sum v_n$ 收敛时，$\sum u_n$ 也收敛；

(iii) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时，$\sum u_n$ 也发散.

(4) 比式判别法(或称达朗贝尔判别法) 设 $\sum u_n$ 为正项级数，且存在某自然数 N_0 及常数 $q(0 < q < 1)$.

(i) 若对一切 $n > N_0$，成立不等式

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$,

则级数 $\sum u_n$ 收敛；

(ii) 若对一切 $n > N_0$，成立不等式

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$,

则级数 $\sum u_n$ 发散.

(5) 比式判别法的极限形式　若 $\sum u_n$ 为正项级数，且

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$,

则

(i) 当 $q < 1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛；

(ii) 当 $q > 1$ 或 $q = +\infty$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

(6) 柯西判别法(或称根式判别法) 设$\sum u_n$为正项级数.且存在某正数N_0及正常数l

(ⅰ) 若对一切$n > N_0$,成立不等式

$\sqrt[n]{u_n} \leqslant l < 1$,

则级数$\sum u_n$收敛;

(ⅱ) 对一切$n > N_0$,成立不等式

$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$,

则级数$\sum u_n$发散.

(7) 根式判别法的极限形式　设$\sum u_n$为正项级数,且

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$,

则

(ⅰ) 当$l < 1$时,级数$\sum u_n$收敛;

(ⅱ) 当$l > 1$时,级数$\sum u_n$发散.

(8) 积分判别法　设$f(x)$为$[1, +\infty)$上非负递减函数,那么正项级数$\sum f(n)$与非正常积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散.

(9) 拉贝判别法　设$\sum u_n$为正项级数,且存在某自然数N_0及常数r.

(ⅰ) 若对一切$n > N_0$,成立不等式

$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geqslant r > 1$,

则级数$\sum u_n$收敛;

(ⅱ) 若对一切$n > N_0$,成立不等式

$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqslant 1$,

则级数$\sum u_n$发散.

(10) 拉贝判别法的极限形式　设$\sum u_n$为正项级数,且极限

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{u_n+1}{u_n}\right) = r$

存在,则

(ⅰ) 当$r > 1$时,级数$\sum u_n$收敛;

(ⅱ) 当$r < 1$时,级数$\sum u_n$发散;

(iii) 当 $r=1$ 时,拉贝判别法无法判断.

8. 一般项级数收敛性的判别方法

(1) 级数 $\sum|u_n|$ 收敛,则级数 $\sum u_n$ 绝对收敛,若 $\sum u_n$ 收敛, $\sum|u_n|$ 发散,称级数 $\sum u_n$ 为条件收敛.

(2) 莱布尼兹判别法　若交错级数 $\sum(-1)^{n+1}u_n$,其中 $u_n\geqslant 0$,并满足下述两个条件.

(i) 数列 $\{u_n\}$ 单调递减;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

则级数 $\sum(-1)^{n+1}u_n$ 收敛.

(3) 阿贝尔判别法　若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列,且级数 $\sum b_n$ 收敛,则级数 $\sum a_nb_n$ 收敛.

(4) 狄利克雷判别法　若数列 $\{a_n\}$ 单调递减,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$,又级数 $\sum b_n$ 的部分和数列有界,则级数 $\sum a_nb_n$ 收敛.

二、解题方法

1. 考点 1　判别级数的敛散性

解题方法　(1) 正项级数判别法(见下面第 660 题)　(2) 莱布尼兹判别法(见下面第 663 题)　(3) 定义法(见下面第 649 题)

2. 考点 2　条件收敛与绝对收敛

【经典题解】

649.(华东师范大学,2000 年)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

证　记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 的前 n 项和 S_n. 则

$$\begin{aligned}S_n&=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})\\&=a_1+a_2+\cdots+a_n-n\,a_{n+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k-n\,a_{n+1}\\&=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1}\end{aligned}$$

对上式两边取极限,从而

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty}(n+1)a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

即$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

650.(武汉大学)　设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$. 试证级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$也是发散的.

证　$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geqslant \frac{\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}.$$

因为$S_n \to +\infty$，故$\forall n$，当$P \in N$充分大时有$\frac{S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}$，从而$\sum_{K=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. 所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$发散.

651.(云南大学)　设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，

证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}}$仍收敛. 其中$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n$.

证　令

$$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}}, \text{则 } b_n = \frac{a_n(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})}{r_{n-1} - r_n} = \sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_n},$$

对上式两边取极限得

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{r_0} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0}.$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}}$收敛到$\sqrt{r_0}$.

652.(中山大学)　级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充要条件是：对任意的正整数序列$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$都有$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+r_n}) = 0$.

证　必要性　因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，所以对$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当$n > N$及

$\forall p \in N$,有

$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$,

特别地 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n}|<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0$.

充分性　用反证法.若 $\sum a_n$ 发散,则 $\exists\,\varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists\, n>N$ 及自然数 p,使

$\left|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}\right|\geqslant\varepsilon_0$.

特别 $N_1=1, \exists\, n_1>1$ 及自然数 r_1 使

$\left|a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_1+r_1}\right|\geqslant\varepsilon_0$.

$N_2=\max\{n_1,2\}, \exists\, n_2>N_2$,及自然数 r_2,使

$\left|a_{n_2+1}+\cdots+a_{n_2+r_2}\right|\geqslant\varepsilon_0$.

…………

这与 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0$ 的假设矛盾.

653.(华中理工大学)　如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}=0$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2})=0,\cdots,\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0,\cdots$.试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否一定收敛?("是"或"不一定",要说明理由)

解　不一定.反例:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

对 $\forall p\in N$,有 $0<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{p}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{p}{n+1}=0$.满足题中条件,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

654.(东北师范大学)　证明下列级数收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[e-(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})]$.

证　(1) 证法 1　$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}[\frac{1}{k}-\ln(1+\frac{1}{k})]=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)]$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)+\lim_{n\to+\infty}[\ln n-\ln(n+1)]$$

$$= c + 0 = c \qquad (c\text{ 为 }Enler\text{ 常数}, c \approx 0.577216.)$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})]$ 收敛.

证法 2　由于 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)(n \to +\infty)$,

所以 $\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \to +\infty)$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^2} - \ln(1+\frac{1}{n})]$ 收敛.

(2) $0 < a_n = e - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}) < \frac{1}{n \cdot n!} = b_n$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!}}{\frac{1}{n\cdot n!}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(n+1)^2} = 0.$$

由比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,再由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,即

$\sum_{n=1}^{\infty}[e - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!})]$ 收敛.

655.(吉林大学)　证明级数

$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$ 发散到 $+\infty$.

证　令 $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}$. 则

$$a_n > \frac{1}{\sqrt{4n}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} > 0.$$

易知 $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散到 $+\infty$. 所以 $\lim_{n\to+\infty}S_{3n} = +\infty$.

又 $S_{3n+2} > S_{3n+1} > S_{3n}$,所以 $\lim_{n\to+\infty}S_{3n+1} = \lim_{n\to+\infty}S_{3n+2} = +\infty$.

所以原级数发散到 $+\infty$.

656.(西北电讯工程学院)　设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 内的可微函数,且满足:

(1) $f(x) > 0$;

(2) $|f(x)| \leq m|f(x)|$,其中 $0 < m < 1$.

任取 a_0,定义 $a_n = \ln f(a_{n-1})$, $n = 1, 2, \cdots$.

证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛.

证 $$\begin{aligned}|a_{n+1}-a_n| &= |\ln f(a_n)-\ln f(a_{n-1})| \\ &= \left|\frac{f'(\xi_n)}{f(\xi_n)}(a_n-a_{n-1})\right| \\ &\leqslant m\,|a_n-a_{n-1}|.\end{aligned}$$

即 $\left|\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}\right| \leqslant m < 1$,

由比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

这里 $\xi_n \in (\min\{a_n, a_{n-1}\}, \max\{a_n, a_{n-1}\})$

657.(西北师范学院) 对函数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (s>1),$$

证明:$f(s)=s\int_1^{+\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$,其中$[x]$为 x 的整数部分.

证 $$\begin{aligned}s\int_1^{+\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{S_n}{x^{s+1}}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-x^{-s}\cdot n\,|_n^{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^s}-\frac{n}{(n+1)^s}\right) \\ &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^s}-\frac{n+1}{(n+1)^s}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.\end{aligned}$$

所以 $f(s)=s\int_1^{+\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$.

658.(浙江大学) 证明:$\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{1}{k^2\ln k}=\dfrac{1}{n\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n(\ln m)^2}\right)$, $n\to+\infty$.

证 因为 $f(x)=\dfrac{1}{x^2\ln x}>0 \quad (x>1)$,且单调减.

所以 $$\int_n^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2\ln k} \leqslant \frac{1}{n^2\ln n}+\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\ln x}. \qquad ①$$

反复利用分部积分法,

$$\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\ln x}=\frac{1}{n\ln n}-\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(\ln x)^2}$$

$$=\frac{1}{n\ln n}-\frac{1}{n(\ln n)^2}+2\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(\ln x)^3}$$

又 $0 \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2(\ln x)^3} \leqslant \frac{1}{(\ln n)^3}\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n(\ln n)^3}$.

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2\ln x} = \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{n(\ln n)^2} + \frac{2\theta_n}{n(\ln n)^3} \quad (0 < \theta_n < 1)$ ②

将②代入①得 $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2\ln k} = \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n(\ln n)^2}\right), n < +\infty$.

659.(北京大师范大学) 证明: $\lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n)\right\}$存在有限.

证 $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ 在$(1, +\infty)$上非负单调递减,

所以 $\int_2^n \frac{1}{x\ln x}dx < \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x}dx < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$,

即 $\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$,

亦即 $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n) > -\ln(\ln 2)$.

$$
\begin{aligned}
\text{又 } a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - [\ln(\ln(n+1) - \ln(\ln n)] \\
&= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x\ln x}dx \\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = 0.
\end{aligned}
$$

由上可知$\{a_n\}$单调递减且有下界.

故 $\lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n)\right\}$存在(有限).

660.(武汉大学,1998年) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛,

证明: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 收敛$(a_n > 0)$.

证 $0 < \frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n} < \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n\ln^2 n}\right)$,

易知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛(积分判别法),又 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2$ 收敛,所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n^2 + \frac{1}{n\ln^2 n})$ 收敛,

由比较判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 收敛$(a_n > 0)$.

661.（东北师范大学） 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$a_n \geqslant 0$，则当$p > \frac{1}{2}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$收敛.

证 $0 \leqslant \frac{\sqrt{a_n}}{n^p} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^{2p}}\right)$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}(p > \frac{1}{2})$均收敛，

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^{2p}}\right)$收敛，由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$收敛$(p > \frac{1}{2})$.

662.（中国科学院，2002 年）

(1) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是收敛的正项级数，则当$\alpha > \frac{1}{2}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$收敛；

(2) 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{n+1}{n}}$发散.

证 (1) 见上题.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{-\frac{n+1}{n}}}{n^{-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$，又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，

由比较判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{n+1}{n}}$发散.

663.（武汉大学，1995 年） 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$是绝对收敛，还是条件收敛，为什么？

解 (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$，

由比较判别法及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}\right|$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$不是绝对收敛的.

(2)$n \geqslant 3$时$\left\{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right\}$为单调递减的. 又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} = 0$，由莱布尼兹判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$收敛. 所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$是条件收敛的.

664.（上海交通大学） 若$\lim\limits_{n\to+\infty}(n^{2n\sin\frac{1}{n}} \cdot a_n) = 1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛？试证之.

解 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n^{-2n\sin\frac{1}{n}}}=1$,又 $0\leqslant n^{-2n\sin\frac{1}{n}}=\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}<\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{4}}$(当 n 充分大时).

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{4}}$ 收敛,由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-2n\sin\frac{1}{n}}$ 收敛,再由比较判别法的根限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

665.(**北京大学,1999年**) 证明:

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\arctan n}{\sqrt{n}}$ 收敛.

证法1 由于$\{\arctan n\}$为单增有界数列;

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛(莱布尼兹判别法);

由阿贝尔判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\arctan n}{\sqrt{n}}$ 收敛.

证法2 令 $f(x)=\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x}}$,则

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x}}-\frac{\arctan x}{2x^{\frac{3}{2}}}=\frac{2x-(1+x^2)\arctan x}{2(1+x^2)x^{\frac{3}{2}}}$$

当 $x>\dfrac{\pi}{4}$ 时,$f'(x)<0$.

所以$\left\{\dfrac{\arctan n}{\sqrt{n}}\right\}$为单调递减数列,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\arctan n}{\sqrt{n}}=0$.

由莱布尼兹判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arctan n}{\sqrt{n}}$ 收敛.

666.(**大连工学院**) 判别 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n\ln(\ln n)}$ 的敛散性.

解 令 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x\ln(\ln x)}$,$(x\geqslant 3)$,

显然 $f(x)$ 为非负单调递减函数.

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)\ln(\ln x)}\mathrm{d}x\xlongequal{\ln x=t}\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{e^t}{t\ln t}\mathrm{d}t$$

$$\geqslant 3\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t=3\ln(\ln t)\Big|_{\ln 3}^{+\infty}=+\infty,$$

所以$\int_3^{+\infty}\dfrac{1}{(\ln x)\ln(\ln x)}\mathrm{d}x$ 发散,

由积分判别法知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n\ln(\ln n)}$发散.

667.(内蒙古大学) 证明:级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{x}{n}$对$\forall x\neq 0$都是条件收敛的.

证 不妨设$x>0$,则$\exists N_x>0$,当$n>N_x$时,$0<\dfrac{x}{n}<\dfrac{\pi}{2}$,此时$\sin\dfrac{x}{n}>0$,且$\left\{\sin\dfrac{x}{n}\right\}$为单调递减数列,且$\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{x}{n}=0$.

由莱布尼兹判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{x}{n}$收敛.

而当$n>N_x$时$\left|(-1)^n\sin\dfrac{x}{n}\right|=\sin\dfrac{x}{n}>0$,$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{n}}{\dfrac{x}{n}}=1$,

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n}$发散,由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{x}{n}$也发散.

所以对$\forall x\neq 0$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{x}{n}$都是条件收敛的.

668.(复旦大学) 讨论级数$\dfrac{1}{1^p}-\dfrac{1}{2^q}+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{4^q}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}+\cdots(p>0,q>0)$的敛散性.

解 (1)若$p,q>1$,则

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n=\dfrac{1}{1^p}-\dfrac{1}{2^q}+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{4^q}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}+\cdots$绝对收敛

(因为例如$p>q$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^q}(q>1)$为优级数);

(2)若$0<p=q\leqslant 1$,应用莱布尼兹定理知级数收敛,且是条件收敛;

(3)当p、$q>0$,原级数与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(2n-1)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}\right)$同时敛散,若$p>1,0<q\leqslant 1$或$q>1,0<p\leqslant 1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^p}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^q}$一敛一散,故原级数发散.

若$0<p<q<1$,则$\dfrac{1}{(2n-1)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}>0$,且与$\dfrac{1}{(2n-1)^p}$同阶(当$n\to+\infty$)故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(2n-1)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}\right)$发散,从而原级数发散.同理可证,

若 $0 < q < p < 1$,原级数发散.

669.(北京航空学院)

(1) 求证:当 $s > 0$ 时$\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$ 收敛;

(2) 求证:当 $s > 1$ 时$\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty} n^s$.

证　(1)$0 < \frac{x-[x]}{x^{s+1}} < \frac{1}{x^{s+1}}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{s+1}}dx = -\frac{1}{s}x^{-s}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{s}$ 收敛,

由比较判别法知$\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$ 收敛.

(2) 当 $s > 1$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}dx - \int_1^{+\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}dx$$

$$= -\frac{1}{s-1}x^{1-s}\Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\text{(由第 657 题结论)}$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

670.(北京大学,1999 年)　设 $f(x)$ 在$[-1,1]$上二次连续可微,且有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0.$$

证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛.

证　由$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$知 $f(0) = 0$,所以 $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$,

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{1}{2}f''(0)$.

由 $f''(x)$ 在$[-1,1]$上连续知 $f''(x)$ 在$[-1,1]$上有界.

由归结原则$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}f''(0) \neq \infty$.

所以$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}|f''(0)| \neq +\infty$,又$\lim_{n=1}\frac{1}{n^2}$ 收敛,由比较判别法知级数$\lim_{n=1} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛.

671.(华东师范大学,2001 年)　证明:若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 亦必绝对收敛.

证　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,记 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_n(a_1 +_2 + \cdots + a_n)|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|$

$= |S| < +\infty$,

由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |(a_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 敛散性相同,而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)|$ 收敛,即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 绝对收敛.

672.(北京科技大学,1999 年)　已知对一切自然数 n 有 $\mu_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^p \mu_n}{\left(1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)} = 1$,判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 的敛散性.

解　$1 - \cos\dfrac{\pi}{n} = 2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}$,

又 $\sin^2\dfrac{\pi}{2n} \sim \dfrac{\pi^2}{4n^2}, (n \to +\infty)$.

故　$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^p \mu_n}{\left(1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^p \mu_n}{2 \cdot \dfrac{\pi^2}{4n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mu_n}{n^{-p-2}} \cdot \dfrac{2}{\pi^2} = 1.$

由比较判别法的极限形式知 $-p-2 > 1$ 即 $p < -3$ 时 $\sum_{n=1}^{p} \mu_n$ 收敛.

当 $-p-2 \leqslant 1$ 即 $p \geqslant -3$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 发散.

673.(复旦大学,1997 年)　判别下面正项级数收敛或发散,

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}\right)$.

解　$\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}\right) =$

$\dfrac{2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}\Big/\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=1.$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$发散.

674.（复旦大学，1997 年）　说明下面级数是条件收敛或绝对收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}$，$(x>0)$.

解　数列$\left\{\frac{1}{(n^2+3n-2)^x}\right\}$是 n 的单调递减函数.

且　$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n^2+3n-2)^x}=0.$

由莱布尼兹判别法，可知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}$收敛.

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}\right|=\frac{1}{(n^2+3n-2)^x}$$

$n^2\leqslant n^2+3n-2\leqslant 4n^2$，

所以$\frac{1}{4^x n^{2x}}\leqslant\frac{1}{(n^2+3n-2)^x}\leqslant\frac{1}{n^{2x}}$.

故当 $2x>1$，即 $x>\frac{1}{2}$ 时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}\right|$收敛，即

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}$绝对收敛；

当 $2x\leqslant 1$，即 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}\right|$发散，也就是

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}$条件收敛.

§2　函数项级数

【考点综述】

一、综述

1. 函数列及其一致收敛性

(1) 函数列收敛与一致收敛的概念　设函数列$\{f_n\}$与函数f定义在同一数集D上,(1) 对$x\in D,\forall\varepsilon>0,\exists$数$N(\varepsilon,x)>0$,当$n>N$时总有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,称$f_n$收敛于$f$,记为$f_n(x)\to f(x),(n\to\infty),x\in D$.

(2) 若对任给的正数ε,总存在某一自然数N,使得当$n>N$时,对一切$x\in D$,都有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,

则称函数列$\{f_n\}$在D上一致收敛于f,记作

$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\quad(n\to\infty),x\in D$.

(3) 函数列一致收敛的柯西准则　函数列$\{f_n\}$在数集D上一致收敛的充要条件是:对任给正数ε,总存在正数N,使得当$n,m>N$时,对一切

$x\in D$,都有$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

(4) 函数列$\{f_n\}$在数集D上一致收敛于f的充要条件是:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$.

2. 函数项级数及其一致收敛性

(1) 收敛与一致收敛的概念　设$\{S_n(x)\}$是定义在数集E上的函数项级数$\sum u_n(x)$的部分和函数列,若$\{S_n(x)\}$在数集D上收敛于$S(x)$,则称$S(x)$为$\sum u_n(x)$的和函数,记为$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=S(x),x\in D\subset E$,并称$D$为函数项级数的收敛域.

类似若$\{S_n(x)\}$在D上一致收敛于$S(x)$,则称函数项级数$\sum u_n(x)$在D上一致收敛于$S(x)$,或称$\sum u_n(x)$在D上一致收敛.

(2) 一致收敛的柯西准则　函数项级数$\sum u_n(x)$在数集D上一致收敛的充要条件为:对任给的正数ε,总存在某自然数N,使得当$n>N$时,对一切$x\in D$和一切自然数p,都有

$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$,

或$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$.

由此我们得到函数项级数$\sum u_n(x)$在数集D上一致收敛的必要条件是函数列$\{u_n(x)\}$在D上一致收敛于零.

(3) 函数项级数$\sum u_n(x)$在数集D上一致收敛于$S(x)$的充要条件是:$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in D}|R_n(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=0$,其中$R_n(x)=S(x)-S_n(x)$称为函数项级数$\sum u_n(x)$的余项.

3. 函数项级数的一级收敛性判别法

(1) 维尔斯特拉斯判别法(或称 M 判别法) 设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 定义在数集 D 上, $\sum M_n$ 为收敛的正项级数,若对一切 $x \in D$ 上, $\sum M_n$ 为收敛的正项级数,若对一切 $x \in D$,有

$|u_n(x)| \leqslant M_n, n = 1,2,\cdots,$

则函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

(2) 阿贝尔判别法　设

① $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛;

② 对于每一个 $x \in I$, $\{v_n(x)\}$ 是单调的;

③ $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界,即对一切 $x \in I$ 和自然数 n,存在正数 M,使得 $|v_n(x)| < M$,

则级数 $\sum u_n(x) \cdot v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

(3) 狄利克雷判别法　设

① $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

在 I 上一致有界;

② 对于每一个 $x \in I$, $\{v_n(x)\}$ 是单调的;

③ 在 I 上 $v_n(x) \rightrightarrows 0 \quad (n \to \infty)$;

则级数 $\sum u_n(x) \cdot v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

4. 一致收敛函数列的性质

(1) 连续性　设函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上一致收敛,且每一项都连续,则其极限函数在 I 上也连续.

(2) 可积性　若函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,且每一项都连续,则

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 可微性　设 $\{f_n\}$ 为定义在 $[a,b]$ 上的函数列,若 $x_0 \in [a,b]$ 为 $\{f_n\}$ 的收敛点, $\{f_n\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上有连续的导数,且 $\{f'_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,则

$$(\lim f_n(x))' = \lim_{n\to+\infty}(f'_n(x)).$$

5. 一致收敛函数项级数的性质

(1) 连续性　若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛,且每一项都连续,则其和函数在 $[a,b]$ 上也连续.

(2) 逐项求积　若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且每一项 $u_n(x)$ 都连续，则

$$\sum\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum u_n(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 逐项求导　若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一项都有连续的导函数，$x_0\in[a,b]$ 为 $\sum u_n(x)$ 的收敛点，且 $\sum u'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则

$$\sum u'_n(x)=\left(\sum u_n(x)\right)'.$$

二、解题方法

1. 考点 1　一致收敛判别法
2. 考点 2　一致收敛函数项级数的性质

【经题题解】

675.（东北工学院）　设连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$. 若 $x_n\in[a,b](n=1,2,\cdots)$ 且 $x_n\to x_0(n\to+\infty)$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.

证　对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，对一切 $x\in[a,b]$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$.

由于 $\{f_n(x)\}$ 连续且一致收敛于 $f(x)$，所以 $f(x)$ 亦连续，故 $\exists N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，$|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon/2$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，

$$|f_n(x_n)-f(x_0)|\leqslant|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)|$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.

676. 证明 $f_n(x)=nx(1-x)^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛，但非一致收敛.

证　易证对 $\forall x\in[0,1]$，$\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$，即 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛.

$$\lim_{n\to+\infty}\operatorname{Sup}_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|\geqslant\lim_{n\to+\infty}\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-0\right|=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\neq$$
0，所以 $f_n(x)=nx(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上非一致收敛.

677.（北京大学，1991 年）　用至少两种方法证明级数 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 在 $[0,1)$ 上非一致收敛.

证法 1

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1)}|R_n(x)| = \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1)}\left|\frac{x^n}{1-x}\right| \geqslant \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1-(1-\frac{1}{n})}\right| =$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-\frac{1}{n})^n = +\infty \neq 0$.所以级数 $1+x+\cdots+x^n+\cdots$ 在$[0,1)$上非一致收敛.

证法2　令 $f_n(x) = 1+x+\cdots+x^{n-1}$,则 $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}, x\in[0,1)$.

$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$.

用反证法　若 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$,则　$f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x)$　①

$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$,而

$f_n(x) = 1+x+\cdots+x^{n-1}, f'_n(x) = 1+2x+\cdots+$

$(n-2)x^{n-3}+(n-1)x^{n-2}$,

$xf'_n(x) = x+\cdots+(n-3)x^{n-3}+(n-2)x^{n-2}+$

$(n-1)x^{n-2}+(n-1)x^{n-1}$,

$(1-x)f'_n(x) = 1+x+\cdots+x^{n-2}-(n-1)x^{n-2}$

$= \frac{1-x^{n-1}}{1-x}-(n-1)x^{n-2}$,这与①式矛盾.

678.(四川大学)　证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{x^2}+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$ 在任何有界区间$[a,b]$上一致收敛,但在任何一点 x_0 处不绝对收敛.

证　$\forall x\in[a,b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{x^2}+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$ 为交错级数,故收敛,且余项

$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^{x^2}+\sqrt{n+1}}{(n+1)^{3/2}} \leqslant \frac{e^{c^2}}{(n+1)^{3/2}}+\frac{1}{n+1}\to 0(n\to+\infty)$,

(其中 $c=\max\{|a|,|b|\}$).故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[a,b]}|R_n(x)| = 0$,

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{x^2}+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$ 在$[a,b]$上一致收敛.

但对任何一点 x_0, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{e^{x_0^2}+\sqrt{n}}{n^{3/2}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{x_0^2}}{n^{3/2}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{x_0^2}}{n^{3/2}}$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{x^2}+\sqrt{n}}{n^3h}$ 在 x_0 处不绝对收敛.

679.(东北师范大学)　证明若 $K(x,t)$ 在 $D=[a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant t\leqslant b]$

上连续，$u_0(x)$ 在$[a,b]$上连续，且对任意 $x\in[a,b]$，令

$$u_n(x)=\int_a^x K(x,t)u_{n-1}(t)\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots$$

则函数列$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.

证 $K(x,t)$ 在闭区域 D 上连续，从而在 D 上有界，即

$\exists M_1>0$，使得对 $\forall(x,t)\in D$，$|k(x,t)|\leqslant M_1$.

$u_0(x)$ 在$[a,b]$上连续，从而在$[a,b]$上有界，即

$\exists M_2>0$，使得对 $\forall x\in[a,b]$，$|u_0(x)|\leqslant M_2$.

所以 $|u_1(x)|=\left|\int_a^x K(x,t)u_0(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M_1M_2(x-a)\leqslant M_1M_2(b-a)$，

$$|u_2(x)|=\left|\int_a^x K(x,t)u_1(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x M_1^2M_2(t-a)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{M_1^2M_2(x-a)^2}{2!}\leqslant\frac{M_1^2M_2(b-a)^2}{2!},$$

由数学归纳法易知 $|u_n(x)|\leqslant\dfrac{M_1^nM_2(b-a)^n}{n!}$ 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M_1^nM_2(b-a)^n}{n!}=0$ 及柯西准则知 $u_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛.

680.（武汉大学，2001年） 设$f_n(x)$在$[a,b]$上连续，且$\{f_n(b)\}$发散. 证明$\{f_n(x)\}$在$[a,b)$上不一致收敛.

证 假设$\{f_n(x)\}$在$[a,b)$上一致收敛，由柯西准则知：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n,m>N$ 时，对一切 $x\in[a,b)$ 有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

又 $f_n(x)$ 在$[a,b]$上连续，故

$\lim\limits_{x\to b^-}|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon$，即 $|f_n(b)-f_m(b)|\leqslant\varepsilon$，

所以$\{f_n(b)\}$收敛，这与$\{f_n(b)\}$发散矛盾.

所以$\{f_n(x)\}$在$[a,b)$上非一致收敛.

681.（陕西师范大学） 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 *Dirichlet* 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

证 ① 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

② 对每个 $x\in[0,+\infty)$，$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$是单调减的，并且对 $\forall x\in[0,+\infty)$ 及任意 $n\in N$，$\left|\dfrac{1}{n^x}\right|\leqslant1$.

由阿贝尔判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

682.(河北师范大学) (1) 设(ⅰ)$f_n(x)$ 在$[a,b]$上连续,$n=1,2,\cdots\cdots$,(ⅱ)$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$;

(ⅲ)在$[a,b]$上$f_n(x)\leqslant f(x)$,$n=1,2,\cdots$.

试证:$\{e^{f_n(x)}\}$在$[a,b]$上一致收敛于$e^{f(x)}$;

(2) 若将(1)中条件(ⅲ)去掉,则$\{e^{f_n(x)}\}$是否还一致收敛.试证明你的结论.

证 (1) 由条件(ⅰ),(ⅱ)知 $\exists M>\max\{0,|a|,|b|\}$,使得

$|f_n(x)|\leqslant M,f(x)\leqslant M,(\forall n\in N,\forall x\in[a,b])$

$g(x)=e^x$在$[-M,M]$上连续,从而在$[-M,M]$上一致连续,即对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$x_1,x_2\in[-M,M]$且$|x_1-x_2|<\delta$时,有$|e^{x_1}-e^{x_2}|<\varepsilon$.

又$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$,所以对$\delta>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,对一切$x\in[a,b]$有$|f_n(x)-f(x)|<\delta$,

所以$|e^{f_n(x)}-e^{f(x)}|<\varepsilon$.

即对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,

对一切$x\in[a,b]$有$|e^{f_n(x)}-e^{f(x)}|<\varepsilon$.

亦即$\{e^{f_n(x)}\}$在$[a,b]$上一致收敛于$e^{f(x)}$.

(2) 若得小中条件(ⅲ)去掉,则$\{(e^{f_n(x)}\}$仍然一致收敛于$e^{f(x)}$.因为(1)的证明没有用到条件(ⅲ).

683.(华中理工大学) 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$在任何有穷区间上一致收敛,而在任何一点都不绝对收敛.

证 (1) 对任何有穷区间I,$\exists M_I>0$,使得对一切$x\in I$有$|x|\leqslant M_I$.

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 在I上一致收敛;

② 对$\forall x\in I$,$\dfrac{x^2+n}{n^2}=\dfrac{x^2}{n^2}+\dfrac{1}{n}$单调减且$\dfrac{x^2}{n^2}+\dfrac{1}{n}\leqslant M_I^2+1$,即是一致有界的.

由阿贝尔判别法知在任何有穷区间I上,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$一致收敛.

(2) 对$\forall x_0\in R$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{x_0^2+n}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_0^2}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$,

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_0^2}{n^2}$收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x_1^2+n}{n^2}$不绝对收敛.

684.(华东师范大学,2001年) 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,$f(1)=0$.证明:

(1)$\{x^n\}$ 在$[0,1]$上不一致收敛;

(2)$\{f(x)\cdot x^n\}$ 在$[0,1]$上一致收敛.

证 (1) 显然 $g(x)=\begin{cases}0, x\in[0,1),\\ 1, x=1\end{cases}$ 是$\{x^n\}$的极限函数,

x^n 在$[0,1]$上连续($n\in N$),而 $g(x)$ 在$[0,1]$上不连续,所以$\{x^n\}$在$[0,1]$上不一致收敛.

(2)$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists 0<\delta<1$,

当 $|x-1|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$,即 $|f(x)|<\varepsilon$.

易证$\{f(x)\cdot x^n\}$在$[0,1-\delta]$上一致收敛于零,即对 $\forall\varepsilon>0$.

$\exists N>0$,当 $x>N$ 时,对一切 $x\in[0,1-\delta]$ 有 $|f(x)\cdot x^n-0|<\varepsilon$.

所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$,有

$$|f(x)\cdot x^n-0|\leqslant\max\{\underset{x\in[0,1-\delta]}{Sup}|f(x)\cdot x^n|,\underset{x\in[1-\delta,1]}{Sup}|f(x)\cdot x^n|\}$$
$$<\max\{\varepsilon,\underset{x\in(1-\delta,1]}{Sup}|f(x)|\}=\varepsilon$$

所以$\{f(x)x^n\}$在$[0,1]$上一致收敛于零.

685.(中国科学院,2000年) 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有连续的导函数 $f'(x)$ 及 $a<\beta<b$.对于每一个自然数 $n\geqslant\dfrac{1}{b-\beta}$ 定义函数

$$f_n(x)=n\left[f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right]. \qquad ①$$

试证:当 $n\to+\infty$ 时函数序列在区间$[a,\beta]$上一致收敛于 $f'(x)$.

证 $f'(x)$ 在$[a,b]$上连续,从而在$[a,b]$上一致连续,即对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,对 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$,$|x_1-x_2|<\delta$ 时 $|f'(x_1)-f'(x_2)|<\varepsilon$.

对 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\delta}\right]+1$,则当 $n>N$ 时,

对一切 $x\in[a,\beta]$ 由①式,

$$|f_n(x)-f'(x)|=|f'(x+\theta_n)-f'(x)|<\varepsilon(0<\theta_n<\frac{1}{n}).$$

所以函数列 $f_n(x)$ 在$[a,\beta]$上一致收敛于 $f'(x)$.

686.(北京大学,1996年) 设在$[a,b]$上,$f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$,$g_n(x)$ 一致收敛于 $g(x)$.若存在正数列$\{M_n\}$,使得

$$|f_n(x)|\leqslant M_n,\ |g_n(x)|\leqslant M_n,(x\in[a,b],n=1,2,\cdots).$$

证明:$f_n(x)\cdot g_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)\cdot g(x)$.

证 先证$\{f_n(x)\}$一致有界.

$f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$,所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists N'>0$,

当 $n>N'$ 时,$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon(x\in[a,b])$.

特别地对 $\varepsilon = 1$,有 $|f_n(x) - f(x)| < 1$,

所以 $|f(x)| \leqslant |f_n(x)| + 1 \leqslant M_n + 1$,即 $f(x)$ 是有界的.

记 $M'_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$,则当 $n > N'$ 时, $|f_n(x)| \leqslant |f(x)| + 1 \leqslant M'_1 + 1$.

取 $M = \max\{M_1, M_2, \cdots, M_{N'}, M'_1 + 1\}$

则对 $\forall n \in N, \forall x \in [a,b], |f_n(x)| \leqslant M$.

同理可证 $g(x)$ 是有界的,即 $\exists M' > 0$,使得

$|g(x)| \leqslant M', x \in [a,b]$.

由于 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$, $g_n(x)$ 一致收敛于 $g(x)$,所以对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$. 当 $n > N$ 时对一切 $x \in [a,b]$ 有

$|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2M'}$, $|g_n(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

所以当 $n > N$ 时,

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)|$$
$$\leqslant |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x)| + |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)|$$
$$\leqslant |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)|$$
$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M' \cdot \frac{\varepsilon}{2M'} = \varepsilon.$$

故 $f_n(x)g_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x) \cdot g(x)$.

687.(同济大学)

(1) 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x^n)$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛,但非一致收敛;

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处有任意阶导数,级数 $\cdots + f^{(n)}(x) + \cdots + f''(x) + f'(x) + f(x) + \int_0^x f(t_1)\mathrm{d}t_1 + \int_0^x \mathrm{d}t_2 \int_0^{t_2} f(t_1)\mathrm{d}t_1 + \cdots + \int_0^x \mathrm{d}t_n \int_0^{t_n} \mathrm{d}t_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} f(t_{n-1})\mathrm{d}_{t_{n-1}}$

按二个方向在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛. 试求级数的和函数 $F(x)$.

证 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x^n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n}$.

对 $\forall x_0 \in [0,1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ 均收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x^n)$ 收敛,

当 $x = 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x^n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$,亦收敛.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x^n)$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛.

但 $|R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k(1-x^k)\right| = \left|\dfrac{x^{n+1}}{1-x} - \dfrac{x^{2n+2}}{1-x^2}\right|$

所以 $\operatorname{Sup}|R_n(x)| \geqslant \left|\dfrac{(1-\frac{1}{n})^{n+1}}{1-(1-\frac{1}{n})} - \dfrac{(1-\frac{1}{n})^{2n+2}}{1-(1-\frac{1}{n})^2}\right|$

$$\geqslant n(1-\frac{1}{n})^{n+1} - \frac{(1-\frac{1}{n})^{2n+2}}{1-(1-\frac{1}{n})^2} \to +\infty$$

$(n \to +\infty)$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$ 在$[0,1]$上非一致收敛.

(2)$f(x)$ 有各阶导 数,自然各阶导数都连续,该级数逐项求导之后,级数仍是它自己,因而一致收敛,满足逐项求导三条件,所以

$\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = F(x), \dfrac{\mathrm{d}F(x)}{F(x)} = \mathrm{d}x.$

两边同时积分得 $\ln F(x) = x + c, F(x) = c_1 e^x$.(其中 $c_1 = e^c$ 为常数),令 $x = 0$,知 $c_1 = f(0) + f'(0) + \cdots + f^{(n)}(0) + \cdots$.

688.(北京大学,1998 年)　求极限 $\lim\limits_{x \to 0+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n n^x}$.

解　记 $u_n(x) = \dfrac{1}{2^n \cdot n^x}$,则 $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ $(x \in [0,1])$.

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[0,1]$上一致收敛.

显然 $u_n(x)$ 在$[0,1]$上连续,故有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n n^x}$ 在$[0,1]$上连续.

所以 $\lim\limits_{x \to 0+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n \cdot n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{2^n n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1.$

689.(中国科学院)　试证:无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{1+n^3 x}$ 在 $0 < x < 1$ 时收敛,但不一致收敛.

证　$\forall x_0 \in (0,1)$,有 $0 < \dfrac{n}{1+n^3 x_0} < \dfrac{n}{n^3 x_0} = \dfrac{1}{n^2 x_0}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 x_0}$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1+n^3 x_0}$ 收敛.

取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$,则对 $\forall N > 0$, $\exists n_0 > N$ 及 $x'_0 = \dfrac{1}{n_0^2}$,

使得$\dfrac{n_0}{1+n_0^3(\frac{1}{n_0^2})}=\dfrac{n_0}{1+n_0}\geqslant\dfrac{1}{2}$,

所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{1+n^3x}$在$(0,1)$上不是一致收敛的.

690.(华东师范大学,1998 年)

(1) 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为发散的一般项级数.

试证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})a_n$也是发散级数;

(2) 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$在$(0,+\infty)$上处处收敛,而不一致收敛.

证 (1) 由$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n}{a_n}=1$ 及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})a_n$发散.

(2) 对 $\forall x\in(0,+\infty)$, $\left|2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}\right|\leqslant 2^n\dfrac{1}{3^nx}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\dfrac{1}{x}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\dfrac{1}{x}$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$收敛,

取$\varepsilon_0=2$,则对$\forall N>0$,$\exists n_0>N$及$x_0=3^{-n_0}\dfrac{2}{\pi}>0$,使得

$$\left|2^{n_0}\sin\frac{1}{3^{-n_0}\frac{2}{\pi}}\right|=2^{n_0}\geqslant 2,$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

691.(北京大学,1997 年) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有任意阶导数$f_{(x)}^{(n)}$,且对任意有限闭区间$[a,b]$,$f^n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$\phi(x)(n\to+\infty)$.求证:$\phi(x)=ce^x$.(c为常数).

证 显然$f^{(n)}(x)$满足可微性定理,即

$$\frac{d\phi(x)}{dx}=\lim_{n\to+\infty}\frac{df^{(n)}(x)}{dx}=\phi(x).$$

由$\dfrac{d\phi(x)}{\phi(x)}=dx$两边积分得$\phi(x)=ce^x$($c$为常数).

692.(武汉大学,1999 年) 级数$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{2n}+\cdots$是否收敛?为什么?

解　此级数不收敛.

因为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2^{n-1})^2}-\frac{1}{2n}+\cdots=$
$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{2n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散,

所以原级数发散.

693.(华东师范大学,2000年)　设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数序列,且 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$, $x\in[a,b]$.

证明:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无零点,则当 n 充分大时, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也无零点,并有 $\frac{1}{f_n(x)}\Rightarrow\frac{1}{f(x)}$, $x\in[a,b]$.

证　(1) 由题设易得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,不妨设

$f(x)>0, x\in[a,b]$.

m 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值. 由 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 知

对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$ 有

$|f_n(x)-f(x)|1<\varepsilon$.

特别地,取 $\varepsilon=m/2$,则 $\exists N_1>0$,当 $n>N_1$ 时 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{m}{2}$,

所以 $0<\frac{m}{2}\leqslant f(x)-\frac{m}{2}<f_n(x)<f(x)+\frac{m}{2}$,

所以当 n 充分大时, $f_n(x)$ 无零点.

(2) 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_2>0$,当 $n>N_2$ 时,

对一切 $x\in[a,b]$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{4}{m^2}\varepsilon$,

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$ 有

$$\left|\frac{1}{f_n(x)}-\frac{1}{f(x)}\right|=\left|\frac{f_n(x)-f(x)}{f_n(x)f(x)}\right|\leqslant\frac{|f_n(x)-f(x)|}{\frac{4}{m^2}}<\frac{\frac{4}{m^2}\varepsilon}{\frac{4}{m^2}}=\varepsilon.$$

所以 $\frac{1}{f_n(x)}\Rightarrow\frac{1}{f(x)}$, $x\in[a,b]$.

694.(华东师范大学,1999年)　设对每一个 n, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,且当 $n\to+\infty$ 时, $f_n(x)\Rightarrow f(x)$, $x\in[a,b]$.

证明:(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathop{Sup}\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f_n(x)=\mathop{Sup}\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)=Sup\lim\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f_n(x)$.

证:(1) 参见第 686 题的证明.

(2) 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f_n(x)\neq\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$,则 $\exists\,\varepsilon_0>0$,对 $\forall N>0$ 有 $n>N$,使 $|\sup f_n(x)-\sup f(x)|\geqslant\varepsilon_0$.

又 $|\sup f_n(x)-\sup f(x)|\leqslant\sup|f_n(x)-f(x)|$,

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0$ 与 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ 矛盾.

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f_n(x)=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)\left(=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\right)$.

695.(兰州大学) 设 $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{k}\dfrac{1}{n}\cos(x+\dfrac{k}{n}),n=1,2,\cdots\cdots$

证明:在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛.

证 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cos\left(x+\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1\cos(x+t)\mathrm{d}t.$

令 $f(x)=\int_0^1\cos(x+t)\mathrm{d}t.$ 下证 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

$f(x)=\int_0^1\cos(x+t)\mathrm{d}t.$ 下证 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

$$f(x)=\int_0^1\cos(x+t)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\cos(x+t)\mathrm{d}t.$$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(x+\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\cos(x+t)\mathrm{d}t\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\cos\left(x+\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\cos(x+t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|\cos\left(\left(x+\frac{k}{n}-\cos(x+t)\right)\right|\mathrm{d}t\qquad①$$

由于 $\cos(x+t)$ 连续,从而在任意闭区间上一致连续,对 $\forall\,\epsilon>0$,$\exists\,\delta>0$ 当 $|t'-t''|<\delta$ 时

$|\cos(x+t')-\cos(x+t'')|<\epsilon$.

当 $t\in\left(\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right)$ 则 $\left|t-\dfrac{k}{n}\right|<\dfrac{1}{n}<\delta$ 时,有 $\left|\cos(x+\dfrac{k}{n})-\cos(x+t)\right|<\varepsilon$.

由①式

$$|f_n(x)-f(x)|<\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon.$$

故 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，即 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

696.(武汉大学,1997 年)　设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上有定义，满足一致 Lipschitz 条件：$|f_n(x)-f_n(x')|\leqslant M|x-x'|,\forall n\in N,\forall x,x'\in[a,b]$，其中 $M>0$ 为一常数，且逐点有 $f_n(x)\to f(x)$（当 $n\to+\infty$）.

证明：(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

(2) $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in[a,b]$.

证　(1) 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon/M>0$，对 $\forall x、x'\in[a,b]$，

且 $|x-x'|<\delta$ 时，

$$|f_n(x)-f_n(x')|<M|x-x'|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

令 $n\to+\infty$，则 $|f(x)-f(x')|\leqslant\varepsilon$.

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，从而在 $[a,b]$ 上连续.

(2) 由(1)中证明知：对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{3M}>0$，

对 $x_1,x_2\in[a,b]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon/3$.

将 $[a,b]$ k 等分，使得 $\dfrac{b-a}{k}<\varepsilon/3M$.

$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_k=b$.

因为 $f_n(x)\to f(x),(n\to+\infty),x\in[a,b]$，

所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_i>0(i=0,1,2,\cdots,k)$，

当 $n>N_i$ 时，$|f_n(a_i)-f(a_i)|<\varepsilon/3$.

取 $N=\max\{N_0,N_1,\cdots,N_k\}$，则当 $n>N$ 时，

$|f_n(a_i)-f(a_i)|<\varepsilon/3,(\forall i\in\{0,1,2,\cdots,k\})$

所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时对一切 $x\in[a,b]$，有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&\leqslant|f_n(x)-f_n(a_i)|+|f_n(a_i)-f(a_i)|+|f(a_i)-f(x)|\\&<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3\\&=\varepsilon.\qquad(\text{其中 }|x-a_i|<\delta)\end{aligned}$$

所以 $f_n(x)\rightrightarrows f(x),n\to+\infty,x\in[a,b]$.

697.(北京航天航空大学)　求证：对任何实数 x，级数

$\sin x-\sin\sin x+\sin\sin\sin x-\cdots$ 收敛.

证　不妨设 $\sin x>0$（否则，只须填一负号），

则原级数 $=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin x}_{n\text{次}}$ 为交错级数.

记 $a_n=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin x}_{n\text{次}}$ 则 $a_{n+1}=\sin a_n\leqslant a_n$,

所以 $\{a_n\}$ 为单调减数列,且有下界 a_1.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,记为 l,则由 $a_{n+1}=\sin a_n$ 两边

取极限得 $l=\sin l$,又 $l\in[0,1]$,所以 $l=0$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

由莱布尼兹定理知原级数收敛.

698.(武汉大学,2000年) 设 $y_{n+1}(x)=\psi(x)+\varphi(y_n(x))$, $y_0(x)\equiv y_0$, $x\in(-\infty,+\infty)$. y_0 满足 $\psi(x_0)=y_0-\varphi(y_0)$, $\psi(x)$ 是连续有界函数,φ 满足 *Lipschitz* 条件:

$|\varphi(y')-\varphi(y'')|\leqslant\alpha|y'-y''|,0<\alpha<1$.

证明:(1) $\{y_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛;

(2) 记 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)=y(x)$,则 $y(x)$ 连续,并且 $y(x_0)=y_0$;

(3) 若再加上 $\psi(x)$ 是一致连续的,则 $y(x)$ 也是一致连续的.

证 (1) 对任何自然数 p,由于

$|y_{n+p}(x)-y_n(x)|\leqslant|y_{n+p}(x)-y_{n+p-1}(x)|+\cdots+|y_{n+1}(x)-y_n(x)|$

$=|\varphi(y_{n+p-1}(x))-\varphi(y_{n+p-2}(x))|+\cdots|\varphi(y_n(x)-\varphi(y_{n-1}(x))|$

$\leqslant\alpha|y_{n+p-1}(x)-y_{n+p-2}(x)|+\cdots+\alpha|y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)|$

$\leqslant\cdots\cdots$

$\leqslant(\alpha^{n+p-1}+\alpha^{n+p-2}+\cdots+\alpha^n)|y_1(x)-y_0|$,

$\psi(x)$ 是连续有界函数,所以 $y_1(x)=\psi(x)-\varphi(y_0)$

也是连续有界的,从而 $y_1(x)-y_0$ 有界,即

$\exists M>0$,使得 $|y_1(x)-y_0|\leqslant M$, $y_x\in(-\infty,+\infty)$.

所以 $|y_{n+p}(x)-y_n(x)|\leqslant M(\alpha^{n+p+1}+\cdots+\alpha^n)$

$$<M\frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\log_\alpha\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{M}\right]$,当 $n>N$ 时,

$|y_{n+p}(x)-y_n(x)|<\varepsilon, x\in(-\infty,+\infty)$.

由柯西准则知 $\{y_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 任取 $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$,下证 $y_n(x)(n\in N)$ 在 $[a,b]$ 上连续.对 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$,由于

$$|y_n(x)-y_n(x_0)|=|\psi(x)+\varphi(y_{n-1}(x))-\psi(x_0)-\varphi(y_{n-1}(x_0))|$$
$$\leqslant|\psi(x)-\psi(x_0)|+|\varphi(y_{n-1}(x))-\varphi(y_{n-1}(x_0))|$$
$$\leqslant|\psi(x)-\psi(x_0)|+\alpha|y_{n-1}(x)-y_{n-1}(x_0)|$$
$$\leqslant\cdots\cdots$$
$$\leqslant\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}|\psi(x)-\psi(x_0)|+\alpha^{n-1}|\varphi(y_0(x))-\varphi(y_0)|$$
$$=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}|\psi(x)-\psi(x_0)|.$$

让 $x\to x_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}|y_n(x)-y_n(x_0)|\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=0$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}y_n(x)=y_n(x_0)$，亦即 $y_n(x)$ 在 x_0 处连续，

从而 $y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $y_n(x)\rightrightarrows y(x), x\in[a,b],(n\to+\infty)$，

故 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由 $[a,b]$ 的任意性知

$y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

又 $y(x_0)=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n(x_0)=\lim\limits_{n\to+\infty}(\psi(x_0)+\varphi(y_{n-1}(x_0)))$
$$=\psi(x_0)+\varphi(y(x_0))),$$

所以 $|y(x_0)-y_0|=|\psi(x_0)+\varphi(y(x_0))-\psi(x_0)-\varphi(y_0)|$
$$=|\varphi(y(x_0))-\varphi(y_0)|.$$
$$\leqslant\alpha|y(x_0)-y_0|,(0<\alpha<1).$$

故 $y(x_0)-y_0=0$，即 $y(x_0)=y_0$.

(3) 对 $y_{n+1}(x)=\psi(x)+\varphi(y_n(x)$ 两边关于 $n\to+\infty$ 取极限得

$y(x)=\psi(x)+\varphi(y(x))$.

$$|y(x_1)-y(x_2)|=|\psi(x_1)+\varphi(y(x_1))-\psi(x_2)-\varphi(y(x_2))|$$
$$\leqslant|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|-|\varphi(y(x_1))-\varphi(y(x_2))|$$
$$\leqslant|\psi(x_1)-\psi(x_2)|+\alpha|y(x_1)-y(x_2)|,$$

所以 $|y(x_1)-y(x_2)|\leqslant\frac{1}{1-\alpha}|\psi(x_1)-\psi(x_2)|$.

$\psi(x)$ 一致连续，故对 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，

$|\psi(x_1)-\varphi(x_2)|<(1-\alpha)\varepsilon$.

所以 $|y(x_1)-y_1(x_2)|<\frac{1}{1-\alpha}\cdot(1-\alpha)\varepsilon=\varepsilon$.

故 $y(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续.

699.（武汉大学，1992 年） 给定级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，

(1) 求它的和函数 $S(x)$；

(2) 证明广义积分$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x$收敛,并写出它的值.

解 (1) 考虑级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$,

显然$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$在$|x|<1$时收敛.

及$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$在$|x|<1$时收敛.

由逐次求导定理知

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

故$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)$.

所以$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}=-\frac{\ln(1-x)}{x}$.

(2)$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

700.(湖北大学,2001年) 设$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$是$[a,b]$上的单调函数,证明若$\sum u_n(a)$与$\sum u_n(b)$都绝对收敛,则级数$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上绝对收敛并且一致收敛.

证 不妨设$u_n(x)$单调增加,则$u_n(a)\leqslant u_n(x)\leqslant u_n(b)$

$|u_n(x)|\leqslant\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}\leqslant|u_n(a)|+|u_n(b)|$

而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(|u_n(a)|+|u_n(b)|)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n(a)|+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n(b)|$

$\because\sum u_n(a)$与$\sum u_n(b)$都绝对收敛

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(|u_n(a)|+|u_n(b)|)$收敛.

又由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$收敛并且一致收敛.

701.(湖北大学,2002年) 试问k为何值时,$f_n(x)=x\cdot n^k\cdot \mathrm{e}^{-nx}$在$0\leqslant x<+\infty$上一致收敛.

解 对每一个$x\in[0,+\infty)$,由于

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x\cdot n^k}{e^{nx}} = 0$$

故函数列的极限函数为 $f(x)=0$. 于是

$\sup|f_n(x)-f(x)| = \sup|n^k\cdot x\cdot e^{-nx}|$.

由于 $f'_n(x) = (x\cdot e^{-nx}\cdot n^k)' = n^k\cdot e^{-nx}\cdot(1-nx)$.

令 $f'_n(x)=0$ 解得 $x=\frac{1}{n}$,易知此为 $f_n(x)$ 的极大值点(也是最大值点),于是

$\sup|f_n(x)-f(x)| = \sup|n^k\cdot x\cdot e^{-nx}| = e^{-1}\cdot n^{k-1}$.

所以

当 $k<1$ 时, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|=0$,

即当 $k<1$ 时 $f_n(x)$ 一致收敛.

702.(华中理工大学)　设 $0\leqslant x<1$,证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x-x^2)^n}{2^{n+1}}.$$

证　$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2-3x+x^2}.$$

令　$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2, x\in[0,1)$,则 $0\leqslant f(x)<1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x-x^2)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2)}$$

$$=\frac{1}{2-3x+x^2}$$

故　$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x-x^2)^n}{2^{n+1}}.$$

703.(华中师范大学,2002年)　设 $f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x,y)$ 在闭区域 $D=\{a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b\}$ 上连续,对任何 $x\in[a,b]$,令

$f_n(x)=\int_a^x g(x,y)f_{n-1}(y)\mathrm{d}y, n=1,2,3\cdots\cdots$.

证明:函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零.

证　$f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故有界.即存在 $M_1>0$.

使得 $|f_0(x)|<M_1,(x\in[a,b])$.

同理存在 $M_2>0$,使得 $|g(x,y)|\leqslant M_2,((x,y)\in D)$.

$$|f_1(x)| = \left|\int_a^x g(x,y)f_0(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant M_1M_2(x-a) \leqslant M_1M_2(b-a),$$

$$|f_2(x)| = \left|\int_a^x g(x,y)\cdot f_1(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant M_2\cdot\int_a^x M_1M_2(y-a)\mathrm{d}$$

$$= \frac{M_1M_2^2(x-a)^2}{2} \leqslant \frac{M_1M_2^2(b-a)^2}{2!}.$$

………

如此继续下去,可得 $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{M_1M_2^n(x-a)^n}{n!} \leqslant \dfrac{M_1M_2^n(b-a)^n}{n!}$.

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{M_1M_2^n(b-a)^n}{n!}$ 收敛.

事实上,令 $a_n = \dfrac{M_1M_2^n(b-a)^n}{n!}$,则由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M_2(b-a)}{n+1} = 0$.

由达朗贝尔判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{M_1M_2^n(b-a)^n}{n!}$ 收敛.

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M_1M_2^n(b-a)^n}{n!} = 0$. 于是对 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时

有 $\dfrac{M_1M_2^n(b-a)^n}{n!} < \varepsilon$,

从而当 $n > N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$ 有

$|f_n(x)| \leqslant \dfrac{M_1M_2^n(b-a)^n}{n!} < \varepsilon$.

故 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零.

704.(北京师范大学,1998 年) 设 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n}\cos 2^n x$,求

$$\lim_{x\to 0+} x^{-1}(f(x)-f(0)).$$

解 $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1-(1-x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$, $(0 < x < 2)$.

$f(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n}$,

由 $|2^{-n}(\cos 2^n x - 1)| \leqslant 2\cdot 2^{-n}$ 知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|2^{-n}(\cos 2^n x - 1)|$ 收敛.

$x^{-1}(f(x)-f(0)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^n\cdot 2^{-n}(\cos 2^n x - 1)$.

令 $g(x) = x^{-1}(f(x)-f(0))$,

由 $|(1-x)^n\cdot 2^{-n}\cdot(\cos 2^n x - 1)| \leqslant 2\cdot 2^{-n}$, $(x\in[0,2])$.

知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n\cdot 2^{-n}(\cos 2^n x-1)$ 在[0,2]上一致收敛,故 $g(x)$ 在[0,2]上连续.

所以 $\lim\limits_{x\to 0+}x^{-1}(f(x)-f(0))=\lim\limits_{x\to 0+}\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n\cdot 2^{-n}\cdot(\cos 2^n x-1)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 0+}(1-x)^n\cdot(\cos 2^n x-1)$$
$$=0.$$

705.(吉林大学) 设 $0<x_1<\pi,x_n=\sin x_{n-1}(n=1,2,3\cdots\cdots)$,

证明 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$;

(2) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x_n^p$ 当 $p>2$ 时收敛,当 $p\leqslant 2$ 时发散.

证 (1) 显然 $x_n>0,x_n=\sin x_{n-1}<x_{n-1}$,

$\therefore\{x_n\}$ 是一个单调递减且有下界的数列,

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,则 $l=\sin l,\therefore l=0$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sin^2 x_n+1}-\dfrac{1}{\sin x^2 x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\dfrac{\sin^2 x_n\cdot\sin^2 x_{n+1}}{\sin^2 x_n-\sin^2 x_{n+1}}$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\sin x_n}\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin^2 t}{t^2-\sin^2 t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t\sin^2 t+2t^2\sin t\cos t}{2t-2\sin t\cos t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t+2t\sin t\cos t+2t\sin t\cos t+t^2\cos 2t}{1-\cos 2t}$$
$$=3.$$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin^2 x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{\sin^2 x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)-n}{\dfrac{1}{\sin^2 x_{n+1}}-\dfrac{1}{\sin^2 x_n}}=3$,(*Stolz* 公式).

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}^2}{\dfrac{1}{n}}\right)^{\frac{p}{2}}=3^{\frac{p}{2}}$.

故 $\sum_{n=0}^{\infty}x_{n+1}^p$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{p}{2}}$ 收敛性相同,

因为当 $P > 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{2}}$ 收敛，

当 $p \leqslant 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{2}}$ 发散.

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^p$ 当 $p > 2$ 时收敛，当 $p \leqslant 2$ 时发散.

706. 求数项级数 $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \cdots$ 的和.

解　令 $a_n = \frac{1}{3n-1}$ 则

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n. \qquad ①$$

根据莱布尼兹判别法知级数 ① 收敛. 设其和为

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \cdots$$

再令幂级数 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n x^{3n-1}$，　②

可求得收敛区间为 $(-1,1]$，再由阿贝尔第二定理可知

$S = \lim\limits_{x\to 1-0} s(x)$.

但 $s(0) = 0$，所以

$$s(x) = s(x) - s(0) = \int_0^x s'(t)\,dt \text{（当 } |x| < 1 \text{ 时）} \qquad ③$$

由 ②，利用逐项微分得

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{3n-2} = \frac{x}{1+x^3}. \qquad ④$$

将 ① 代入 ③

$$s(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^3}dt = -\frac{1}{3}\ln(1+x) + \frac{1}{6}\ln(1-x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore s = \lim_{x\to 1-0} s(x) = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi - \frac{1}{3}\ln 2.$$

707.（北京师范大学，2002 年）　设 $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$ 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，求证函数列 $\{f_n(x)\}$ 在任意有界闭区间 $[a,b]$ 内一致收敛.

证 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t$,

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b+1]$ 上一致连续，所以对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $x',x''\in[a,b+1]$, $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,

取 $N=\left[\frac{1}{\delta}\right]$, 当 $n>N$ 时

$$\left|\left(x+\frac{k}{n}\right)-(x+t)\right| = \left|\frac{k}{n}-t\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta,$$

故有 $\left|f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)\right|<\varepsilon$.

而 $$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(x+\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x+t)\mathrm{d}t,$$

因此 $\left|f_n(x)-\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right|$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(x+\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x+t)\mathrm{d}t\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right]\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right|\mathrm{d}t$$

$$<\varepsilon.$$

故 $f_n(x)\rightrightarrows\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t$ 于 $[a,b]$ 上.

708.(北京师范大学,1992 年) 证明:

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

证　由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛,故一致收敛.

对每一个 $x\in[0,1]$,显然 $\dfrac{x^n}{1+x^n}$ 是单调的且 $\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}\right|<1$,故由阿贝尔判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\dfrac{x^n}{1+x^n}$ 一致收敛.

所以 $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\dfrac{x^n}{1+x^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^n}{1+x^n}$

$=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

而对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$,由幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径为1,且 $x=1$ 时,幂级数 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 发散,

$x=-1$ 时,幂级数收敛.故幂级数为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=S(x)$,由逐项微分定理,对 $\forall x\in[-1,1)$,有

$$F(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

故　$S(x)=\int_0^x F(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-S(-1)=\ln2.$$

因此 $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\dfrac{x^n}{1+x^n}=\dfrac{1}{2}\ln2$.

709.(北京大学,2001年)　证明函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上无穷次可微.

证　(1) 先证 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上可微.任取 $x_0\in(1,+\infty)$,则 $\exists\,\delta>0$ 使得

$$1<1+\delta\leqslant x_0<x_0+2\delta<+\infty.$$

在 $[1+\delta,x_0+2\delta]$ 上,考察 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^x}\right)'=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^x}$.

由于 $0\leqslant\dfrac{\ln n}{n^x}\leqslant\dfrac{\ln n}{n^{1+\delta}}$, $x\in[1+\delta,x_0+2\delta]$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1+\frac{\delta}{2}}\cdot\dfrac{\ln n}{n^{1+\delta}}=0$.

由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{1+\delta}}$ 收敛，

从而函数项级数 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{x}}$ 在$[1+\delta,x_0+2\delta]$上一致收敛. 故函数 $f(x)$ 在$[1+\delta,x_0+2\delta]$上可微且

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{x}},$$

特别地 $f'(x_0)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{x_0}}$. 由 $x_0\in(1,+\infty)$ 的任意性，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上可微，且 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-\ln n}{n^{x}}$.

(2) 再证对任意自然数 k，均有

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\ln^{k}n}{n^{x}}.$$

事实上，当 $k=1$ 时，由(1)知结论成立.

假设 $m=k$ 时结论成立，则当 $m=k+1$ 时，

考察：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{k}\ln^{k}n}{n^{x}}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}\ln^{k+1}n}{n^{x}}$.

由于 $\left|\dfrac{(-1)^{k+1}\ln_n^{k+1}}{n^{x}}\right|\leqslant\dfrac{\ln_n^{k+1}}{n^{1+\delta}}$，$x\in[1+\delta,x_0+2\delta]$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1+\frac{\delta}{2}}\cdot\dfrac{\ln^{k+1}n}{n^{1+\delta}}=0$.

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^{k+1}n}{n^{1+\delta}}$ 收敛，从而函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{k}\ln_n^{k}}{n^{x}}\right)'$

在$[1+\delta,x_0+2\delta]$上一致收敛，故函数 $f^{(k)}(x)$ 在$[1+\delta,x_0+2\delta]$上可微，且

$$(f^{k}(x))'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\ln^{k}n}{n^{x}}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\ln^{k+1}n}{n^{x}}.$$

由以上证明知函数 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上无穷次可微.

710.(北京航空航天大学，2001 年)　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，

$f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=\int_x^1 f_n(t)\mathrm{d}t$，$\forall x\in[0,1]$，$n=-1,2,3\cdots\cdots$

求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一致收敛.

证　由 $f(x)$ 在[0,1] 在[0,1] 上连续知，$\exists M > 0$，使 $|f(x)| < M$，$(0 \leqslant x \leqslant 1)$，从而

$$|f_2(x)| = \left|\int_x^1 f_1(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M(1-x) \leqslant M,$$

$$|f_3(x)| = \left|\int_x^1 f_2(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M(1-x)^2}{2!} \leqslant \frac{M}{2!},$$

……………………………

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{M(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{M}{(n-1)!}.$$

又由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{M}{(n-1)!}$ 收敛.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上一致收敛.

711.（南开大学，1999 年）　设函数列 $\{f_n(x)\}$ 于区间 I 一致收敛于 $f(x)$，且存在数列 $\{a_n\}$ 使得当 $x \in I$ 时，总有 $|f_n(x)| \leqslant a_n$，证明 $f(x)$ 在 I 上有界.

证　由函数列 $\{f_n(x)\}$ 于区间 I 一致收敛于 $f(x)$ 知　存在 $n_0 > 0$，当 $n \geqslant n_0$ 时 $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 1, x \in I$，从而 $|f(x)| \leqslant f_{n_0}(x_0)| + 1 \leqslant a_{n_0} + 1, x \in I$，即 $f(x)$ 于 I 有界.

712.（厦门大学，2000 年）　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$ 在开区间 $(0,1)$ 一致收敛于 $f(x)$，且 $f(x)$ 具有连续导数.

证　由莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，从而一致收敛.

对 $\forall x \in (0,1)$　　$\frac{x^n}{1+x^n} \leqslant 1$ 有界，

对由阿贝尔判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛.

设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$，

令　$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$，显然 $u_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上具有连续导数，

$u'_n(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{(1+x^n)^2}$，下证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 一致收敛.

考虑其余项　$R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{(1+x^n)^2}$，

由于 $u'_n(x)$ 为交错级数，则

$$|R_n(x)| \leqslant |u'_{n+1}(x)| = \frac{x^n}{(1+x^{n+1})^2} < x^n,$$

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在$(0,1)$上一致收敛.

由以上知 $f(x)$ 在$(0,1)$上具有连续导数.

713.(厦门大学,2002 年) 证明:

(1) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$ 收敛;

(2) $\lim_{x\to 0+}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}}{(\ln n)^x} = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$.

证 (1) 当 $n \geqslant 3$ 时, $\sin\frac{1}{n} \geqslant 0$, 且 $\sin\frac{1}{n}$ 单调递减, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0,$$

由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$ 收敛.

(2) 对 $\forall x \in [0,+\infty)$, $\left|\frac{1}{(\ln n)^x}\right| \leqslant 1$.

再由(1)及阿贝尔判别法知

$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}}{(\ln n)^x}$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

所以
$$\lim_{x\to 0+}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}}{(\ln n)^x} = \sum_{n=3}^{\infty}\lim_{x\to 0+}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}}{(\ln n)^x} = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}.$$

714.(哈尔滨工业大学,1999 年) 设 $f_n(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数列, 且 $f_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$. 若 $x_n \in [a,b]$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0).$$

证
$$|f_n(x_n) - f(x_0)| = |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x_0)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)|,$$

因为 $f_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$,

所以对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时,

$|f_n(x_n)-f(x_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

由题意有 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

则 $\exists\delta>0$,当 $|x_n-x_0|<\delta$ 时 $|f(x_n)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 故

$\exists N_2>0$,当 $n>N_2$ 时 $|x_n-x_0|<\delta$,

则 当 $n>N_2$ 时 $|f(x_n)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,

$|f_n(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.

715.(复旦大学,1996 年) 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)4^n}$ 的绝对收敛,条件收敛和发散.

解 令 $a_n=\frac{1}{(n+1)4^n}$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{4}$.

所以当 $|x-1|<4$,即 $-3<x<5$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)\cdot 4^n}$ 绝对收敛.当 $x=5$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)\cdot 4^n}$ 发散,

当 $x=-3$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)\cdot 4^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n+1}$ 条件收敛.

当 $x<-3$ 或 $x>5$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)\cdot 4^n}$ 发散.

716.(云南大学) 设函数 $f(x,y)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上是连续的,而函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛并满足条件 $c\leqslant\varphi_n(x)\leqslant d$.证明:函数序列 $F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]$ $(n=1,2,\cdots)$ 也在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证 设 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$.

因为 $f(x,y)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上连续,从而一致连续所以对

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $|x_1-x_2|<\delta$, $|y_1-y_2|<\delta$,时

$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$.

对 δ,$\exists N>0$,当 $n>N$ 时 $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|<\delta$,

故对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,对 $\forall x\in[a,b]$,当 $n>N$ 时

$|F_n(x)-f(x,\varphi(x))|<\varepsilon$,

则$\{F_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.

717.(复旦大学,1996年) 设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{n}$,

求(1)f的连续范围;

(2)f的可导范围.

解 (1)对$\forall A>0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$收敛,从而关于$x$在$[0,A]$上一致收敛.

对$\forall x\in[0,A]$,$\forall n\in N$,$|e^{-nx}|\leqslant 1$,且$\{e^{-nx}\}$是单调的,

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{n}$在$[0,A]$上一致收敛.

则$f(x)$在$[0,A]$上连续.

由A的任意性知$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,

又$\forall x_0\in(-A,0)$,$A>0$则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{-nx_0}}{n}=+\infty$,

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx_0}}{n}$发散,

所以$[0,+\infty)$是f的连续范围.

(2)$\left((-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{n}\right)'_x=(-1)^n e^{-nx}$.

当$x=0$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-nx}$发散.

对$\forall[a,b]\subset(0,+\infty)$,$|(-1)^n e^{-nx}|\leqslant e^{-na}$,$(\forall x\in[a,b])$.

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-na}$收敛,

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$在$[a,b]$上一致收敛.则$f(x)$在$[a,b]$上可导.

由$[a,b]$的任意性知$f(x)$在$(0,+\infty)$上可导,即$f(x)$的可导范围是$(0,+\infty)$.

718.(北京航空航天大学,1999年) 设$f(x)\in C[0,a]$,

$$\begin{cases}f_1(x)=f(x),\\ f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt,\end{cases}n=1,2,3,\cdots;x\in[0,a].$$

证明函数列$\{f_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛.

证　$f(x)\in C[0,a]$,则 $f(x)$ 在$[0,a]$上有界,

即 $\exists M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M$.

$$|f_2(x)|=\left|\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^x M\mathrm{d}x=Mx\leqslant Ma.$$

$$|f_3(x)|=\left|\int_0^x f_2(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^x Mx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}Mx^2\leqslant\frac{1}{2}Ma^2,$$

………

$$|f_n(x)|=\left|\int_0^x f_{(n-1)}(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^x\frac{1}{(n-1)!}Mx^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}Mx^n\leqslant\frac{1}{n!}Ma^n,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{Ma^n}{n!}=0$.

故$\{f_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛于0.

719.(南京航空航天大学,1999年)

(1) 证明函数列$\left\{(1+\dfrac{x}{n})^n\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}$在 $x\in[0,1]$ 上对 n 单调增大;

(2) 证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+x)^n}{n^{n+1}}$在$[0,1]$上一致收敛.

证　(1)
$$\sqrt[n+1]{(1+\frac{x}{n})^n}=\sqrt[n+1]{(1+\frac{x}{n})^n\cdot 1}\leqslant\frac{n(1+\frac{x}{n})+1}{n+1}=1+\frac{x}{n+1},$$

即$(1+\dfrac{x}{n})^n<(1+\dfrac{x}{n+1})^{n+1}$.

所以函数列$\left\{(1+\dfrac{x}{n})^n\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}$在 $x\in[0,1]$ 上对 n 单调增大.

(2) 当 $x\in(0,1]$ 时,$(1+\dfrac{x}{n})^n\leqslant(1+\dfrac{1}{n})^n<\mathrm{e}$.

所以 $\forall x\in[0,1]$,数列$\left\{(1+\dfrac{x}{n})^n\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}$单调,且在$[0,1]$上一致有界.

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$收敛,从而一致收敛.

所以由阿贝尔判别法知原级数在$[0,1]$上一致收敛.

720.(北京科技大学,2001年)　设对一切自然数 $n=1,2\cdots$,$f_n(x)$在$[a,b]$上连续,且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛到 $f(x)$.证明:

(1) 存在 $M > 0$,使对一切自然数 $n = 1,2,\cdots$ 有 $|f_n(x)| \leqslant M$,且 $|f(x)| \leqslant M$;

(2) 若 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,则 $g(f_n(x))$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $g(f(x))$.

证 (1) $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故有界.

即 $\exists M_0 > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M_0$.又因为

$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

取 $\varepsilon = 1$, $\exists N > 0$,当 $n > N$ 时,

$|f_n(x) - f(x)| < 1$,

$|f_n(x)| < |f(x)| + 1 = M_0 + 1$.

$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故 $f_n(x)(n = 1,2\cdots,N)$ 有界.

设 $|f_1(x)| < M_1$, $|f_2(x)| < M_2$, ……, $|f_N(x)| < M_N$

令 $M = \max\{M_1, M_2, \cdots, M_N, M_0 + 1\}$

则 $|f_n(x)| < M$, $(n = 1,2,\cdots)$.

显然有 $|f(x)| < M$.

(2) 对 $\forall \varepsilon > 0$,由于 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,则

$\exists \delta > 0$,当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,

$|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$, ①

由 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$,对上述 $\delta > 0$, $\exists N > 0$,当 $n > N$ 时,有

$|f_n(x) - f(x)| < \delta$. ②

由 ①② 知,对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$,当 $n > N$ 时

$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$,

故 $g(f_n(x))$ 在 $[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $g(f(x))$.

721.(**上海交通大学,2000年**) 设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛,$\{f'_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界,证明:$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证 由题设 $\exists M > 0$,有

$|f'_n(x)| \leqslant M, \forall x \in [a,b]$, ①

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a,b]$,取 $x_0 \in [a,b]$ 使 $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{3M}$.则

$|f_n(x) - f_n(x_0)| = |f'_n(\xi)| \cdot |x - x_0| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{3}$. ②

$\because \{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛,所以 $\exists N > 0$,当 $n > N$, p 是任意自然数,有

$|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$. ③

由②,③,当 $n>N$ 时,对任意自然数 p,有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f_{n+p}(x_0)|+|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|$$
$$+|f_n(x_0)-f_n(x)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

即$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.

§3 幂级数

【考点综述】

一、综述

1.幂级数的收敛区域与收敛半径

(1) 阿贝尔第一定理　对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,

① 若此级数在 $x=x_0\neq0$ 点处收敛,则在 $|x|<|x_0|$ 的每一点处绝对收敛.

② 若此级数在 $x=\eta_0$ 点处发散,则在 $|x|>|\eta_0|$ 的每一点处发散.

(2) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$ 存在,则

① 当 $0<\rho<+\infty$ 时,幂级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$;

② 当 $\rho=0$ 时,幂级数的收敛半径为 $R=+\infty$;

③ 当 $\rho=+\infty$ 时,幂级数的收敛半径为 $R=0$.

(3) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R,如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$.

则 ① 当 $0<\rho<+\infty$ 时,$R=\frac{1}{\rho}$;

② 当 $\rho=0$ 时,$R=+\infty$;

③ 当 $\rho=+\infty$ 时,$R=0$.

2.幂级数的性质

(1) 阿贝尔第二定理　设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R>0$,则此幂级数在区间 $(-R,R)$ 内的任何闭区间上一致收敛.

(2) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R>0$.

① 若幂级数在右端点 $x = R$ 处收敛，则在$[0,R]$上一致收敛，其和函数 $S(x)$ 在 $x = R$ 点左连续；

② 若幂级数在左端点 $x = -R$ 处收敛，则在$[-R,0]$上一致收敛，其和函数 $S(x)$ 在 $x = -R$ 处右连续.

3. 幂级数和函数的解析性质

(1) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则

① 幂级数各项导数组成的新幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.的收敛半径为 R.

② 幂级数各项积分组成的新幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径为 R.

(2) 连续性　设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$ 和函数为 $S(x)$，则 $S(x)$ 在区间$[-R,R)$ 内每一点连续.

(3) 逐项微分　设幂级数的收敛半径为 $R > 0$ 和函数为 $S(x)$，则

①$S(x)$ 在收敛区间$(-R,R)$ 内其有连续的导函数且可逐项微分，即 $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

②$S(x)$ 在$(-R,R)$ 内具有任意阶连续的导数，且可逐项求导任意次，即 $S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x + \cdots\cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots\cdots$

$S''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \cdots\cdots + n(n-1)a_n x^{n-2},\cdots\cdots$

$S^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)(n-1)\cdots\cdots 3\cdot 2a_{n+1}x + \cdots\cdots$

……………………………………………………

③ 幂级数的系数 a_n 与和函数各阶导数之间的关系为 $a_0 = S(0)$，

$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!},(n = 1,2,\cdots\cdots)$.

(4) 逐项积分　设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$，和函数为 $S(x)$，则 $S(x)$ 在 0 与 x 的区间上可积($x \in (-R,R)$)，且可逐项积分，即

$$\int_0^x s(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n + 1.$$

4. 幂级数的展开

(1) 函数可展开或幂级数的条件

① 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点处具有任意阶导数，则 $f(x)$ 在 x_0 点可展开或幂级数的充要条件是：存在 $\delta > 0$，使对每个 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 都有

$\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}(0<\theta<1).$$

② 如果存在正数 M 和自然数 N,当 $n > N$ 时,对一切 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 都有 $|f^{(n)}(x)| \leqslant M^n$,则函数 $f(x)$ 在 x_0 点可展开或幂级数.

③ 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点可展开或幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$,即

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$,则幂级数的展开式是唯一的.

(2) 初等函数的幂级数展开式

①$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots\cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(x \in -\infty, +\infty)$;

②$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^2}{7!} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\cdots$

$(x \in (-\infty, +\infty))$;

③$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\cdots$

$(x \in (-\infty, +\infty))$;

④$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots\cdots(x \in (-1,1))$;

⑤$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{7}x^7 + \cdots\cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\cdots$

$(-1 < x < 1)$;

⑥$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \cdots\cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\frac{1}{2n+1} + \cdots\cdots(x \in (-1,1])$;

⑦$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots\cdots x \in (-1,1]$.

二、解题方法

1. 考点 1　求级数的收敛域,收敛半径及和

2. 考点 2　求级数的展开式

【经典题解】

722.(北京师范大学,2003 年)　写出 $e^{\sin x}$ 在 $x=0$ 点展开的 *Taylor* 级数的前五项系数,并指出该级数的收敛区域.

解　令 $f(x) = e^{\sin x}$,因为 $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1, f'''(0) = 0,$

$f^{(4)}(0) = -3, f^{(5)}(0) = -8$，则 $e^{\sin x}$ 在 $x = 0$ 点展开的台劳级数前5项为

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \cdots,$$

另外，由于 $e^{\sin x}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 收敛，因此该级数的收敛域为 $(-\infty, \infty)$.

723.（浙江大学，2001年） 求 $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 在 $x_0 = 0$ 处的 *Taylor* 级数，并求其收敛半径.

解 $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$= 1 - \frac{3}{2}(-x^2) + \frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)}{2!}(-x^2)^2 + \cdots\cdots + \frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)\cdots\cdots(-\frac{3}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n + \cdots\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} x^{2n}.$$

再求收敛半径，令 $a_n = \dfrac{(2n+1)!!}{n!} \cdot \dfrac{1}{2^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!!}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{n!2^n}{(2n+1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

即 $|x^2| < 1$，

所以 $|x| < 1$. 故级数收敛半径为1.

724.（华中理工大学） 指出使级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1 + \frac{1}{n} - n^2)(\frac{1-x}{1+x})^n$ 收敛的 x 所成的一个或几个区间.

解 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n} - n^2)} = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{e}$.

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n})^{-n^2} y^n$ 的收敛半径为 e.

当 $y = \pm e$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} |(1 + \frac{1}{n})^{-n^2}(\pm e)^n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{e}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant 1$.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n})^{-n^2} y^n$ 在 $y = \pm e$ 处不收敛.

解不等式 $-e < \dfrac{1-x}{1+x} < e$ 得 $x > \dfrac{1-e}{e+1}$ 或 $x < \dfrac{1+e}{1-e}$.

因此原级数的收敛区间为 $(-\infty, \frac{1+e}{1-e}) \cup (\frac{1-e}{1+e}, +\infty)$.

725.（北京大学，1998年） 解答下列问题：(1) 求幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{n}{e})^n x^n$ 的收敛半径.

(2) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$ 的和.

解 (1) 令 $a_n=\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{n}{e})^n$,则

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(\frac{n+1}{e})^{n+1}/\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{n}{e})^n\right|=\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}=1.$$

所以原幂级数的收敛半径为 1.

(2) 已知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$,故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2^n n}{n!}+\frac{2^n}{n!})=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

$$=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n!}==3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=3e^2.$$

726.(**华中师范大学**) 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}n2^{\frac{\pi}{2}}x^{3n-1}$ 的收敛区间与和函数.

解 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n\cdot 2^{\frac{\pi}{2}}}=1$,所以原级数的收敛区间为$(-1,1)$.

当 $x=\pm 1$ 时,$\lim_{n\to+\infty}|n2^{\frac{\pi}{2}}x^{3n-1}|=+\infty$.

所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}n2^{\frac{\pi}{2}}x^{3n-1}$ 的收敛域为$(-1,1)$.

记 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n2^{\frac{\pi}{2}}x^{3n-1}$,则

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n2^{\frac{\pi}{2}}t^{3n-1}dt=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}2^{\frac{\pi}{2}}x^{3n}$$

$$=\frac{2}{3}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^3}{1-x^3}.$$

所以 $S(x)=(\frac{2^{\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{x^3}{1-x^3})'=\frac{2^{\frac{\pi}{2}}x^2}{(1-x^3)^2},x\in(-1,1)$.

727.(**内蒙古大学**) 指出下列无穷级数,无穷积分的值.

(1)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$;(2)$\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t}at$;(3)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$

解 (1) 由 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots\cdots x\in$

$[-1,1]$，知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln(1+1)=-\ln 2$.

(2) $\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}dt=\Gamma(\frac{3}{2})$.

$\Gamma(\frac{3}{2})=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(3) 见第 725 题(2).

728.（北京大学，1999 年） 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{3^n}\cdot 2^n$ 的和.

解 当 $|x|<1$ 时，$(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$

所以
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}nx^n&=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'-\sum_{n=0}^{\infty}x^n.\\&=(\frac{x}{1-x})'-\frac{1}{1-x}\\&=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}\\&=\frac{x}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}\cdot 2^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(\frac{2}{3})^n=\frac{\frac{2}{3}}{(1-\frac{2}{3})^2}=6.$$

729.（厦门大学，2000 年） 利用数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 计算积分

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx.$$

解 注意到 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},x\in(-1,1]$,

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^1\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}}{x}dx.\\&=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

730.（北京大学，1996 年） (1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}(|x|<1)$ 的和;

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$ 的和.

解 (1)$(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}(|x|<1)$,又 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{x}{1-x}$.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} = (\frac{x}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}, (|x|<1)$.

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{2}$.

731.(武汉大学,1999年) 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n(n+1)}x^n$ 的收敛区域.

解 令 $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n(n+1)}$,则 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$.

故原级数的收敛半径为 1/e,收敛区间为$(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$时,

当 $x = \pm\frac{1}{e}$ 时,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|(1+\frac{1}{n})^{n(n+1)}(\pm\frac{1}{e})^n\right| = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{e}\right]^n \geqslant 1.$$

所以当 $x = \pm\frac{1}{e}$ 时,原级数不收敛.

因此原级数的收敛域为$(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

732.(北京航天航空大学) 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$.

求证:当 $0<x<1$ 时有 $f(x)+f(1-x)+(\ln x)[\ln(1-x)] = \frac{\pi^2}{6}$.

证 易知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 的上敛域为$[-1,1]$.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续.

令 $F(x) = f(x)+f(1-x)+(\ln x)[\ln(1-x)]$.

则 $F(x)$ 在$(0,1)$上连续.

$$F'(x) = f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}.$$

$$\text{又 } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t}dt = \frac{-\ln(1-x)}{x}.$$

$$f'(1-x) = \frac{-\ln[1-(1-x)]}{1-x} = -\frac{\ln x}{1-x}.$$

所以 $F'(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln x}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}=0.$

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上为常数.

又 $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=f(1)+f(0)+\lim\limits_{x\to1^-}(\ln x)[\ln(1-x)]$

$=\frac{\pi^2}{6}+\lim\limits_{x\to1^-}(\ln x)[\ln(1-x)]$

利用罗必塔法则易得 $\lim\limits_{x\to1^-}(\ln x)[\ln(1-x)]=0.$

所以 $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=\frac{\pi^2}{6}.$

故 $F(x)=\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=\frac{\pi^2}{6},x\in(0,1).$

733.(山东大学) 试求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},-1<x<1;$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1},-1<x<1.$

解 (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的收敛区间为 $(-1,1)$,所以 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4},(-1<x<1).$

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\int_0^x\frac{1}{1-t^4}dt=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$

$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x.(-1<x<1)$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}$ 的收敛区间为 $(-1,1)$

所以 $\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)t^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+2)t^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n,(-1<x<1).$

又 $\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x},(-1<x<1).$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$

$\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)t^{n-1}dt=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x}.$

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}=\left[\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x}\right]'=\frac{3-x}{(1-x)^3},(-1<x<1).$

734.(内蒙古大学)　对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\ln n}{n}x^n$.

(1) 求出收敛半径;

(2) 讨论在收敛区间端点上的收敛性;

(3) 指出在什么样的区间上级数一致收敛.

解　(1) $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}\ln(n+1)}{n+1}}{\frac{2^n\ln n}{n}}\right| = 2$.所以该级数的收敛半径 $R=\frac{1}{2}$.

(2) 当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\ln n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\ln n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散.

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\ln n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\ln n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$,

由莱布尼兹判别法易知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n\frac{\ln n}{n}$ 收敛.

(3) 由(1)、(2) 知原幂级数的收敛域为$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,所以在区间 $\left[-\frac{1}{2},a\right]$(其中 $a<\frac{1}{2}$) 上原幂级数一致收敛.

735.(中国科技大学)　证明:$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)}!$,满足 $y^{(4)}=y$.

证　易证 $y(x)$ 的各阶导数满足逐项可微定理,所以

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n}}{(4n)!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!},$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right),=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}$$

$$y'''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

$$y^{(4)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=y(x).$$

736.(四川师范学院)　求极限 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$.

解　$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$

$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k![1+k+1+(k+1)(k+2)]}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!(k+2)}$.

考试幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+2}}{k!(k+2)}=y(x)$.

易证其满足逐项可微定理,所以

$$y'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^{k+2}}{k!(k+2)}\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k!}=x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=x(e^x-1).$$

$$y(x)=\int_0^x t(e^t-1)dt$$

$$=xe^x-e^x-\frac{1}{2}x^2+1.$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=y(1)=\frac{1}{2}.$

737.(武汉大学,1996 年) 给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-x)^n$.证明

(1) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

(2) 此级数的收敛域为 $(-1,1]$

(3) 在 $(-1,1]$ 上此级数不一致收敛.

证 (1) 由于 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$,

因此 $\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2<\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{2n+1}$,

即 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

(2) 令 $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,则

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=1,$$

所以此级数的收敛半径为 1,收敛区间为 $(-1,1)$,当 $x=1$ 时,由莱布尼兹判别法知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n \text{ 收敛};$$

当 $x=-1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}[-(-1)]^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

所以给定级数的收敛域为 $(-1,1]$.

(3) $\sup\limits_{x\in(-1,1]}|R_n(x)|\geqslant\left|R_n\left(-\frac{n}{n+1}\right)\right|=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$

$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}\cdot\frac{1}{2k}(\frac{n}{n+1})^n \geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2k}(\frac{n}{n+1})^n \geqslant$

$[\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}+\cdots\cdots+\frac{1}{4n}](\frac{n}{n+1})^n \geqslant \frac{1}{2}(\frac{n}{n+1})^n.$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in(-1,1]}|R_n(x)| \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{2e} > 0$

故原级数在$(-1,1]$上不一致收敛.

738.(北京航空航天大学,2001年)　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解:令 $x^2=t, a_n=(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}$.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=1, \therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}t^n$ 的收敛半径为1.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}\cdot x^{2n}$ 的收敛半径为1.

又当 $x=\pm1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}\cdot x^{2n}$ 发散, $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}\cdot x^{2n}$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}=\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}$,

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$ 的和函数为 $\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}, (-1<x<1)$.

739.(天津大学,1998年)　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n}x^n$ 的收敛域.

解　记 $a_n=\frac{3^n+2^n}{n}$,则 $\frac{3^n}{n}<a_n<2\cdot3^n$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}=3=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2\cdot3^n}$,

由夹逼原则知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=3$.

$\therefore$ 原幂级数的收敛区间为$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$,当 $x=-\frac{1}{3}$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n}x^n=$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n}\cdot(-\frac{1}{3})^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{3})^n$,

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{3})^n$,

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{3})^n$ 都收敛.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n}\cdot x^n$ 收敛.

当 $x=\frac{1}{3}$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{3})^n$,

显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n}\cdot x^n$ 发散.

$\therefore$ 原幂级数的收敛域为$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

740.（西北大学） 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot x^{n-1}$ 的和.

解 记 $a_n=n^2$，则 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$.

收敛半径 $R=1$，收敛域为$(-1,1)$，而$(\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot x^{n-1}$，又 $(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})'-\sum_{n=1}^{\infty}x^n=(\frac{x^2}{1-x})'-\frac{x}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2}$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot x^{n-1}=(\frac{x}{(1-x)^2})'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$，$(|x|<1)$

741.（武汉大学，1994年） 给定幂级数$\frac{x^2}{2\cdot1}+\frac{x^3}{3\cdot2}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n(n-1)}+\cdots\cdots$

(1) 确定它的收敛半径与收敛区间；

(2) 求出它的和函数 $S(x)$.

解 (1) 对幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$，

由 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{n(n-1)}=1$，

知其收敛半径为 1，收敛区间为$(-1,1)$.

当 $x=\pm1$ 时，级数均收敛，故其收敛域为$[-1,1]$.

(2) 由逐项微分定理 $s'(x)=(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)})'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}$，$s''(x)$

$=(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1})'=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x}$.

故$s'(x)=\int_0^x s''(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)$，$s(x)=\int_0^x s'(t)\mathrm{d}t=$

$\int_0^x-\ln(1-t)\mathrm{d}t$

$$s(x)=\int_0^x s'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x-\ln(1-t)\mathrm{d}t$$

$$=-t\ln(1-t)\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1-t}\mathrm{d}t$$

$$= -t\ln(1-t)\Big|_0^x + \int_0^x dt + \int_0^x \frac{1}{1-t}d(1-t)$$
$$= -x\ln(1-x) + x + \ln(1-x).$$

742.（华中理工大学，2000年）　展开 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{1-x})^n$ 为 x 的幂级数.

解　显然 $|\frac{x}{1-x}| < 1$，（否则，$f(x)$ 将不存在），得 $x < \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{1-x})^n = \frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{2x}.$$

又 $\frac{x}{1-2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1-2x} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n, (-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2})$.

故得 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n, (-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2})$.

743.（南京航空学院）　求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n}}{n+1}$.

解　考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

其收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$，当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ 收敛；当 $x=1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，因此其收敛域为 $[-1,1)$. 设其和函数为 $s(x)$，则 $\forall x \in (-1,1)$，

$\int_0^x s(t)dt = \int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{t^n}{n+1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$. 于是：$s(x) = (\frac{x}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$.

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n}}{n+1} = s(e^{-1}) = \frac{e^2}{(e^{-1})^2}$.

744. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n}$ 的收敛半径.

解　令 $x^2 = t$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}t^n$，

因为 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}/\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$.

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}t^n$ 的收敛半径为 2，

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{2}$.

745.(中国人民大学,1999年) 设 $x>0$,求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{\ln n}}$ 的收敛域.

解 由于 $x^{\ln n}=e^{\ln x\ln n}=(e^{\ln n})^{\ln x}=n^{\ln x}$.

所以当 $\ln x>1$,即 $x>e$ 时,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{\ln n}}$ 收敛.

故函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{\ln n}}$ 收敛域为$(e,+\infty)$.

746.(北京航空航天大学,2000年) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 的收敛域及其和函数.

解 令 $a_n=n$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$.

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 的收敛域为$(0,2)$.

当 $x=0$ 或 2 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 发散,

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 的收敛域为$(0,2)$

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}$,

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_1^x s(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_1^x n(t-1)^{n-1}dt$.

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=\frac{x-1}{2-x}$.

$\therefore s(x)=(\int_0^x s(t)dt)'=\frac{1}{(x-2)^2}$.

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n=\frac{x-1}{(x-2)^2},\forall x\in(0,2)$.

747.求函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式.

解 因为 $f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots\cdots$$

而 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$

$=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$

其中 $|x|<1$.

748.（北京大学，2002年） 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\cos\frac{1}{n}$ 的收敛性并给出证明.

解 由于 $0<\cos\frac{1}{n}<1$.

故 $\ln\cos\frac{1}{n}<0$,

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{2\cos x}=-\frac{1}{2}$,

∴ 由归结原则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-\ln\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$.

因此由正项级数的比较判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}(-\ln\cos\frac{1}{n})$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\cos\frac{1}{n}$ 也收敛.

749.（复旦大学，1999年） 讨论级数收敛和发散：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-5)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$.

解 (1) ∵ $0<n^2\sin\frac{\pi}{2^n}\leqslant\frac{\pi n^2}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi n^2}{2^n}}{\frac{1}{n^2}}=0$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，∴ $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-5)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(6k-8)}{(2k-1)^2}\cdot(-1)^{k+1}$.

当 k 充分大时，$\frac{6k-8}{(2k-1)^2}$ 随着 k 的增大而减小，且 $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{6k-8}{(2k-1)^2}=0$.

由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-5)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$ 收敛.

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(3n-5)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6k-8}{(2k-1)^2}$,

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\dfrac{6k-8}{(2k-1)^2}}{\dfrac{1}{k}}=\frac{3}{2},\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\text{ 发散.}$$

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{6k-8}{(2k-1)^2}$ 发散，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(3n-5)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\right|$ 发散.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n-5)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$ 条件收敛.

750.（哈尔滨工业大学，1999 年） 设 $M_n>0,(n=1,2\cdots\cdots)$，且对所有 n，成立 $\dfrac{M_{n+1}}{M_n}\geqslant 1-\dfrac{1}{n}$.

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 发散.

证 $\because \dfrac{M_{n+1}}{M_n}\geqslant 1-\dfrac{1}{n}$，

$\therefore M_{n+1}\cdot n\geqslant M_n(n-1)$.

$\therefore$ 数列 $\{M_{n+1}\cdot n\}$ 单调递增.

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}M_{n+1}\cdot n=+\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty}M_{n+1}\cdot n=A$，（$A$ 为一常数）.

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M_{n+1}}{\frac{1}{n}}=+\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M_{n+1}}{\frac{1}{n}}=A$.

$\because \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 发散，

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 发散.

751.（第三届全国大学生数学夏令营） 试求无穷级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\dfrac{1}{n^2+n+1}$ 的和.

解 由 $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$

知 $\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}n=\tan^{-1}\dfrac{1}{1+n(n+1)}=\tan^{-1}\dfrac{1}{n^2+n+1}$

$$\text{从而}\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{n^2+n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}[\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}n]$$
$$=\lim_{n\to+\infty}[\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}1]$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{4}.$$

752.(中国人民大学,2000 年)　若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是发散的正项级数,则存在收敛于 0 的正数序列 $(C_n)_{n=1}^{\infty}$,使 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n a_n$ 发散.

证　$\because \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是发散的正项级数,

$\therefore$ 对任意给定的 n,只要取 m 充分大,就有 $\frac{S_n}{S_m} < \frac{1}{2}$,(其中 S_n 为前 n 项之和)

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}\right| = \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} + \cdots\cdots + \frac{a_m}{s_m} \geqslant \frac{S_m - S_n}{S_m} > \frac{1}{2}.$$

由柯西准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ 发散.

又 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n} = 0$,

故存在 $C_n = \frac{1}{s_n}$,满足条件.

753.(哈尔滨工业大学,2000 年)　已知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证　根据阿贝尔引理的一般形式,对任意的自然数 P 考虑

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant \max\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| \cdot \left(|a_{n+p}| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}|\right) \qquad ①$$

(1) 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当 $n > N$ 时,对任何自然数 P,有 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon$.

(2) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛,设 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| = B$,从而对任意的自然数 n 有,$\sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| \leqslant B$.并且由于 $\sum_{k=1}^{n+p-1}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+p} - a_1$,从而 $|a_{n+p}| \leqslant |a_1| + \sum_{k=1}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k| \leqslant |a_1| + B$.

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| + \sum_{k=1}^{n} |a_k - a_{k+1}| \leqslant 2B.$$

根据 ① 式,对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当 $n > N$ 时,对任何自然数 P 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant \varepsilon(|a_1| + 3B).$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性及柯西准则知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

754.(中国人民大学,2001 年) 令 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$,

$n=1,2\cdots\cdots$,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛.

证 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})\geqslant 1$, $\therefore a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n}-a_n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-a_n^2}{a_n}\leqslant 0$,

即 $a_{n+1}\leqslant a_n$.

由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在.

又因为 $0\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\leqslant a_n-a_{n+1}$.

且 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛.

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛.

755.(华中理工大学,1997 年) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^n\theta$ 的敛散性,并求其和函数.

解 当 $|\sin\theta|<1$ 时, $|\frac{1}{n}\sin^n\theta|\leqslant|\sin^n\theta|$.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^n\theta$ 绝对收敛.

当 $\sin\theta=1$,即 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^n\theta$ 发散;

当 $\sin\theta=-1$,即 $\theta=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^n\theta$ 条件收敛.

令 $s(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^n\theta$,

当 $\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时, $s'(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{n-1}\theta\cos\theta=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$.

又 $s(0)=0$,

故 $s(\theta)=\int_0^{\theta}\frac{\cos x}{1-\sin x}\mathrm{d}x=-\ln(1-\sin\theta)$.

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^n\theta$ 的和函数为 $-\ln(1-\sin\theta)$, $(\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z)$.

756.(北京科技大学,2001 年) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{n\cdot 3^{n+1}}$ 的收敛域与和函数.

解 令 $t=\frac{(x+2)^2}{3}$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{n\cdot 3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^n}{3n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{3n}\right|}=1$,

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^n}{3n}$ 的收敛半径为1,当 $t=1$ 时,由莱布尼兹判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^n}{3n}$ 收敛.

又 $t\geqslant 0$,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{3n}$ 的收敛域为[0,1].

由 $0\leqslant\frac{(x+2)^2}{3}=t\leqslant 1$ 得 $-2-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -2+\sqrt{3}$.

所以原级数的收敛域为$[-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}]$.

令 $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{3n}$,则 $f'(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n-1}}{3}=-\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-t)^{n-1}$ $=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+t}$,$f(t)=\int_0^t-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}dx=-\frac{1}{3}\ln(1+t)$.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{n\cdot 3^{n+1}}=-\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{(x+2)^2}{3}\right)$,

$(x\in[-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}])$.

757.(北京航空航天大学,1999年) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

解 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$,

故收敛半径 $R=1$,且当 $x=\pm 1$ 时的级数均收敛,所以级数的收敛域为[-1,1].

令 $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$,则 $F'(x)=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$F''(x)=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$,

故 $F'(x)=\int_0^x F''(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$,

$$\begin{aligned}F(x)=\int_0^x F'(t)dt&=\int_0^x-\ln(1-t)dt\\&=-x\ln(1-x)-x-\ln(1-x)\\&=-(x+1)\ln(1-x)-x.\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}-\frac{(x+1)\ln(1-x)+x}{x}, & x\in[-1,1]\text{ 且 }x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

758.(北京航空航天大学,1999年) 设$f(x)$在$x\geqslant 1$非负,单调递减,求证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n)-\int_{n}^{n+1}f(x)\mathrm{d}x]$收敛.

证 $f(x)$在$x\geqslant 1$时非负单调递减.

所以$0\leqslant f(n)-\int_{n}^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(n)-f(n+1)$.

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f(n)-f(n+1))=f(1)$,收敛

由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(x)-\int_{n}^{n+1}f(x)\mathrm{d}x]$收敛.

759.(北京科技大学,1999年) 求幂级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$的和函数.

解 易知原级数的收敛域为$[-1,1]$

记$F(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$,

则$F'(x)=\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n\right)'=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n(n-1)x^n}\right)'=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1}$,

$$F''(x)=\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^{n-2}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-x)^{n-2}=\frac{1}{1+x}.$$

故$F'(x)=\int_0^x F''(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\ln(1+x)$;

$F(x)=\int_0^x F'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t=(1+x)\ln(1+x)-x$.

所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n=(1+x)\ln(1+x)-x,(x\in[-1,1])$.

§4 傅里叶级数

【考点综述】

一、综述

1. 正交函数系 函数列$\{f_n(x)\}$定义在区间$[a,b]$上,每个$f_n(x)$在$[a,b]$上可积且不恒为零,若函数列$\{f_n(x)\}$中任意两个不同的函数$f_n(x)$和$f_m(x)$,有$\int_a^b f_n(x)f_m(x)\mathrm{d}x=0$,则称函数列$\{f_n(x)\}$为$[a,b]$上的正交函数系.

2. 三角函数系

$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\cdots$ 是$[-\pi,\pi]$上的正交函数系.

3. 若三角级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ①

在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)$,则$\forall x\in[-\pi,\pi]$,

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 并且

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x(n=0,1,2\cdots\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots\cdots)$$

则称 a_n,b_n 为函数$f(x)$的傅里叶(*Fourier*)系数,而称三角级数①为$f(x)$的傅里叶级数.

4. 收敛定理　设$f(x)$是以2π为周期的$[-\pi,\pi]$上按段光滑的函数,则$f(x)$的傅里叶级数在$(-\infty,+\infty)$上的每一点x处都收敛于$f(x)$在点x的左右极限的算术平均值,即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

其中 a_n,b_n 为$f(x)$的傅里叶系数.

5. 偶函数的傅里叶级数　设$f(x)$是以2π为周期的偶函数,或是定义在$[-\pi,\pi]$上的偶函数,则$f(x)$的傅里叶系数.

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\cdot(n=0,1,2\cdots\cdots),b_n=0(n=1,2,\cdots\cdots)$.从而$f(x)$的傅里叶级数只含余弦函数的项

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx. \quad ②$$

级数②称为余弦级数.

6. 奇函数的傅里叶级数　设$f(x)$是以2π为周期的奇函数,或是定义在$[-\pi,\pi]$上的奇函数,则$f(x)$的傅里叶系数

$$a_n=0(n=0,1,2\cdots\cdots),b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x(n=1,2\cdots\cdots)$$

从而$f(x)$的傅里叶级数只含正弦级数的项

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx \quad ③$$

级数③称为正弦级数

7. 周期为$2l$的函数的傅里叶级数　设$f(x)$是以$2l$为周期的$[-l,l]$上按段光滑的函数,则对$\forall x\in[-l,l]$,均有

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l})+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,(n=0,1,2\cdots\cdots)$ ④

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,(n=1,2,\cdots\cdots)$ ⑤

8.逐项积分　设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上按段连续，若 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

则对 $[-\pi,\pi]$ 的任意实数 a,x，有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x\frac{a_0}{2}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t.$$

9.逐项微分　设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，$f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑，且 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

则对任何实数 x，有

$$\frac{f'(x+0)+f'(x-0)}{2}=(\frac{a_0}{2})'+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)'.$$

10.一致收敛定理　若 $f(x)$ 以 2π 为周期的连续函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对收敛，且一致收敛于 $f(x)$.

11.求傅里叶级数的一般步骤

(1) 按照系数公式 ④,⑤ 计算系数，

(2) 将算出的系数代入级数 ①，

(3) 由收敛定理，判断级数的和函数

$$s(x)=\begin{cases}f(x),\text{当 } x\in(a,b) \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点}\\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},\text{当 } x\in(a,b) \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点},\\ \frac{f(a+0)+f(b-0)}{2},\text{当 } x=a,b \text{ 时}\end{cases}$$

12.展成正弦级数(余弦级数)，则首先需对 $f(x)$ 作奇延拓(偶延拓)再按照 5、6 中公式依照 11 中步骤展开.

二、解题方法

1.考点 1　求傅里叶级数

2.考点 2　傅里叶级数的性质

【经典题解】

760.(上海科技大学)　将下图所示的周期函数展开为傅里叶系数.

解　图中所示的函数为$f(x)=\begin{cases}x,0\leqslant x\leqslant\pi\\ \pi,\pi<x<2\pi,\end{cases}$并且以$2\pi$为周期，于是有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\pi\mathrm{d}x\right)=\frac{3}{2}\pi.$$

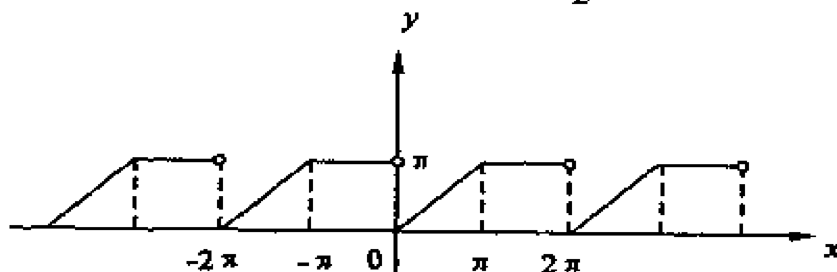
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\pi\cos nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n-1](n=1,2,\cdots\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\pi\sin nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{x}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x+\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$=-\frac{1}{n\pi}\pi(-1)^n-\frac{1}{n}[1-(-1)^n]$$
$$=-\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots\cdots).$$

由收敛定理，对$\forall x\in(0,2\pi)$有

$$f(x)=\frac{3}{4}\pi-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

在$x=0$和$x=2\pi$处，其傅里叶级数收敛于$\frac{1}{2}[f(0+0)+f(0-0)]=\frac{\pi}{2}$.



第760题

761.(北京邮电学院)　给出函数$f(x)=\begin{cases}x,(-1\leqslant x<0),\\ x+1,(0<x\leqslant 1).\end{cases}$

(1) 画出函数$f(x)$的图形；

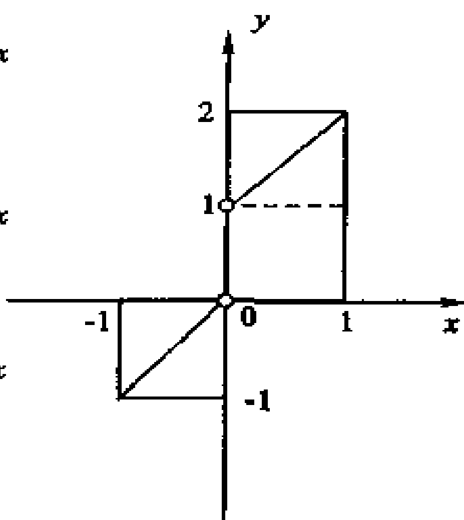
(2) 求$f(x)$的傅里叶级数；

(3) 画出傅里叶级数和函数的图形；

(4) 说明函数$f(x)$在哪些点上能够展开为傅里叶级数.

解　(1)$f(x)$的图形如下.

(2) 将$f(x)$以2为周期延拓，则



第 761 题(1) 图

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(x+1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}+(\frac{1}{2}x^2+x)\Big|_{0}^{1}=1.$$

$$a_n=\int_{-1}^{0}x\cos n\pi x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(x+1)\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{1}\cos n\pi x\mathrm{d}x=0,(n=1,2,\cdots\cdots)$$

$$b_n=\int_{-1}^{0}x\sin n\pi x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(x+1)\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{1}x\sin n\pi x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(x+1)\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{1}(2x+1)\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n\pi}(1-3(-1)^n),n=1,2,\cdots\cdots.$$

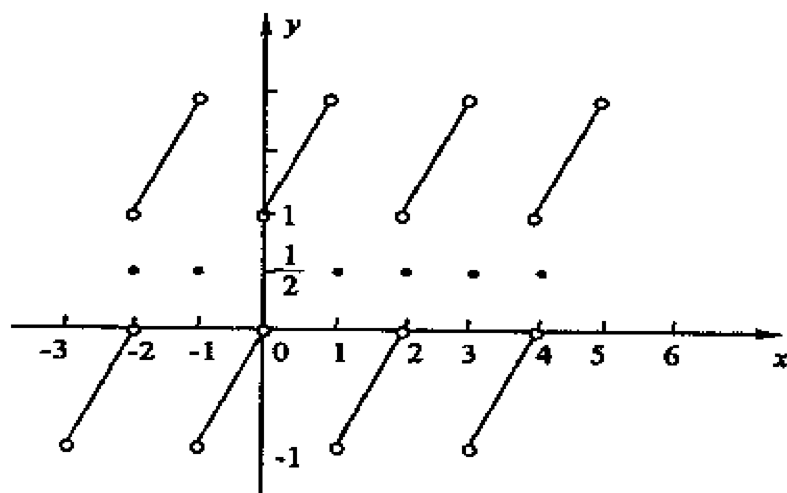
故 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1-3(-1)^n]\sin n\pi x.$$

由收敛定理知上述级数收敛于

$$s(x)=\begin{cases}f(x),x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ \frac{1}{2},x=0,\\ \frac{1}{2},x=\pm 1.\end{cases}$$

(3) $s(x)$ 的图形如下:



第 761(3) 题图

(4) 当 $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$ 时,$f(x)$ 能展成傅里叶级数.

762.(长沙铁道学院) 试求 $f(x) = x + x^2$ 在 $-\pi < x < \pi$ 上的傅里叶级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

解 将 $f(x)$ 作周期为 2π 的延拓,则

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2 + x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2 + x)\cos nx\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2 + x)\sin nx\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

故由收敛定理,对 $\forall x \in (-\pi,\pi)$,

$$x^2 + x = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx.$$

当 $x = \pm\pi$ 时,其傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(\pi + 0) + f(-\pi - 0)] = \pi^2$.

令 $x = \pi$,即有 $\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

763.(复旦大学) (1) 试讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-(n-1)x}$ 关于 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 是否一致收敛;

(2) 设函数 f 的周期为 2π,且 $f(x) = (\frac{\pi - x}{2})^2, 0 < x \leqslant 2\pi$,试利用 f 的 *Fourier* 展开计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和数.

解 (1) $\forall N > 0, \exists n_0 > N$,取 $p_0 = n_0 + 1, x_0 = \frac{1}{n_0}$,则

$$\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p_0} x\mathrm{e}^{-(n-1)x}\right| = \left|\frac{1}{n_0}\mathrm{e}^{-(n_0-1)\frac{1}{n_0}} + \frac{1}{n_0}\mathrm{e}^{-n_0\frac{1}{n_0}} + \cdots\cdots + \frac{1}{n_0}\mathrm{e}^{-2n_0\frac{1}{n_0}}\right|$$

$$\geqslant \frac{n_0 + 2}{n_0}\mathrm{e}^{-2} > \frac{1}{\mathrm{e}^2},$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-(n-1)x}$ 关于 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 不一致收敛.

(2) *Fourier* 系数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\pi - x}{2})^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\pi - x}{2})^2\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}, (n = 1,2,\cdots\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\pi - x}{2})^2\sin nx\mathrm{d}x = 0, (n = 1,2\cdots\cdots)$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续，由收敛定理知对 $\forall x\in(0,2\pi)$，有

$$f(x)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

在端点 $x=0$ 和 $x=2\pi$ 处，其傅里叶级数收敛于

$$\frac{f(2\pi-0)+f(0+0)}{2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

令 $x=2\pi$，有 $\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

764.（北京大学，2000 年，湖南大学）　在区间 $(0,2\pi)$ 内展开 $f(x)$ 的 *Fourier* 级数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$.

解　将 $f(x)$ 延拓成以 2π 为周期函数，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{\pi-x}{2n\pi}\sin nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{x-\pi}{2n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n},$$

$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$

故 $\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$，$(x\in(0,2\pi))$.

当 $x=0,2\pi$ 时，上述级数收敛于 0.

765.（湘潭大学）　将函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x,0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0,-\frac{\pi}{2}\leqslant x<0\end{cases}$$

，在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上展开为傅氏级数，并指出傅氏级数所收敛的函数.

解　$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos\frac{n\pi x}{\pi/2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+4n^2}[(-1)^n e^{\frac{\pi}{2}}-1],$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin\frac{n\pi x}{\pi/2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin 2nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{4n}{1+4n^2}[(-1)^{n+1}e^{\frac{\pi}{2}}+1]$$

故 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的傅氏级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx)$

$$= \frac{1}{\pi}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n e^{\frac{\pi}{2}}-1]}{1+4n^2}\cos 2nx$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n[(-1)^{n+1}e^{\frac{\pi}{2}}+1]}{1+4n^2}\sin 2nx.$$

由收敛定理知,它收敛于

$$S(x)=\begin{cases} e^x, 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ 0, -\frac{\pi}{2}<x<0, \\ \frac{1}{2}, x=0, \\ \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}, x=\frac{\pi}{2} \text{ 及 } x=-\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

766.(中山大学) 把函数 $f(x)=\begin{cases} x, x\in[0,\pi), \\ 2, x\in[-\pi,0] \end{cases}$ 展开成 *Fourier*(傅立叶)级数.

解 将 $f(x)$ 延拓成以 2π 为周期的按段光滑函数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2dx+\int_0^{\pi}xdx\right)=2+\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\cos nxdx+\int_0^{\pi}x\cos nxdx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\sin nxdx+\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n\pi}(2-\pi)-\frac{2}{n}.$$

故 $f(x)$ 的 *Fourier* 级数为 $1+\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1)\cos nx+(\frac{(-1)^n}{n\pi}(2-\pi)-\frac{2}{n})\sin nx]$

由收敛定理知它收敛于

$$s(x)=\begin{cases}x, x\in[0,\pi),\\ 2, x\in[-\pi,0),\\ 1, x=0,\\ \dfrac{2+\pi}{2}, x=\pm\pi.\end{cases}$$

767.(哈尔滨工业大学) 试将周期函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 展为傅里叶级数.

解 由于 $f(x+2\pi)=f(x)$,因此 $f(x)$ 的周期为 2π,它在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可以表示为

$$f(x)=\begin{cases}-\pi-x, x\in[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}),\\ x, x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}],\\ \pi-x, x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi].\end{cases}$$

又 $f(-x)=\arcsin(\sin(-x))=\arcsin(-\sin x)$
$=-\arcsin(\sin x)=-f(x)$.

故 $f(x)$ 是奇函数,于是有 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

当 $n=2k$ 时,$b_n=0$,当 $n=2k+1$ 时,$b_n=(-1)^k\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$,
$(k=0,1,2\cdots\cdots)$

而 $f(x)$ 为连续函数,故有

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x,(x\in(-\infty,+\infty)).$$

768.(北京大学,2001年) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数,且 $f(x)=x,-\pi<x<\pi$,求 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 的 *Fourier* 级数,它们的 *Fourier* 级数是否一致收敛(给出证明)?

解 将函数 $f(x)$ 延拓到整个数轴上,由于 $f(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 上的按段光滑的奇函数,故其中 Fourier 展开式是正弦级数.

$a_n=0(n=0,1,2,\cdots\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

所以当 $x \in (-\pi,\pi)$ 时，有 $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

当 $x = \pm\pi$ 时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(\pi+0)+f(\pi-0)] = 0$.

$$|f(x)| = \begin{cases} x, x \in [0,\pi) \\ -x, x \in (-\pi,0). \end{cases}$$

将 $|f(x)|$ 延拓到整个数轴上，由于 $f(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 上的按段光滑的偶函数，故其 *Fourier* 展式是余弦级数.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1).$$

所以当 $x \in (-\pi,\pi)$ 时，有 $|f(x)| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1)\cos nx$.

当 $x = \pm\pi$ 时，级数收敛于

$\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(\pi-0)] = \pi$.

$f(x)$ 的 *Fourier* 级数在 $(-\pi,\pi)$ 内非一致收敛. 因为在端点 $x = \pm\pi$ 处级数收敛，假若级数在 $(-\pi,\pi)$ 内一致收敛，则级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛，和函数应在 $[0,\pi]$ 上连续，矛盾. 而由一致收敛定理易知 $|f(x)|$ 的 *Fourier* 级数在 $(-\pi,\pi)$ 上一致收敛.

769.（西北工业大学） 将函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, \frac{\pi}{2} \leqslant |x| \leqslant \pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 为偶函数，故 $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$,

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2})$,

$b_n = 0, (n = 1,2,3\cdots\cdots)$.

故由收敛定理，对 $\forall x \in (-\pi,\pi)$, $x \neq \pm\pi$ 且 $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2})\cos nx$.

当 $x = \pm\frac{\pi}{2}$ 时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(\frac{\pi}{2}+0)+f(\frac{\pi}{2}-0)] = \frac{\pi}{4}$.

当 $x = \pm\pi$ 时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(\pi+0)+f(\pi-0)] = 0$.

770.(华南工学院) 展开函数 $f(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\0,\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 为正弦级数，并指出当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，此级数之和.

解　将 $f(x)$ 作以 2π 为周期的奇延拓，

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0,\\0,\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,-\pi\leqslant x<-\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

$a_n=0(n=0,1,2\cdots\cdots)$.

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}(1-\cos\frac{n\pi}{2}).(n=1,2,3\cdots\cdots)$.故对 $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，上述级数收敛于 $\frac{1}{2}$.

771.(华中理工大学,2000年)　在 $[0,\pi]$ 上展开 $f(x)=x+\cos x$ 为余弦级数.

解　将 $f(x)=x+\cos x$ 延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数.

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}x+\cos x,x\in[0,\pi],\\-x+\cos x,x\in[-\pi,0].\end{cases}$$

则 $b_n=0,(n=1,2,\cdots\cdots)$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos x)\mathrm{d}x=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}1-\frac{4}{\pi},n=1,\\\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2},n>1.\end{cases}$$

由收敛定理，对 $\forall x\in[0,\pi)$.

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+(1-\frac{4}{\pi})\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\cos nx.$$

在点 $x=\pi$ 处，其傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[\tilde{f}(\pi+0)+\tilde{f}(\pi-0)]=\pi-1.$$

772.(国防科技大学) 将函数 $f(x)=x(0<x<2)$ 展成余弦级数.

解 将 $f(x)=x$ 延拓为 $(-2,2)$ 上的偶函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}x, x\in(0,2),\\ -x, x\in(-2,0].\end{cases}$$

$$a_0=\int_0^2 x\mathrm{d}x=2,$$

$$a_n=\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1].(n=1,2,\cdots\cdots),$$

故对 $\forall x\in(0,2)$ 有 $f(x)=x=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\cos\frac{n\pi x}{2}$.

当 $x=0$ 时,级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(0+0)+f(0-0)]=0$.

当 $x=2$ 时,级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(2+0)+f(2-0)]=1$.

773.(西南石油学院) 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

解 将 $f(x)=3x^2-6\pi x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 作偶延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上,再在 $[-\pi,\pi]$ 外作周期延拓,于是 $b_n=0(n=1,2,\cdots\cdots)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2-6\pi x)\mathrm{d}x=-4\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2-6\pi x)\cos nx\mathrm{d}x.$$

$$=\frac{12}{n\pi}[-\frac{1}{n}(x-\pi)\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{12}{n^2}(n=1,2,3,\cdots\cdots).$$

故 $3x^2-6\pi x=-\frac{4\pi^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n^2}\cos nx(0\leqslant x\leqslant\pi)$,

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)$.

774.(天津大学) 已知函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}\frac{e^x+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$,

(1) 在 $[-\pi,\pi]$ 上将 $f(x)$ 展为傅里叶级数;

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}$ 的和.

解 (1) $f(x)=f(-x)$, $f(x)$ 为偶函数,故 $b_n=0(n=1,2,\cdots\cdots)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\frac{e^x+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\mathrm{d}x=1.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\frac{e^x+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cos nx\mathrm{d}x.$$

$$= \frac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}} \left[\int_0^{\pi} e^{x} \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} e^{-x} \cos nx \, dx \right]$$

$$= \frac{\cos n\pi}{1 + n^2} = \frac{(-1)^n}{1 + n^2} (n = 1, 2, \cdots\cdots).$$

又 $\frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)] = f(\pi - 0) = f(\pi) = f(-\pi)$,

故在 $[-\pi, \pi]$ 上, $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} \cos nx$. ①

(2) 在 ① 式中令 $x = \frac{\pi}{2}$, 得

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{1 + (2n)^2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + (2n)^2},$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + (2n)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$.

775.(合肥工业大学,西北师范大学) 已知周期为 2π 的连续函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 $a_n, b_n (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ 试计算磨光函数 $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi$ 的傅里叶系数 $A_n, B_n (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$, 其中 h 为给定的正常数.

解 由于 $f_h(x + 2\pi) = \frac{1}{2h} \int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(\xi) d\xi$.

$$= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\eta + 2\pi) d\eta = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\eta) d\eta$$

$$= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi = f_h(x).$$

所以 $f_h(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 下求 $f_n(x)$ 的傅里叶系数, 令 $\xi = x + t$, 则

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_h(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \int_{-h}^{h} f(x + t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi h} \int_{-h}^{h} dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \cos nx \, dx.$$

令 $x = y - t$, 注意到 $f(y) \cos n(y - t)$ 以 2π 为周期, 有

$$A_n = \frac{1}{2\pi h} \int_{-h}^{h} dt \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos n(y - t) dy$$

$$= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} dt \, \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) (\cos ny \cos nt + \sin ny \sin nt) dy$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}[a_n\cos nt + b_n\sin nt]\mathrm{d}t.$$

$$= \frac{a_n}{h}\int_0^h \cos nt\mathrm{d}t = \begin{cases} a_n, n = 0, \\ \dfrac{a_n\sin nh}{nh}, n = 1,2,3,\cdots\cdots \end{cases}$$

同理可得 $B_n = \dfrac{b_n\sin nh}{nh}, n = 1,2,3,\cdots\cdots$.

776.(哈尔滨工业大学)　设 $f(x)$ 为以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数，a_0，a_n 和 $b_n(n = 1,2,\cdots\cdots)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶系数.

(1) 试求 $f(x+h)$ 的傅里叶系数，(其中 h 为常数)；

(2) 令 $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot f(x+t)\mathrm{d}t$，求函数 $F(x)$ 的傅里叶系数，并利用所得结果证明巴塞瓦(*Parseval*)等式：

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

解　(1) 设 $f(x+h)$ 的傅里叶系数为 $\overline{a_0}$，$\overline{a_n}$ 和 $\overline{b_n}(n = 1,2,\cdots\cdots)$

$$\overline{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-h)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)(\cos nt\cos nh + \sin nt\sin nh)\mathrm{d}t$$

$$= \cos nh\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos nt\mathrm{d}t + \sin nh\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\sin nt\mathrm{d}t$$

$$= \cos nh\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}t + \sin nh\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t$$

$$= a_n\cos nh + b_n\sin nh,$$

即 $\overline{a_0} = a_0, \overline{a_n} = a_n\cos nh + b_n\sin nh(n = 1,2,\cdots\cdots)$，

同理 $\overline{b_n} = b_n\cos nh - a_n\sin nh(n = 1,2,\cdots\cdots)$.

(2) 设 $F(x)$ 的傅里叶系数为 A_n，B_n，易知 $F(x)$ 是以 2π 为周期的函数。因为 $f(x)$ 连续，所以由含参变量积分性质知，$F(x)$ 是连续函数，又

$$F(-x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(-x+t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y)\cdot f(y)\mathrm{d}y$$

故 $F(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，从而 $F(x)$ 的傅里叶系数

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0(n = 1,2\cdots\cdots)$$

另外,根据含参变量积分的积分顺序可交换定理,令 $x+t=u$ 可得

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\mathrm{d}u$$
$$=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\right)^2=a_0^2.$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x.$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\cos n(u-t)\mathrm{d}u\right]f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos nt\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\cos nu\mathrm{d}u+\sin nt\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\sin nu\mathrm{d}u\right]f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nt f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nt f(t)\mathrm{d}t$$
$$=a_n^2+b_n^2,(n=1,2,\cdots\cdots).$$

由 $F(x)$ 的连续性和收敛定理得

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx,$$

或 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx.$

取 $x=0$,则得 *Parseval* 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

注:由此题易得,若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,则有 *Parseval* 等式成立:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

Parseval 等式在许多解题中有重要应用.

第八章　多元函数微分学

§1　多元函数的极限与连续

【内容综述】

一、综述

1. 平面点集与多元函数

(1) 任意一点 A 与任意点集 E 的关系.

(i) 内点　若存在点 A 的某邻域 $U(A)$,使得 $U(A)\subset E$,则称点 A 是点集 E 的内点.

(ii) 外点　若存在点 A 的某邻域 $U(A)$,使得 $U(A)\cap E=\phi$,则称点 A 是点集 E 的外点.

(iii) 界点　若在点 A 的任何邻域内既含有属于 E 的点,又含有不属于 E 的点,则称点 A 是集合 E 的界点.

(iv) 聚点　若在点 A 的任何空心邻域 $U^{o}(A)$ 内部都含有 E 中的点,则称点 A 是 E 的聚点.

(v) 孤立点　若点 $A\in E$,但不是 E 的聚点,则称点 A 是 E 的孤立点.

(2) 几种特殊的平面点集.

(i) 开集　若平面点集 E 所属的每一点都是 E 的内点,则称 E 为开集.

(ii) 闭集　若平面点集 E 的所有聚点都属于 E,则称 E 为闭集.

(iii) 开域　若非空开集 E 具有连通性,即 E 中任意两点之间都可用一条完全含于 E 的有限折线相连接,则称 E 为开域.

(iv) 闭域　开域连同其边界所成的点集称为闭域.

(v) 区域　开域、闭域或者开域连同某一部分界点所成的点集,统称为区域.

(3) R^2 上的完备性定理.

(i) 点列收敛定义:设 $\{P_n\}\subset R^2$ 为平面点列,$P_0\in R^2$ 为一固定点.若对任给的正数 ε,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,有 $P_n\in U(P_0,\varepsilon)$,则称点列 $\{P_n\}$ 收敛于点 P_0,记作

$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ 或 $P_n \to P_0, (n \to \infty)$.

(ii) 点列收敛定理(柯西准则)　平面点列 $\{P_n\}$ 收敛的充要条件是:任给正数 ε,存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,对一切自然数 k,都有 $\rho(P_n, P_{n+k}) < \varepsilon$.

(iii) 闭域套定理.设 $\{D_n\}$ 是 R^2 中的闭域列,它满足:

(i) $D_n \supset D_{n+1}, n = 1,2,\cdots$;

(ii) $d_n = d(D_n), \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

则存在唯一的点 $P_0 \in D_n, n = 1,2,\cdots$.

(iv) 聚点定理　设 $E \subset R^2$ 为有界无限点集,则 E 在 R^2 中至少有一个聚点.

(v) 推论　有界无限点列 $\{P_n\} \subset R^2$ 必存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}$.

(vi) 有限覆盖定理　设 $D \subset R^2$ 为一有界闭域,$\{\Delta\alpha\}$ 为一开域族,它覆盖了 D(即 $D \subset \bigcup\limits_{\alpha} \Delta_\alpha$),则在 $\{\Delta_\alpha\}$ 中必存在有限个开域 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m$,它们同样覆盖了 D(即 $D \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Delta_i$).

(4) 二元函数

定义:设平面点集 $D \subset R^2$,若按照某对应法则 f,D 中每一点 $P(x,y)$ 都有唯一确定的实数 z 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的二元函数(或称 f 为 D 到 R 的一个映射),记作

$$f: D \to R,$$
$$P \mapsto z,$$

且称 D 为 f 的定义域,$P \in D$ 所对应的 z 为 f 在点 P 的函数值,记作 $z = f(P)$ 或 $z = f(x,y)$.(注:其它多元函数与二元函数相似).

2. 二元函数的极限.

(1) 定义　设 f 为定义在 $D \subset R^2$ 上的二元函数,P_0 为 D 的一个聚点,A 是一个确定的实数,若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,使 $P \in U^\circ(P_0, \delta) \cap D$ 时,都有

$$|f(P) - A| < \varepsilon.$$

则称 f 在 D 上当 $P \to P_0$ 时,以 A 为极限,记作 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P) = A$.有时简记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = A$.

当 P、P_0 分别用 (x,y),(x_0,y_0) 表示时,上式也写作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

(2) 重要定理及推论.

(i) $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A$ 的充要条件:对于 D 的任一子集 E,只要 P_0 是 E 的聚点就有 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=A$.

(ii) 设 $E_1\subset D$, P_0 是 E_1 的聚点,若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E_1}}f(P)$ 不存在,则 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$ 也不存在.

(iii) 设 E_1、$E_2\subset D$, P_0 是它们的聚点.若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E_1}}f(P)=A_1$, $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E_2}}f(P)=A_2$,但 $A_1\neq A_2$,则 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(p)$ 不存在.

(iv) 极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$ 存在的充要条件是:对于 D 中任一满足条件 $P_n\neq P_0$ 的点列 $\{P_n\}$,它所对应的函数列 $\{f(P_n)\}$ 都收敛.

(3) 二元函数函极限的四则运算.

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}g(x,y)=B$.则

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)\pm g(x,y)]=A\pm B$;

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)g(x,y)=A\cdot B$;

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{A}{B}$, $(B\neq 0)$.

(4) 累次极限.

(i) 定义:对于函数 $f(x,y)$.若固定 $y\neq y_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$ 存在,且 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$ 也存在,则称 A 为 $f(x,y)$ 在 $P_0=(x_0,y_0)$ 处先对 x 后对 y 的累次极限,记为 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$.类似可定义 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$.

(ii) 重要定理及推论.

(A) 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$(或 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$)都存在,则它们相等.

(B) 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 都存在,则三者相等.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 都存在但不相等,则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 不存在.

3. 二元函数的连续性

(1) 定义　设 f 为定义在点集 $D \subset R^2$ 上的二元函数，$P_0 \in D$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，只要 $P \in U(P_0,\delta) \cap D$，就有

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon,$$

则称 f 关于集合 D 在点 P_0 连续. 若 f 在 D 上任何点都连续，则称 f 为 D 上的连续函数. 若 $\lim\limits_{y \to y_0}[f(x_0,y) - f(x_0,y_0)] = 0$，则称 $f(x,y)$ 在 $P_0 = (x_0,y_0)$ 处关于 y 连续. 同理可定义关于 x 连续.

(2) 复合函数的连续性定理　设二元函数 $u = \varphi(x,y)$ 和 $v = \psi(x,y)$ 在 $P_0 = (x_0,y_0)$ 点连续，函数 $z = f(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 连续，其中 $u_0 = \varphi(x_0,y_0)$，$v_0 = \psi(x_0,y_0)$，则复合函数 $z = f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 P_0 连续.

(3) 有界闭域上连续函数的性质.

① 设函数 f 在有界闭域 $D \subset R^2$ 上连续，则 f 在 D 上有界，且能取得最大值与最小值.

② 若函数 f 在有界闭域 $D \subset R^2$ 上连续，则 f 在 D 上一致连续.

③ 设函数 f 在闭域 $D \subset R^2$ 上连续，$\forall P_1$、$P_2 \in D$，且 $f(P_1) < f(P_2)$，则对任何满足不等式

$$f(P_1) < \mu < f(P_2)$$

的实数 M，必存在点 $P_0 \in D$，使得 $f(P_0) = \mu$.

二、解题方法

1. 考点 1　平面点集的关系

解题方法：(1) 利用概念(见下苗第 779 题)；(2) 反证法(见下面第 778 题)；(3) 建立一个数学模型(见下面第 780 题).

2. 考点 2　求二元函数的定义域，值.

解题方法：(1) 解不等式组(见下面第 781 题)；(2) 用特殊点求二元函数(见下面第 781 题)；(3) 利用整体变量求二元函数(见下面第 781 题).

3. 考点 3　求二元函数的极根

解题方法　(1) 定义法(见下面第 785 题)；(2) 变量替换法(见下面第 789 题)；(3) 放缩法与两边夹法则(见下面第 786 题)；(4) 用累次极限(见下面第 787 题).

4. 考点 4　讨论二元函数的连续性及连续函数的性质

解题方法：(1) 定义法(见下面第 791 题)；(2) 利用已知连续函数的性质(见下面第 792 题)；(3) 反证法(见下面第 793 题).

【经典题解】

777. (浙江大学，2001 年)　设 $f(x,y)$ 为二元函数，在 (x_0,y_0) 附近有定

义.试讨论二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 之间的关系.

解 (1) 二重极限与累次极限之间没有必然的关系.因为

1) 两个累次极限都存在,且相等时,二重极限还可能不存在.比如:

$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

则 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)=0$

但 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx}} f(x,y)=\dfrac{k}{1+k^2}$

这个极限与 k 有关. ∴ 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

2) 二重极限存在,可能累次极限不存在.比如:

$f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}$,

则 $\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right|\leqslant|x|+|y|$,

从而可证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

但 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 都不存在.

(2) 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 都存在,则它们一定相等.

(3) 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$,$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 三者都存在,则三者必然相等.

778.(华东师范大学,1999 年) 设 $S\subset R^2$,$P_0(x_0,y_0)$ 为 S 的内点,$P_1(x_1,y_1)$ 为 S 的外点.证明:直线段 P_0P_1 必与 S 的边界 ∂S 至少有一交点.

证 (用反证法)令 $P_0=A_1$,$P_1=B_1$,取 A_1,B_1 的中点 C.若 C 为界点,则证毕。否则 A_1 与 C 或 C 与 B_1 中,一定有一外一内,不妨记为 A_2、B_2,再取 A_2、B_2 的中点 D,类似可证,A_3、B_3 仍为一外一内.这样继续下去,可得

$A_1,B_1;A_2,B_2;\cdots A_n,B_n;\cdots$ 且 $\overline{A_nB_n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}\overline{A_1B_1}$

∴ 存在 E 使 E 在 $\overline{A_nB_n}$ 上 $(n=1,2,\cdots)$ 且

$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=E=\lim\limits_{n\to\infty}B_n$

E 为界点,证毕.

779. 设 A、$B\subseteq R^2$,为有界闭集,$A\cap B=\phi$,试证:∃ 开集 W、V,使得 $A\subseteq W$,$B\subseteq V$,且 $W\cap V=\phi$.

证 ∵ A、B 为有界闭集,$A\cap B=\phi$,

∴ $\rho(A,B)=a$ 且 $a>0$.

令 $W = \{P \mid P \in R^2, \rho(P,A) < \frac{a}{4}\}$

$V = \{P \mid P \in R^2, \rho(P,B) < \frac{a}{4}\}$

显然 $A \subseteq W, B \subseteq V$

W、V 为开集.

$$\rho(W,B) \geqslant \rho(A,B) - \rho(W,A) \geqslant \frac{3a}{4}$$

$$\therefore \rho(W,V) \geqslant \rho(W,B) - \rho(V,B) \geqslant \frac{a}{2}$$

$\therefore W \cap V = \phi$.

780. 证明有限覆盖定理.

证　用反证法.假设有界区域 D 没有有限覆盖.因为 D 有界,存在一个闭正方形 R_1,使 $D \subset R_1$.设 R_1 的边长为 l,则 $d(R_1) = \sqrt{2}l$.将 R_1 分为四个相等的正方形,至少有一闭正方形 R_2 包含于集 D_1 没有有限覆盖且 $d(R_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}l$.如此无限进行下去,得一列闭正方形区域 R_1、R_2,…,满足条件:1) $R_1 \supset R_2 \supset \cdots R_n \supset \cdots$;2) $\lim\limits_{n\to\infty} d(R_n) = 0$.

每个 R_n 中所包含 D 的子集 D_{n-1} 没有有限覆盖.

由闭区域套定理,存在唯一一点 $P \in R_n (n = 1,2,\cdots)$. $P \in D$.则存在一个开区域 G,使 $P \in G$.也存在 $U(P,r)$,使 $U(P,r) \subset G$.当 n 无限大之后.

$D_{n-1} \subset R_n \subset U(P,r) \subset G$,从而得到矛盾.

∴ 假设不成立.

∴ 要证成立.

781. 填空:

(1) 函数 $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ 的定义域是______,它是______区域;

(2) 函数 $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ 的定义域是______;

(3) 函数 $z = \arcsin(x^2 - y^2) + \ln[\ln(10 - x^2 - 4y^2)]$ 的定义域是______;(西安交通大学)

(4) 二元函数 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 的定义域是______;

(5) 函数 $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{(\ln(4-x^2-y^2)}$ 的定义域是______.

答　(1) $\{(x,y) \mid x+y>0, x-y>0\}$,无界开区域;

(2) $\{(x,y,z) \mid x>0, y>0, z>0\}$;

(3) 椭圆$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{(\frac{3}{2})^2}=1$与抛物线 $x=y^2+1$ 及 $x=y^2-1$ 所围的区域;

(4) $\{(x,y)\mid x\geqslant 0, 0\leqslant y\leqslant x^2\}$;

(5) $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<4, x^2+y^2\neq 3\}$.

782. 若函数 $z=f(x,y)$ 恒满足关系式

$f(tx,ty)=t^kf(x,y)$.

则此函数称为 k 次齐次函数,下列函数为二次齐次函数的是(　　)

A. $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}$

B. $f(x,y)=x^2-y^2+x+y$

C. $f(xy,x+y)=x^2+y^2+xy$

D. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

答　A.　A 答案中的函数满足

$$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-tx\cdot ty\cdot\tan\frac{tx}{ty}==t^2(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y})$$
$$==t^2f(x,y)$$

C 答案中函数可写成

$f(xy,x+y)=(x+y)^2-xy$,

$\therefore f(x,y)=y^2-x$,它不是二次齐次函数.

783.(哈尔滨工业大学,大连轻工业学院)

已知 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$

解　设 $u=x+y, v=\frac{y}{x}$,则 $x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$.

$$\therefore f(u,v)=(\frac{u}{1+v})=(\frac{u}{1+v})^2-(\frac{uv}{1+v})^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$

$$\therefore f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}.$$

784.(北京航空学院)　设 $z=x+y+f(x-y)$,若当 $y=0$ 时 $z=x^2$,求函数 f 及 z.

解　当 $y=0$ 时,$z=x^2$,代入原式,得

$f(x)=x^2-x$,

$\therefore f(x-y)=(x-y)^2-(x-y)$.

$\therefore z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2$.

785.(北京航空航天大学,2000 年) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=?$

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$,所以

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}x^2e^{-(x+y)}=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x}\cdot\lim_{y\to+\infty}e^{-y}=0.$$

同理 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}y^2e^{-(x+y)}=0$

$\therefore\ \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0.$

786.(南京工学院)设

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & 当\ xy\neq0,\\ 0, & 当\ xy=0.\end{cases}$$

试讨论下面三种极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$;

(3) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$.

解 由于 $\sin\dfrac{1}{y}$ 和 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $y=0$ 和 $x=0$ 的函数极限不存在,故在 $(0,0)$ 点的两个累次极限 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 都不存在.

$\because 0\leqslant|f(x,y)|\leqslant|x|+|y|$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|x|+|y|=0$

$\therefore\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0.$

787.(西北轻工业学院) 求

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$(若极限不存在,说明理由).

解 因 $\dfrac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}=\dfrac{xy(\sqrt{x+y+1}+1)}{x+y}$

当 (x,y) 沿曲线 $y=-x+kx^2(k\neq0)$ 趋于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=-x+kx^2\to0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x(-x+kx^2)}{kx^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1+kx}{k}==-\frac{1}{k}.$$

k 取不同的值,上极限有不同的结果,所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在,而

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt{x+y+1}+1)=2$存在，故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$不存在.

788.（华中理工大学） 问极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$是否存在？并说明理由.

解 令(x,y)沿直线$y=kx$趋于$(0,0)$，得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+x^2(1-k)^2}$$

当$k=1$时，上式极限为1；

当$k\neq1$时，上式极限为零，故

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$不存在.

注：易知$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$.这表明一二元函数的二累次极限存在，其重极限不一定存在；反之，也成立，如上面第777题.

789.（南京大学） 设$f(x,y)$是区域$D:|x|\leqslant1,|y|\leqslant1$上的有界$k$次齐次函数($k\geqslant1$)，问极限

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}[f(x,y)+(x-1)e^y]$$

是否存在？若存在，试求其值.

解 令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$.由于$f(x,y)$是区域$D$上的有界$k$次齐次函数

$$\because |f(x,y)|=|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|=r^k|f(\cos\theta,\sin\theta)|$$
$$\leqslant r^kM.\quad (M>0)$$

$\because \lim\limits_{r\to0}r^kM=0.$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{r\to0}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=0$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}[f(x,y)+(x-1)e^y]=-1.$

790.（辽宁大学） Ω为R^2中的开集，$(x_0,y_0)\in\Omega$，$f(x,y)$为Ω上的函数，且

(1) 对每个$(x,y)\in\Omega$的x存在$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=g(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=h(y)$，关于$(x,y)\in\Omega$中的$y$一致.

试证：$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$.

证　由条件②,得

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0. \forall x_1, x_2 \in \Omega,$

当 $0 < |x_1 - x_2| < \delta_1, 0 < |y_1 - y_0| < \delta$ 时

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon \quad ①$$

在①式两边令 $y \to y_0$,则

$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 存在. 令 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.

由条件2),得 $\exists \delta_2 > 0$. 当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时

$$|h(y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad ②$$

由条件1),得 $\exists \delta_3 > 0$. 当 $0 < |y - y_0| < \delta_3$ 时

$$|f(x, y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad ③$$

由 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$,得 $\exists \delta_4 > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta_4$ 时

$$|g(x) - a| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad ④$$

取 $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3, \delta_4\}$,当 $0 < |x - x_0| < \delta, 0 < |y - y_0| < \delta$ 时

$|h(y) - a| < \varepsilon,$

$\therefore \lim\limits_{y \to y_0} h(y) = a,$

即 $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = a = \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y).$

791.(北京大学,1998年)　设 $f(x, y)$ 在 $G = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$ 上有定义,若 $f(x, 0)$ 在点 $x = 0$ 处连续,且 $f_y'(x, y)$ 在 G 上有界,则 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

证　由中值定理,得

$f(x, y) - f(x, 0) = f_y'(x, \xi)(y - 0)$(其中 $\xi \in (0, y)$)

由 $f_y'(x, y)$ 在 G 上有界,知 $\exists M > 0$,使 $|f_y'(x, y)| \leqslant M$.

$\therefore \forall \varepsilon > 0$,取 $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{2M}$　当 $|y - 0| < \delta_1$ 时有

$$|f(x, y) - f(x, 0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad ①$$

由 $f(x, 0)$ 在点 $x = 0$ 处连续,知 $\exists \delta_2 > 0$,当 $|x - 0| < \delta_2$ 时,有

$$|f(x, 0) - f(0, 0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad ②$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,当 $|x - 0| < \delta, |y - 0| < \delta$ 时,由①、②,得

$|f(x, y) - f(0, 0)| \leqslant |f(x, y) - f(x, 0| + |f(x, 0) - f(0, 0)| < \varepsilon.$

$\therefore f(x,y)$ 在$(0,0)$处连续.

792.〔陕西师范大学〕 若 $f(x,y)$ 分别是单变量 x 及 y 的连续函数,又对其中一个变量是单调的,则 $f(x,y)$ 是二元连续函数.

证 不妨令 $f(x,y)$ 对 y 是单调递增的.(x_0,y_0) 为定义域中的任意一点.由题意,有

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$,当 $|y - y_0| \leqslant \delta_1$ 时,有

$$|f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad ①$$

又由于对 x 的连续性,故 $\exists \delta_2 > 0$,当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时,有

$$|f(x,y_0 - \delta_1) - f(x_0,y_0 - \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad ②$$

$$|f(x,y_0 + \delta_1) - f(x_0,y_0 + \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad ③$$

由①,②,③,因此令 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$,则

当 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ 时,有

$f(x,y) - f(x_0,y_0) \leqslant f(x,y_0 + \delta) - f(x_0,y_0) < \varepsilon$,

另一方面

$f(x,y) - f(x_0,y_0) \geqslant f(x,y_0 - \delta) - f(x_0,y_0) > -\varepsilon$.

$\therefore |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$,

此即 $f(x,y)$ 于点(x_0,y_0)连续.

793.〔西南师范学院〕 设 $f(x,y)$ 在矩形 $D: -a \leqslant x \leqslant a, -b \leqslant y \leqslant b(a > 0, b > 0)$ 上分别为 x 和 y 的连续函数,而且 $f(0,0) = 0$.当 x 固定时,$f(x,y)$ 是 y 的严格递减函数,则有 $\delta > 0$,使对每个 $x \in (-\delta,\delta)$ 有 $y \in (-b,b)$ 满足 $f(x,y) = 0$.

证 (反证法)若不然.则 $\forall \delta > 0, \exists x_0 \in (-\delta,\delta)$, $f(x_0,y) = 0$,在 $(-b,b)$ 上无解.

由介值性定理,得 $\forall y \in (-b,b)$, $f(x_0,y)$ 都大于零或都小于零.(不妨设都大于零)

由题意,有 $f(\frac{b}{2},0) < 0$,记 $f(0,\frac{b}{2}) = -c$.

由上题,可知:$f(x,y)$ 在 D 上连续.

$\therefore \exists \delta_1 > 0$,当 $|x - 0| < \delta_1$, $|y - \frac{b}{2}| < \delta_1$ 时

$$|f(x,y) - f(0,\frac{b}{2})| < \frac{c}{2}, \text{则} f(x,y) < 0. \quad ①$$

取 $\delta = \delta_1$,则 $f(x_0,y) > 0$. $\forall y \in (-b,b)$ ②

①与②相矛盾,故假设不成立.

$\therefore$ 有 $\delta > 0$,使对每个 $x \in (-\delta,\delta)$ 有 $y \in (-b,b)$ 满足

$f(x,y) = 0$.

794. 设 $M = f(x,y,z)$ 在

$V = \{(x,y,z) \mid a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b, a \leqslant z \leqslant b\}$ 上连续,试证

$g(x,y) = \max\limits_{a \leqslant z \leqslant b} f(x,y,z)$

在 $D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b\}$ 上连续.

证　$\forall (x_0,y_0) \in D$. $f(x,y,z)$ 在 V 上连续从而一致连续.

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$. 当 $|x - x_0| < \delta_1$, $|y - y_0| < \delta_1$ 时

$|f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z)| < \varepsilon$.

即　$f(x_0,y_0,z) - \varepsilon < f(x,y,z) < f(x_0,y_0,z) + \varepsilon$

固定 x,y. 让 z 在 $[a,b]$ 上变化,取最大值,可得

$g(x_0,y_0) - \varepsilon < g(x,y) < g(x_0,y_0) + \varepsilon$.

$\therefore g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 上连续

$\therefore g(x,y)$ 在 D 上连续.

795.(辽宁师范大学)　设 $M = f(x,y,z)$ 在闭立方体

$a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b, a \leqslant z \leqslant b$ 上连续.令

$\varphi(x) = \max\limits_{a \leqslant y \leqslant b}\{\min\limits_{a \leqslant z \leqslant b} f(x,y,z)\}$

试证:$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证　令 $g(x,y) = \min\limits_{a \leqslant z \leqslant b} f(x,y,z)$.与上题同理可得 $g(x,y)$ 在

$D = [a,b] \times [a,b]$ 上连续.

令 $F(x,y,z) = g(x,y)$ 且 $a \leqslant z \leqslant b$.则由上题结论可得

$\max\limits_{a \leqslant y \leqslant b} F(x,y,z)$ 在 $[a,b] \times [a,b]$ 上连续.

$\therefore \max\limits_{a \leqslant y \leqslant b} F(x,y,z)$ 在关于 x 在 $[a,b]$ 上连续.

$\because \varphi(x) = \max\limits_{a \leqslant y \leqslant b} F(x,y,z)$

$\therefore \varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

796.(浙江大学)　设二元函数 $f(x,y)$ 在正方形区域 $[0,1] \times [0,1]$ 上连续.记 $J = [0,1]$.

(1) 试比较 $\inf\limits_{y \in J} \sup\limits_{x \in J} f(x,y)$ 与

$\sup\limits_{x \in J} \inf\limits_{y \in J} f(x,y)$ 的大小并证明之;

(2) 给出并证明使等式

$\inf\limits_{y \in J} \sup\limits_{x \in J} f(x,y) = \sup\limits_{x \in J} \inf\limits_{y \in J} f(x,y)$

成立的(你认为最好的)充分条件.

解 (1) $\forall y \in J$,有.

$\sup\limits_{x\in J} f(x,y) \geqslant f(x,y) \geqslant \inf\limits_{y\in J} f(x,y)$,

上式对于任意的 x 都成立,则

$\sup\limits_{y\in J} f(x,y) \geqslant \sup\limits_{x\in J}\inf\limits_{y\in J} f(x,y)$.

由 y 的任意性可知 $\inf\limits_{y\in J}\sup\limits_{x\in J} f(x,y) \geqslant \sup\limits_{x\in J}\inf\limits_{y\in J} f(x,y)$

(2) 若 $\exists x_0 \in J$,使 $f(x,y) \leqslant f(x_0,y)(\forall x \in J, y \in J)$

下面证明上面条件为充分条件

显然 $\sup\limits_{x\in J} f(x,y) = f(x_0,y)$.

$f(x_0,y)$ 在[0,1]在连续,$\exists y_0 \in J$,使.

$f(x_0,y_0) = \inf\limits_{y\in J} f(x_0,y) = \inf\limits_{y\in J}\sup\limits_{x\in J} f(x,y)$,

$f(x_0,y_0) = \inf\limits_{y\in J} f(x_0,y) \leqslant \sup\limits_{x\in J}[\inf\limits_{y\in J} f(x,y)]$,

$\therefore \inf\limits_{y\in J}\sup\limits_{x\in J} f(x,y) = \sup\limits_{x\in J}\inf\limits_{y\in J} f(x,y)$.

797.(武汉大学 1997 年) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,且当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时,$f(x,y) > 0$,及满足 $f(cx,cy) = cf(x,y)$,$\forall c > 0$.证明 $\exists \alpha,\beta > 0$,使得

$\alpha\sqrt{x^2+y^2} \leqslant f(x,y) \leqslant \beta\sqrt{x^2+y^2}$

证 若 $(x,y) = (0,0)$,由 $f(x,y)$ 连续及题中条件易知 $f(0,0) = 0$.则任取 $0 < \alpha < \beta$ 即可,若 $(x,y) \neq (0,0)$,取 $c = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > 0$.

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y),$$

即 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\cdot f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

又 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 1$, $\left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 1$, 由于连续知 $f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$,在 $[0,1]\times[0,1]$ 上必取到最大值 β 和最小值 α.从而

$\alpha\sqrt{x^2+y^2} \leqslant f(x,y) \leqslant \beta\sqrt{x^2+y^2}$.

798.(南京大学) 设 R^n 为 n 维欧氏空间,A 是 R^n 的非空子集,定义 x 到 A 的距离为

$f_A(x) = \inf\limits_{y\in A}\rho(x,y) = \rho(x,A)$

证明:$f_A(x)$ 是 R^n 上的一致连续函数.

证 $\forall x_1、x_2 \in R^n$,$\forall y \in A$.有

$\rho(x_1,y)\leqslant\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,y)$

则 $\inf\limits_{y\in A}\rho(x_1,y)\leqslant\rho(x_1,x_2)+\inf\limits_{y\in A}\rho(x_2,y)$

即 $\rho(x_1,A)\leqslant\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,A)$

同理：$\rho(x_2,A)\leqslant\rho(x_1,x_2)+\rho(x_1,A)$

$\therefore |\rho(x_1,A)-\rho(x_2,A)|\leqslant\rho(x_1,x_2)$

$\forall\varepsilon<0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $\rho(x_1,x_2)<\delta$ 时

$|\rho(x_1,A)-\rho(x_2,A)|\leqslant\rho(x_1,x_2)<\varepsilon$

$\therefore$ $f_A(x)$ 是 R^n 上的一致连续函数.

§2 偏导数与全微分

【考点综述】

一、概述

1. 偏导数与全微分

(1) 定义 设函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$，若 $(x_0,y_0)\in D$，且 $f(x,y_0)$ 在 x_0 的某一邻域上有定义，当

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在时，则称这个极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于 x 的偏导数，记作 $f_x'(x_0,y_0),z'_x(x_0,y_0)$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|(x_0,y_0),\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|(x_0,y_0)$，同样可定义 f 对 y 的偏导数.

若函数 $z=f(x,y)$ 在其定义域 D 的内点 (x_0,y_0) 的全增量 Δz 可表示为：$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A、B 是仅与点 (x_0,y_0) 有关，而与 Δx、Δy 无关的常数，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分，记作 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}f=A\Delta x+B\Delta y$.

(2) 可微的必要条件，若二元函数 $z=f(x,y)$ 在其定义域 D 的内点 (x_0,y_0) 上可微，则函数在该点的偏导数 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 存在，且

$A=f_x'(x_0,y_0),B={}_y'(x_0,y_0)$.

(3) 可微的充分条件，若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在，且在点 (x_0,y_0) 上连续，则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微.

2. 复合函数的偏导数与高阶偏导数

(1)(链式法则) 设 $z=f(x,y)$ 有连续的偏导数，而 $x=\varphi(s,t),y=$

$\psi(s,t)$ 都存在偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$ 存在偏导数,且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s},\\ \dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t}.\end{cases}$$

(2) 一阶微分形式不变性.设 $z=f(x,y)$ 为可微函数,若 x,y 为自变量,则 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.此处不论 x、y 是自变量还是中间变量.

(3) 高阶偏导数.如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导函数 $f_x'(x,y)$,$f_y'(x,y)$ 关于 x、y 的偏导数也存在,则说函数 f 具有二阶偏导数.定义如下:

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}''(x,y)$,$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''(x,y)$,

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}''(x,y)$,$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''(x,y)$,用同样的方法可定义更高阶的偏导数.

(4) 性质.设 $f(x,y)$ 的混合偏导数 f_{xy}''、f_{yx}'' 都在点 (x_0,y_0) 处连续.则 $f_{xy}''(x_0,y_0)=f_{yx}''(x_0,y_0)$.此结论对于三元函数、四元函数 … 的混合偏导数都成立.

3. 隐函数存在定理及其应用

(1) 定义设 $X\subset R$,$Y\subset R$,函数 $F:X\times Y\to R$,对于方程

$$F(x,y)=0,\qquad ①$$

若存在集合 $I\subset X$ 与 $J\subset Y$,使得对于任何 $x\in I$,恒有唯一确定的 $y\in J$,它与 x 一起满足方程①,则称由方程①确定了一个定义在 I 上,值域含于 J 的隐函数.

(2) 隐函数存在唯一性定理.若(ⅰ)函数 $F(x,y)$ 在以点 $P(x_0,y_0)$ 为内点的某一区域 D 内连续;

(ⅱ)偏导数 $F_x'(x,y)$ 与 $F_y'(x,y)$ 在 D 内存在且连续;

(ⅲ)$F(x_0,y_0)=0$(通常称为初始条件);

(ⅳ)$F_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

则在点 P 的某邻域 $U(P)$ 内,方程 $F(x,y)=0$ 能唯一地确定了一个定义在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内的函数 $y=f(x)$,使得

(a) $(x,f(x))\in U(P)$,$x\in U(x_0)$,$F(x,f(x))\equiv 0$,$x\in U(x_0)$ 且 $f(x_0)=y_0$;

(b) $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内连续;

(c) $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有连续导函数,且 $f'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

(3) n 元函数的唯一存在与连续可微性定理.

若(ⅰ)函数 $F(x_1,x_2,\cdots x_n,y)$ 在以 $P(x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0,y^0)$ 为内点的 $n+1$ 维空间区域 D 内连续;

(ⅱ)偏导数 $F'_{x_1},F'_{x_2},\cdots F'_{x_n},F'_y$ 在 D 内存在且连续;

(ⅲ) $F(x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0,y^0)=0$;

(ⅳ) $F'_y(x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0,y)\neq 0$

则在 P 的某一邻域 $U(P)$ 内,方程 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 唯一地确定了一个定义在 $Q(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的某邻域 $U(Q)$ 上的 n 元连续函数

$y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 使得:

(a) $(x_1,x_2,\cdots x_n,f(x_1,x_2,\cdots x_n))\in U(P)$, $(x_1,x_2,\cdots x_n)\in U(Q)$;
$F(x_1,x_2,\cdots x_n,f(x_1,\cdots x_n))\equiv 0,(x_1,x_2,\cdots x_n)\in U(Q),y_0=f(x_1^0,\cdots x_n^0)$.

(b) $y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 在 $U(Q)$ 内有连续偏导数:$f'_{x_1},f'_{x_2},\cdots,f'_{x_n}$ 而且 $f'_{x_1}=-\dfrac{F'_{x_1}}{F'_y},f'_{x_2}=-\dfrac{F'_{x_2}}{F'_y},\cdots,f'_{x_n}=-\dfrac{F'_{x_n}}{F'_y}$.

(4) 由方程组确定的隐函数(隐函数组定理)

若:(ⅰ) $F(x,y,u,v)$ 与 $G(x,y,u,v)$ 在以点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 为内点的区域 $V\subset R^4$ 内连续;

(ⅱ) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$(初始条件);

(ⅲ)在 V 内 F,G 具有一阶连续偏导数;

(ⅳ) $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ 在点 P_0 处不等于零.

则在点 P_0 的某一(四维空间)邻域 $U(P_0)\subset V$ 内,方程组

$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 唯一地确定了定义在点 $Q_0(x_0,y_0)$ 的某一(二维空间)邻域 $U(Q_0)$ 内的两个二元隐函数

$u=f(x,y),v=g(x,y)$,

使得:

(a) $u_0=f(x_0,y_0),v_0=g(x_0,y_0)$ 且当 $(x,y)\in U(Q_0)$ 时,

$(x,y,f(x,y),g(x,y))\in U(P_0)$,

$F(x,y,f(x,y),g(x,y)\equiv 0$,

$G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0$;

(b) $f(x,y),g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 内连续;

(c) $f(x,y),g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 内有一阶连续偏导致,且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

(5)(反函数组定理) 若函数组$\begin{cases}u=u(x,y),\\ v=v(x,y)\end{cases}$ 满足如下条件:

(ⅰ) $u(x,y),v(x,y)$ 均是有连续的偏导数;

(ⅱ) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$.

则此函数组可确定唯一的具有连续偏导数的反函数组

$x=x(u,v),y=y(u,v)$,且$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$.

二、解题方法

1. 考点 1　求偏导数

解题方法(1) 直接法(见下面第 807 题);(2) 利用全微分一阶形式不变性(见下面第 819 题);(3) 先取对数,再求(见下面第 819 题);(4) 链式法则(见下面第 819 题);(5) 数学归纳法(见下面第 827,836 题).

2. 考点 2　证明问题

解题方法(1) 按定义(见下面第 801,802 题);(2) 隐函数求导(见下面第　题);(3) 利用微分中值定理(见下面第 804,805 题).

【经典题解】

799.〔北京师范大学,2003 年〕　已知 $z=z(x,y)$,由 $x^2+y^2+h^2(z)=1$ 确定,且 $h(z)$ 具有所需的性质.求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　由 $x^2+y^2+h^2(z)=1$,两边对 x 求导得

$$2x+2h(z)h'(z)\frac{\partial z}{\partial x}=0. \quad ①$$

① 式两边再对 y 求导得

$$2h'^2(z)\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2h(z)h''(z)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+2h(z)h'(z)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \quad ②$$

由 ① 解得　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{h(z)h'(z)}$, ③

由 x,y 地位对称类似可得　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{h(z)h'(z)}$, ④

将 ③,④ 代入 ② 可解得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{h'^2(z)+h(z)h''(z)}{[h(z)h'(z)]^3}xy.$$

800.(北京师范大学,2003年) 将直角坐标系下 *Laplace* 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为极坐标下的形式.

解 设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\cos\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)+\sin\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad ①$$

类似可求

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\therefore \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad ②$$

① + ② 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0.$$

801.(南开大学,1999年)设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\sin(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续但不可微.

证 由于 $\left|\frac{(x+y)\sin(xy)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{(x+y)xy}{x^2y^2}\right|\leqslant$

$$\frac{|x+y|}{2}\leqslant\frac{|x|}{2}+\frac{|y|}{2}.$$

故对 $\forall\varepsilon>0$,当 $|x|<\delta, |y|<\delta$,(取 $\delta=\varepsilon$)时

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{(x+y)\sin(xy)}{x^2+y^2}\right|<\frac{|x|}{2}+\frac{|y|}{2}<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$

故 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处连续,下证 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处不可微.

$f_x'(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$,同理 $f_y'(0,0) = 0$.

令 $\Delta w = f(x,y) - f(0,0) - f_x'(0,0)\Delta x - f_y'(0,0)\Delta y$

$= \dfrac{(x+y)\sin(xy)}{x^2+y^2}.$

而 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta w}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{(x+y)\sin(xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} =$

$\lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ y=kx}}\dfrac{(x+y)\sin(xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ y=kx}}\dfrac{(k+1)}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\dfrac{\sin kx^2}{x^2} = \dfrac{k(k+1)}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$ 与 k 有关.

所以 $f(x,y)$ 在(0,0) 处不可微.

802.(北京航空航天大学 2001 年) 设

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}.$$

求证:在(0,0) 处,$f(x,y)$ 连续但不可微.

证 由 $|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = 4\varepsilon$,当 $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 时,

$|f(x,y) - f(0,0)| \leqslant \dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon.$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0,$

从而 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处连续.

又 $f_x'(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$. 同理 $f_y'(0,0) = 0$.

令 $\Delta w = f(x,y) - f(0,0) - f_x'(0,0)\Delta x - f_y'(0,0)\Delta y = f(x,y)$.

考虑 $\lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ y=kx}}\dfrac{\Delta w}{\rho} = \lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ y=kx}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k^2x^4}{x^4(1+k^2)^2} = \dfrac{k^2}{(1+k^2)^2},$

即 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta w}{\rho}$ 不存在.

所以 $f(x,y)$ 在(0,0) 不可微.

803. 证明微分中值定理.

设二元函数 $z = f(x,y)$ 在凸区域 D 上两个偏导数 f_x', f_y' 都存在,则对于 D 内任何两点 $(x_0,y_0),(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in U(P_0)$ 有

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$=f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x+f_y'(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y$,

其中 $0<\theta_1<1\quad 0<\theta_2<1$.

证 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$

$[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]$. ①

令 $\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)$,则由一元函数的中值定理有:

$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi(x_0+\theta_1\Delta x)\cdot\Delta x(0<\theta_1<1)$,

即 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=$

$f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x(0<\theta_1<1)$.

同理令 $\psi(y)=f(x_0,y)$,可得

$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y(0<\theta_2<1)$.

代入 ① 式即可证明.

804.(哈尔滨工业大学 1999 年) 设二元函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1\}$ 上可微,且对 $\forall(x,y)\in D$,有 $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 1,\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant 1$,证明:对任意$(x_1,y_1)\in D,(x_2,y_2)\in D$.成立:

$$|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|\leqslant|x_2-x_1|+|y_2-y_1|.$$

证 应用微分中值定理.有

$|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|$

$=|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_2)+f(x_1,y_2)-f(x_1,y_1)|$

$=|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_2)|+|f(x_1,y_2)-f(x_1,y_1)|$

$=|f_y'(x_2,\xi_1)|\cdot|y_2-y_1|+|f_x'(\xi_2,y_1)|\cdot|x_2-x_1|$

$\leqslant|y_2-y_1|+|x_2-x_1|$,

其中 ξ_1 介于 y_1 与 y_2 之间,ξ_2 介于 x_1 与 x_2 之间.

805.(北京钢铁学院) 证明:若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的一个圆邻域 $U=U(P_0,\delta)$ 中有连续偏导数.则 $z=f(x,y)$ 在 U 中连续.

证 任取$(x_1,y_1)\in U$,考虑

$f(x_1+\Delta x,y_1+\Delta y)-f(x_1,y_1)$

$\xlongequal{\text{微分中值定理}}f_x'(x_1+\theta_1\Delta x,y_1+\Delta y)\cdot\Delta x+f_y'(x_1,y_1+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y$.

$\therefore\quad\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}(f(x_1+\Delta x,y_1+\Delta y)-f(x_1,y_1))$

$=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f_x'(x_1+\theta_1\Delta x,y_1+\Delta y)\cdot\Delta x+f_y'(x_1,y_1+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y$

$=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}(f_x'(x_1,y_1)\cdot\Delta x+f_y'(x_1,y_1)\cdot\Delta y)$

$=0$.

从而 $f(x,y)$ 在 (x_1,y_1) 处连续，再由 (x_1,y_1) 的任意性，$f(x,y)$ 在 U 中连续.

806.（北京大学 2000 年） 构造一个二元函数，使得它在原点 $(0,0)$ 两个偏导数都存在，但在原点不可微.

解 如 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 都存在，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微.

事实上，由偏导数定义易得 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$.

下面证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微. 用反证法假设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，则由可微定义知.

$\Delta f = f_x'(0,0)\Delta x + f_y'(0,0)\Delta y + o(\rho) = o(\rho)$ 其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

所以有 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f}{\rho}=0$.

又 $\Delta f = f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}$ 取 $\Delta y=\Delta x(\Delta x>0)$.

有 $\lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\dfrac{\Delta f}{\rho}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\sqrt{2}\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$. 这与 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f}{\rho}=0$ 矛盾.

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微.

807.（上海交通大学，2000 年） 求函数 $u=x^{vz}$ 的全微分.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=vzx^{vz-1}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial v}=x^{vz}z\ln x$，

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{vz}v\ln x$，

$\therefore du = vzx^{vz-1}dx + x^{vz}z\ln x dv + x^{vz}v\ln x dz$.

808.（武汉大学 1992 年） 对于函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & 当\ x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & 当\ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：(1) $f(x,y)$ 处处对 x，对 y 可导；

(2) 偏导函数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 有界；

(3) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微；

(4) 一阶偏导数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 中至少有一个在点 $(0,0)$ 不连续.

证 (1) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$f_x'(x,y)=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y'(x,y)=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

当$(x,y)=(0,0)$时，

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}0=0.$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

因此$f(x,y)$处处对x、y可导.

(2) 由 $|f_x'(x,y)|=\left|\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right|\leqslant\left|\frac{2xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right|\leqslant 1$,

及 $|f_y'(x,y)|=\left|\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right|\leqslant\frac{x^2}{x^2+y^2}\leqslant 1$,

知$f_x'(x,y)$,$f_y'(x,y)$有界.

(3) $\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{|\Delta f-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y|}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{\Delta x^2\cdot\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x^2\cdot\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\neq 0,$$
其中$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

因此$f(x,y)$在点$(0,0)$不可微.

(4) 不妨设动点(x,y)沿直线$y=kx$趋于$(0,0)$由

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}f_y'(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2-k^2x^2)}{x^4(1+k^2)^2}=\frac{1-k^2}{(1+k^2)^2}$$
与k有关.

故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_y'(x,y)$不存在,从而$f_y'(x,y)$在$(0,0)$不连续.

809.(武汉大学,1995年) 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

(1) 求$f_x'(0,0)$,$f_y'(0,0)$;

(2) 证明:$f_x'(x,y)$,$f_y'(x,y)$在$(0,0)$不连续;

(3) 证明:$f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

解 (1) 用偏导数的定义计算.

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{|x|}}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{|x|}=0.$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\cos\frac{1}{|y|}}{y}=0.$$

(2) 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时

$$f_x'(x,y) = 2x\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y'(x,y) = 2y\cos\frac{1}{\sqrt{y^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f_x'(x,y)$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\left(2x\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}\,|x|} + \frac{x}{\sqrt{1+k^2}\,|x|}\sin\frac{1}{\sqrt{1+k^2}\,|x|}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+k^2}\,|x|}\sin\frac{1}{\sqrt{1+k^2}\,|x|} \text{ 不存在.}$$

而由(1)知 $f_x'(0,0) = 0$,故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x'(x,y) \neq f_x'(0,0)$,即 $f_x'(x,y)$ 在(0,0)处不连续.同理可证 $f_y'(x,y)$ 在点(0,0)处不连续.

(3) $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$

下证 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f - f_x'(0,0)\Delta x - f_y'(0,0)\Delta y}{\rho} = 0.$

即
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

故 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微.

注:由此题可以看出,函数可微,但函数的偏导数未必连续.

810.(同济大学) 确定 α 的值,使得函数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

在点(0,0)可微.

解 $f(x,y)$ 在点(0,0)可微,则 $f_x'(0,0)$,$f_y'(0,0)$ 存在.

由 $f_x'(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}x^{2\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^2}$ 存在,则必有 $2\alpha - 1 > 0$,即 $\alpha > \dfrac{1}{2}$.此时 $f_x'(0,0) = 0$,同理有 $f_y'(0,0) = 0$.

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f - f_x'(0,0)\Delta x - f_y'(0,0)\Delta y}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{(x^2+y^2)^{\alpha}\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$\lim\limits_{\rho\to0}(x^2+y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$

因此　当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时，$f(x,y)$ 在点(0,0)处可微.

811.(武汉大学1997年)　设

$$f(x,y)=\begin{cases}g(x,y)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 当(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 当(x,y)=(0,0),\end{cases}$$

证明:(1) 若 $g(0,0)=0$，g 在(0,0)可微，且 $\mathrm{d}g(0,0)=0$，则 f 在(0,0)可微，且 $\mathrm{d}f(0,0)=0$;

(2) 若 g 在(0,0)可导，且 f 在(0,0)可微，则 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

证　(1) 由 g 在(0,0)处可微，故 f、g 在(0,0)的邻域内偏导数均存在，有.

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}g'_x(x,y)\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+g(x,y)\cdot\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_y'(x,y)=\begin{cases}g'_y(x,y)\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+g(x,y)\cdot\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

所以　$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=g(\Delta x,\Delta y)\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$,

$f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y=0$,

故　$\mathrm{d}f(0,0)=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y=0.$

又　g 在(0,0)可微，则

$$g(\Delta x,\Delta y)-g(0,0)=g'_x(0,0)\Delta x+g'_y(0,0)\Delta y+o(\rho).$$

又　$\mathrm{d}g(0,0)=g'_x(0,0)\Delta x+g'_y(0,0)\Delta y=0.$

所以　$g(\Delta x,\Delta y)=g(0,0)+o(\rho)=o(\rho).$

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta f-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{g(\Delta x,\Delta y)\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\rho}=0.$$

所以 f 在(0,0)可微，且 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

(2) 由 g 在(0,0)可导，f 在(0,0)可微. 知 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 的表达式与(1)中同，故 $\mathrm{d}f(0,0)=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y=0.$

812.(中国科技大学)　已知

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & 若(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1) 求出 $f_x'(x,y)$ 及 $f_y'(x,y)$;

(2) 证明:$f(x,y)$ 在原点连续;

(3) 证明:$f(x,y)$ 在原点不可微.

解 (1) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时

$$f_x'(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},f_y'(x,y)=-\frac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=1,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0.$$

(2) 由于 $\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right|=\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x\right|\leqslant|x|$.

故对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon>0$.当 $|x|<\delta,|y|<\delta$ 时

有 $|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x|<\varepsilon$,

故 $f(x,y)$ 在原点连续.

(3) $$\lim_{\rho\to0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to0}\frac{-\Delta x\cdot\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac32}}$$

由于 $\lim\limits_{\substack{\rho\to0\\ \Delta x=\Delta y}}\dfrac{-\Delta x\cdot\Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac32}}=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}-\dfrac{(\Delta x)^3}{2\sqrt2\cdot|\Delta x|^3}=-\dfrac{1}{2\sqrt2}\neq0$.

故 f 在原点不可微.

813.(中山大学) 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^P\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 当 x^2+y^2\neq0,\\ 0, & 当 x^2+y^2=0,\end{cases}$$ 其中 P 为正整数.

问 (1) 对于 P 的哪些值,$f(x,y)$ 在原点连续.

(2) 对于 P 的哪些值,$f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 都存在.

(3) 对于 P 的哪些值,$f(x,y)$ 在原点有一阶连续偏导数,试证明.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)^P\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$.

故对任何正整数 P,$f(x,y)$ 在原点连续.

(2) $f_x'(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^P\sin\frac{1}{|x|}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}x^{P-1}\cdot\sin\dfrac{1}{|x|}$,

故当 $P>1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}x^{P-1}\sin\dfrac{1}{|x|}=0$.

同理当 $P>1$ 时，有 $f_y'(0,0)=0$.

故对于 $P\geqslant 2$ 的一切值，$f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 均存在.

$$(3) f_x'(x,y)=\begin{cases} P(x+y)^{P-1}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x+y)^P\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

当 $P>1$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}P(x+y)^{P-1}\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

当 $P=2$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x(x+y)^P}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不存在.

而当 $P\geqslant 3$ 时，$\left|\dfrac{x(x+y)^P}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right|\leqslant\left|\dfrac{(x+y)^P}{x^2}\right|$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x(x+y)^P}{x^2}=0$.

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x(x+y)^P}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ 存在也为零，所以当 $P\geqslant 3$ 时，$f_x'(x,y)$ 在原点有一阶连续导数，同理 $P\geqslant 3$ 时，$f_y'(x,y)$ 在原点有一阶连续导数. 综上，对于 $P\geqslant 3$ 的一切正整数 P，$f(x,y)$ 在原点有一阶连续偏导数.

814.(北京航空学院)　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

证明：$f(x,y)$ 在点(0,0) 的邻域连续，且有一阶偏导数：$f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$，问 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处是否可微?说明理由.

证　当 $x^2+y^2\neq 0$. 显然 $f(x,y)$ 连续，而当 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ 时，

$|f(x,y)-f(0,0)|=\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\to 0$,

故 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处也连续.

又当 $x^2+y^2\neq 0$，一阶偏导数有 $f_x'(x,y)=\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$f_y'(x,y)=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

而$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{(\Delta x)^2+0}}\cdot\dfrac{1}{\Delta x}=0.$

同理$f_y'(0,0)=0.$

但当点(x,y)沿直线$y=x$趋于$(0,0)$时,有

$$\frac{\Delta f-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{(\Delta x)^2}{2\cdot(\Delta x)^2}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

故函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微.

815.(长春光学精密机械学院,北京师范大学) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明:$f_{xy}''(0,0)\neq f_{yx}''(0,0)$.

证 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0,$

$f_x'(0,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=-y,$

从而$f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f_x'(0,y)-f_x'(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y-0}{y}=-1.$

类似可求得:$f_y'(0,0)=0,f_y'(x,0)=x\quad f''_{yx}(0,0)=1.$

故 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0).$

816.(武汉水利电力学院)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

问在点$(0,0)$处:(1) 偏导数是否存在;(2) 偏导数是否连续;(3) 是否可微,试说明理由.

解 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}=0$, 即$f_x'(0,0)=0.$

同理 $f_y'(0,0)=0.$

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

当点(x,y)沿直线$y=x$趋于$(0,0)$时

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[2x\sin\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{2x}{2x^2}\cos\dfrac{1}{2x^2}\right]$不存在.同理$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{\partial f}{\partial y}$也不存在,故偏导数在$(0,0)$处不连续.

(3)$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

又$f_x'(0,0)=0, f_y'(0,0)=0$.于是在点$(0,0)$处

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-(f_x'\Delta x+f_y'\Delta y)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-0}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0.$$

故$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

817.(北京邮电学院) 设一个二元函数$z=f(x,y)$,问(1)若$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$存在,函数$z=f(x,y)$是否连续?(2)若$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$存在,函数$z=f(x,y)$可微.

解 (1)函数$z=f(x,y)$未必连续,例 $f(x,y)=\begin{cases}0, & xy=0\\ 1, & xy\neq 0\end{cases}$

显然$f(x,0)=f(0,y)\equiv 0$

而$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0. f_y'(0,0)=0.$

即$f_x'(x,y)$和$f_y'(x,y)$在$(0,0)$处均存在,但是$f(x,y)$在$(0,0)$处不连续,因为当(x,y)沿x轴或y轴趋于$(0,0)$时,$f(x,y)$极限为0,而沿其它路线时,极限为1.

(2)函数$z=f(x,y)$未必可微,例$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sin x}{x}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$

易见$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$,但

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \Delta x=\Delta y}}\frac{\Delta z-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \Delta x=\Delta y}}\frac{\Delta x\sin\Delta x}{\sqrt{2}(\Delta x)^2}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\sqrt{2}\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0.$$

故$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微.

818.(武汉大学1996年) 设$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A. g(x,y)$在$(x_0,y_0)$可微,且$g(x_0,y_0)=0$.

证明:(1)$f(x,y)A+\alpha$.

$\alpha(x-x_0)=o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right),((x,y)\to(x_0,y_0))$;

(2)$z=f(x,y)\cdot g(x,y)$ 在(x_0,y_0)可微.

证 (1)由$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$,

故对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时,

$|f(x,y)-A|<\varepsilon$,即$|\alpha|<\varepsilon$,其中$\alpha=f(x,y)-A$.

而$\left|\dfrac{\alpha(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right|\leqslant\left|\dfrac{\alpha(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2}}\right|=|\alpha|<\varepsilon$,

故 $\alpha(x-x_0)=o((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$.

(2)令 $f(x_0,y_0)=A$,

$\Delta z-(f(x,y)g(x,y))'_x\Delta x-(f(x,y)g(x,y))'_y\Delta y$

$=f(x,y)g(x,y)-f(x_0,y_0)g'_x(x_0,y_0)\Delta x-f(x_0,y_0)g'_y(x_0,y_0)\Delta y$

$=A(g(x,y)-g(x_0,y_0)-g'_x(x_0,y_0)\Delta x-g'_y(x_0,y_0)\Delta y)+\alpha g(x,y)$

由 $g(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微.则

$$\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\rho}(g(x,y)-g(x_0,y_0)-g'_x(x_0,y_0)\Delta x-g'_y(x_0,y_0)\Delta y)=0,$$

$\left(\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$.

所以

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-(f(x,y)g(x,y))'_x\Delta x-(f(x,y)g(x,y)')_y\Delta y}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to0}\frac{A(g(x,y)-g(x_0,y_0)-g'_x(x_0,y_0)\Delta x-g'_y(x_0,y_0)\Delta y)+\alpha g(x,y)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to0}\frac{\alpha g(x,y)}{\rho}=0.$$

故 $z=f(x,y)g(x,y)$在(x_0,y_0)可微.

819.设 $z=x^{x^y}(x>0)$ 求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解法 1 (链式法则)

令 $u=x^y$ 则 $z=x^u=f(x,u)$.

于是$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=x^y\cdot x^{x^y-1}+(x^{x^y}\cdot\ln x)y\cdot x^{y-1}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=(x^u\cdot\ln x)\cdot(x^y\cdot\ln x)=x^y\cdot x^{x^y}(\ln x)^2$

解法 2 利用求对数

由 $z=x^{x^y}$ 两边取对数有 $\ln z=x^y\ln x$ ①

两边对 x 求导有

$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x.$

$\frac{\partial z}{\partial x} = z(x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x) = x^{x^y}(x^{y-1} + y \cdot x^{y-1}\ln x).$

同样在 ① 式两端对 y 为导有：$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x^y(\ln x)^2,$

则 $\frac{\partial z}{\partial y} = z \cdot x^y(\ln x)^2 = x^y \cdot x^{x^y}(\ln x)^2$

解法 3 利用全微分一阶形式不变性.

$z = x^{x^y} = x^u, u = x^y$ 则 $z = f(x, u).$

由全微分一阶形式不变性有：

$$\begin{aligned} dz &= f_x' dx + f'_u du = u \cdot x^{u-1}dx + x^u \ln x du \\ &= x^y \cdot x^{x^y-1}dx + x^{x^y}\ln x(y \cdot x^{y-1}dx + x^y \ln x dy) \\ &= (x^y \cdot x^{x^y-1} + y\ln x \cdot x^{x^y} \cdot x^{y-1})dx + x^{x^y} \cdot x^y(\ln x)^2 dy. \end{aligned}$$

于是$\frac{\partial z}{\partial x} = x^y \cdot x^{x^y-1} + y \cdot x^{x^y} \cdot x^{y-1}\ln x.$

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{x^y} \cdot x^y(\ln x)^2.$

820.（复旦大学，1996 年） 设 $u = f(r, r\cos\theta)$ 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}.$

解 在 $u = f(r, r\cos\theta)$ 中令 $v = r, w = r\cos\theta.$

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\cos\theta,$

$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial w} r\sin\theta,$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\cos\theta\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(-r\sin\theta) - \frac{\partial f}{\partial w}\sin\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} r\sin\theta\cos\theta.$$

821.（天津大学，1998 年） 设方程 $z + xy = f(xz, yz)$ 确定可微函数 $z = z(x, y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$

解 在 $z + xy = f(xz, yz)$ 两边同时对 x 求导，得

$\frac{\partial z}{\partial x} + y = f'_1\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) + f'_2 y\frac{\partial z}{\partial x}$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'_1 z - y}{1 - f'_1 x - f'_2 y}$

822.（北京大学 1997 年） 设 $x = f(u, v), y = g(u, v), w = w(x, y)$ 有

二阶连续偏导数.满足:$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v},\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$

证明:(1) $\frac{\partial^2(fg)}{\partial u^2}+\frac{\partial^2(fg)}{\partial v^2}=0$;

(2) $w(x,y)=w(f(u,v),g(u,v))$ 满足 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$

证 (1) $\frac{\partial(fg)}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot g+\frac{\partial g}{\partial u}\cdot f=\frac{\partial g}{\partial v}\cdot g+\frac{\partial g}{\partial u}\cdot f.$

$$\frac{\partial^2(fg)}{\partial u^2}=\frac{\partial}{2u}\left(\frac{\partial(fg)}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\cdot g+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\cdot f+\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}. \quad ①$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot g+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot f=-\frac{\partial g}{\partial u}\cdot g+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot f,$$

$$\frac{\partial^2(fg)}{\partial v^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial(fg)}{\partial v}\right)}{\partial v}=-\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\cdot g-\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot f+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}. \quad ②$$

① + ② 得

$$\frac{\partial^2(fg)}{\partial u^2}+\frac{\partial^2(fg)}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right)\cdot g+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)\cdot f+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}$$
$$-\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$
$$=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)\cdot f+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}$$
$$=\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)\cdot f+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot(-\frac{\partial g}{\partial u})+\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$=0.$$

(2) $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial u},$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot(\frac{\partial f}{\partial u})^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w^2}{\partial y^2}\cdot(\frac{\partial y}{\partial u})^2+\frac{\partial y}{\partial g}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}.$$

同理:$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot(\frac{\partial f}{\partial v})^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial w^2}{\partial y^2}\cdot(\frac{\partial y}{\partial v})^2+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}.$

故 $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[(\frac{\partial f}{\partial u})^2+(\frac{\partial f}{\partial v})^2\right]+$

$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left[(\frac{\partial g}{\partial u})^2+(\frac{\partial g}{\partial v})^2\right]$

$+\frac{\partial w}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2})+\frac{\partial w}{\partial y}(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2})$.

又因为$(\frac{\partial g}{\partial u})^2+(\frac{\partial g}{\partial v})^2=(\frac{\partial f}{\partial v})^2+(\frac{\partial f}{\partial u})^2$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=-\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}=0$,

$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}=0$,

$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial \gamma}{\partial u}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}$.

所以$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})\left[(\frac{\partial f}{\partial v})^2+(\frac{\partial f}{\partial u})^2\right]=0$.

823.(中国科学院,2000 年) 设函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 具有二阶连续导数,并设 $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$.试证:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

证 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(x+y)+x\varphi'(x+y)+y\psi'(x+y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi'(x+y)+x\varphi'(x+y)+x\psi''(x+y)+y\psi''(x+y)$$
$$=2\varphi'(x+y)+x\varphi''(x+y)+y\psi''(x+y).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi'(x+y)+x\varphi''(x+y)+y\psi'(x+y)+y\psi''(x+y)$$
$$=\varphi'(x+y)+\psi'(x+y)+x\varphi''(x+y)+y\psi''(x+y).$$

同理 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\psi'(x+y)+x\varphi''(x+y)+y\psi''(x+y)$.

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi'(x+y)+x\varphi''(x+y)+y\psi''(x+y)$
$-2[\varphi'(x+y)+\psi'(x+y)+x\varphi''(x+y)+y\psi''(x+y)]+2\psi'(x+y)+$
$x\varphi''(x+y)+y\psi''(x+y)=0$.

824.(华东师范大学,1998 年) 设 $u(x,y)$ 有连续的二阶偏导数,$F(s,t)$ 有连续的一阶偏导数,且满足 $F(u'_x,u'_y)=0$,$(F'_s)^2+(F'_t)^2\neq 0$.

证明:$u''_{xx}\cdot u''_{yy}-(u''_{xy})^2=0$.

证 令 $u'_x=s$,$u'_y=t$.

由 $F(u'_x,u'_y)=0$,可知$\begin{cases}F'_x(u'_x,u'_y)=0\\ F'_y(u'_x,u'_y)=0\end{cases}$

即 $\begin{cases}F'_s u''_{xx}+F'_t u''_{yx}=0,\\ F'_s u''_{xy}+F'_t u''_{yy}=0.\end{cases}$

即有 $\quad F'_s F'_t u''_{xx} u''_{yy} = F'_t F'_s (u''_{xy})^2$ ①

$$\therefore u''_{xx} u''_{yy} - (u''_{xy})^2 = 0.$$

825.(北京大学,1995 年) 设 $z = f(x,y)$ 是二次连续可微函数,又有关系式 $u = x + ay, v = x - ay$(a 是不为零的常数) 证明:

$$a^2 \frac{\partial z^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

证 由$\begin{cases} u = x + ay, \\ v = x - ay \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u + v), \\ y = \dfrac{1}{2a}(u - v), \end{cases}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2a} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{1}{2a} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{2a} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{4a} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4a} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{1}{4a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{4a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$\therefore 4a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

826.(北京科技大学,1998 年) 设方程 $z^3 - 2xyz = a^3$,求隐函数的偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 由于 $z^3 - 2xyz = a^3$, ①

① 式两边对 x 求导得

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad ②$$

解得 $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{z^2 - xy}.$ ③

类似,① 式两边对 y 求导可解得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}. \quad ④$$

由 ③ 再对 y 求导得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(z + y\frac{\partial z}{\partial y})(z^2 - xy) - yz(2z\frac{\partial z}{\partial y} - x)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{(x + y\frac{xz}{z^2 - xy})(z^2 - xy) - yz(\frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

827.(北京航空大学) 设 $u = xyze^{x+y+z}$,求$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$.

解 由于 $v = xe^x \cdot ye^y \cdot ze^z$,由数学归纳法可知

$(xe^x)^{(p)} = (x+p)e^x$,

因此

$$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} = (x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}.$$

828.(浙江大学) 在变换公式 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 之下,方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y)$ 变成什么形式?

解 由题知$\begin{cases} x = x(r,\theta), \\ y = y(r,\theta), \\ z = z(x,y), \end{cases}$由复合函数求偏导法则有:

$$\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta, \quad ①$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta).$$

于是有:$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta.$ ②

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(r\sin\theta)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}(-r\cos\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(r\cos\theta)^2$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y}(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(-r^2\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(-r^2\sin\theta\cos\theta). \quad ③$$

② 式乘以 r^2 加上 ③ 式得:

$$r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial z}{\partial x}(-r\cos\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(-r\sin\theta). \quad ④$$

又在 ① 式下可解得$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\cos\theta}{r} + \frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta, \end{cases}$代入 ④ 式有

$$r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - r\frac{\partial z}{\partial r}.$$

于是:$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial z}{\partial r}\right).$

829.(上海交通大学) 设 $u = x + y, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$,试用 u, v 作新自变量变换方程 $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

解 由复合函数求偏导有:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

则 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \frac{2}{x^3}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

其中 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u},$$

故 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{2}{x^3}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \quad ①$$

类似可得 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{2}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \quad ②$$

①$\cdot x^2$ + ②$\cdot y^2$ 得,

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$= (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial v} + (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad ③$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial u} - \frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right). \quad ④$$

③ − ④$\cdot(x^2 + y^2)$ 得:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$= \left[(uv - 2)^2 + u^2 - \frac{2u}{v} - 2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} - \left(v^2 - \frac{2v}{u} + 2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

830.(清华大学) 若 $u(x, y)$ 的二阶导数存在,证明 $u(x, y) = f(x)g(y)$ 的充要条件是 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(u \neq 0)$

证 必要性 对 $u(x, y) = f(x)g(y)$ 求偏导数得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x)g(y), \frac{\partial u}{\partial y} = f(x)g'(y), \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = f'(x)g'(y),$$

故 $$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = f(x)g(y)f'(x)g'(y) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

充分性　令 $\frac{\partial u}{\partial y}=v$,则 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$.

变成 $u\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}$,从而 $\frac{u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2}=0(u\neq 0)$,

即　$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{v}{u})=0,\frac{v}{u}=\varphi_1(y)$,

亦即　$\frac{\partial u}{\partial y}=u\varphi_1(y),\frac{\partial \ln u}{\partial y}=\varphi_1(y)$.

解得　$\ln u=\int\varphi_1(y)\mathrm{d}y+\varphi_2(x)$,

故　$u=e^{\int\varphi_1(y)\mathrm{d}y+\varphi_2(x)}=f(x)g(y)$.

831. 设 $f(x,y)$ 与 $x=\varphi(u,v),y=\psi(u,v)$ 都具有连续二阶偏导数,且 x 与 y 满足柯西一黎曼方程:$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$,证明:

$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=J\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$,其中 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$.

证　$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

于是
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}.$$

同理:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2})^2+2\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial v})^2+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

两式相加得:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2]+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2]$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right).①$$

在等式 $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}$　$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$ 两边分别关于 u,v 求导得:

$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$,两式相加得

$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0$.同理$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0$.

再由柯西 - 黎曼条件得:

$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$,

$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ 及$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = 0$,代入 ① 式即得证.

832.(南京工学院,北京工业大学,天津纺织工学院) 若函数$f(\xi,\eta)$具有连续二阶导数且满足拉普拉斯方程

$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0$. 证明函数 $z = f(x^2 - y^2, 2xy)$ 也满足拉普拉斯方程

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

证 设$\xi = x^2 - y^2, \eta = 2xy$,则 $z = f(\xi, \eta)$

$$z_x' = f'_\xi \cdot f_x' + f_\eta' \cdot \eta_x' = 2xf_\xi' + 2yf_\eta',$$

$$z'_y = f'_\xi \cdot \xi'_y + f'_\eta \cdot \eta'_y = -2yf'_\xi + 2xf'_\eta,$$

$$z''_{xx} = 2f'_\xi + 2x(f''_{\xi\xi} \cdot \xi'_x + f_{\xi\eta}'' \cdot \eta'_x) + 2y(f_{\eta\xi}'' \cdot \xi'_x + f''_{\eta\eta} \cdot \eta'_x)$$
$$= 2f'_\xi + 4x^2 f''_{\xi\xi} + 4xyf''_{\xi\eta} + 4xyf''_{\eta\xi} + 4y^2 f''_{\eta\eta}$$

$$z''_{yy} = -2f'_\xi + 4y^2 f''_{\xi\xi} - 4xyf''_{\xi\eta} - 4xyf''_{\eta\xi} + 4x^2 f''_{\eta\eta},$$

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(x^2 + y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) = 0$.

833.(浙江大学,2001 年) 设 $z = z(x,y)$ 为 x,y 的二次可微函数,作自变量和因变量的变换,取 u,v 为新的自变量,$w = w(u,v)$ 为新的因变量,使得 $w = xz - y, u = \frac{x}{y}, v = x$,请将方程

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$$

变换成关于新变量 w,u,v 的方程.

解 由 $w = xz - y$ 得 $z = \frac{y}{x} + \frac{w}{x}$,两边对 y 求导得$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial u}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{x}{y^4}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}.$$

故 $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$,变为

$$\frac{2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{2}{z}-\frac{2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{2}{x},$$

即变为$\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$.

834.(北京大学) 设 $F(x,y,z)$ 有连续一阶偏导数,并满足不等式:

$$y\cdot\frac{\partial F}{\partial x}-x\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\geqslant a>0,\forall(x,y,z)\in R^3.$$

证明:当动点(x,y,z)沿着曲线 $\Gamma:x=-\cos t,y=\sin t,z=t,t\geqslant 0$ 趋于无穷远点时(即 $t\longrightarrow+\infty$ 时),$F(x,y,z)\longrightarrow\infty$

证 利用多元函数的泰勒公式:

$$\begin{aligned}F(x,y,z)&=F(-\cos t,\sin t,t)\\&=F(-1,0,0)+[F(-\cos t,\sin t,t)]'\mid_{t=0}\cdot(t-0)\\&=F(-1,0,0)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\sin t+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\cos t+\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_{t=0}\cdot t\\&=F(-1,0,0)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot y-\frac{\partial F}{\partial y}\cdot x+\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{t=0}\cdot t.\\&\geqslant F(-1,0,0)+at.\end{aligned}$$

故当 $t\to+\infty$ 时,$F(x,y,z)\to\infty$.

835.(华中师范大学) 设 $u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$ 存在连续偏导数,则函数 u,v 相关的充分必要条件是 $J=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$.

证 必要性 u,v 相关,则存在不全为零的实数 l_1,l_2,使

$l_1u+l_2v=0$,

对上式两项对 x,y 分别求导有:

$$\begin{cases}l_1\dfrac{\partial u}{\partial x}+l_2\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2ex]l_1\dfrac{\partial u}{\partial y}+l_2\dfrac{\partial v}{\partial y}=0.\end{cases}$$

假设 $J\neq 0$,则①关于 l_1,l_2 的方程组的解为 $l_1=0,l_2=0$.故 u,v 不相关,矛盾,从而 $J=0$.

充分性,假设 u,v 无关,在①式中知 $l_1=\dfrac{0}{J}\neq 0,l_2=\dfrac{0}{J}\neq 0$,从而 u,v 相关,矛盾.

836.(北京航空航天大学,2000 年) 设 $u=\ln(ax+by)$,求$\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$.

解　逐一求导有：$\dfrac{\partial^m u}{\partial x^m} = \dfrac{a^m}{(ax+by)^m}$,

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^n\left(\dfrac{a^m}{(ax+by)^m}\right)}{\partial y^n} = \frac{a^m \cdot b^n}{(ax+by)^{m+n}}.$$

837.(西北大学)　设函数 $F_i(u), i=1,2,3$ 可微，$A=|a_{ij}|$ 是一个三阶的函数行列式，其中 $a_{ij}=F_i(x_j), i,j=1,2,3$ 并且 x_3 是由方程 $x_2^2+x_3+\sin(x_2\cdot x_3)=1$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial A}{\partial x_1}$ 与 $\dfrac{\partial A}{\partial x_2}$ 在 $x_1=0, x_2=1, x_3=0$ 时的值.

解　$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = \begin{vmatrix} \dfrac{dF_1(x_1)}{dx_1} & F_1(x_2) & F_1(x_3) \\ \dfrac{dF_2(x_1)}{dx_1} & F_2(x_2) & F_2(x_3) \\ \dfrac{dF_3(x_1)}{dx_1} & F_3(x_2) & F_3(x_3) \end{vmatrix},$$

则 $$\left.\frac{\partial A}{\partial x_1}\right|_{(0,1,0)} = \begin{vmatrix} F'_1(0) & F_1(1) & F_1(0) \\ F'_2(0) & F_2(1) & F_2(0) \\ F'_3(0) & F_3(1) & F_3(0) \end{vmatrix}.$$

同理有 $$\left.\frac{\partial A}{\partial x_2}\right|_{(0,1,0)} = \left.\begin{vmatrix} F_1(x_1) & F'_1(x_2) & f'_1(x_3)\cdot\dfrac{dx_3}{dx_2} \\ F_2(x_1) & F'_2(x_2) & F'_2(x_3)\cdot\dfrac{dx_3}{dx_2} \\ F_3(x_1) & F'_3(x_2) & F'_3(x_3)\dfrac{dx_3}{dx_2} \end{vmatrix}\right|_{(0,1,0)}$$

其中 $\dfrac{dx_3}{dx_2}$ 可由方程 $x_2^2+x_3+\sin(x_2\cdot x_3)=1$ 求出并对上式两端求导有：

$2x_2^2+x'_3+\cos(x_2x_3)(x_3+x_2\cdot x'_3)=0.$

令 $x_2=1, x_3=0$，得 $\dfrac{dx_3}{dx_2}=x_3'=-1$

故 $$\left.\frac{\partial A}{\partial x_2}\right|_{(0,1,0)} = \begin{vmatrix} F_1(0) & F'_1(1) & -F_1(0) \\ F_2(0) & F'_2(1) & -F'_2(0) \\ F_3(0) & F'_3(1) & -F'_3(0) \end{vmatrix}.$$

838.(复旦大学，1999 年)　通过代换 $u=x-2\sqrt{y}, v=x+2\sqrt{y}$，变换方程：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}, (y>0).$$

解　由 $u = x - 2\sqrt{y}, v = x + 2\sqrt{y}$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^1 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \partial\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right).$$

从而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$

即为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{1}{2y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0,$

即　$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(u - v) = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}.$

839.（上海交通大学）　设 $u = f(x - y, y - z, z - x)$，假设 f 对其中变量有直到二阶的连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$.

解　令 $t = x - y, v = y - z, w = z - x$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial w}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial w}\right)\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial w}\right)\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial w} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial w}.$$

840.(长沙铁道学院) 设 $z = xy\varphi(u)$, $u = \sin\frac{y}{x}$,其中 $\varphi(u)$ 为可导函数,试证:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\varphi(u).$$

证 $\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi(u) - \frac{y^2}{x}\varphi'(u)\cos\frac{y}{x}.$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi(u) + y\varphi'(u)\cos\frac{y}{x}.$$

故 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\varphi(u).$

841.(上海交通大学) 设 $\begin{cases} x = e^u\cos v, \\ y = e^u\sin v, \\ z = uv. \end{cases}$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由 $x^2 + y^2 = (e^u\cos v)^2 + (e^u\sin v)^2 = e^{2u}$,得

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$$

又由 $\frac{y}{x} = \frac{e^u\sin v}{e^u\cos v}$ 得 $\operatorname{tg}v = \frac{y}{x}$, $v = \arctan\frac{y}{x}$,于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}v + u\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yv + xu}{x^2 + y^2}.$$

842.(清华大学) 设函数 $u(x)$ 是由方程组 $u = f(x,y)$, $g(x,y,z) = 0$, $h(x,z) = 0$ 所确定,且 $\frac{\partial h}{\partial z} \neq 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$,求 $\frac{du}{dx}$.

解 由 $g(x,y,z) = 0$, $h(x,z) = 0$ 对 x 求导有:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

解之得 $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} + \frac{\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial h}{\partial z}}.$$

再由 $u=f(x,y)$ 对 x 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}+\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}}.$$

843.(北京大学,1999 年) 设 $u=f(x,y,z)$, $g(x^2,e^y,z)=0$, $y=\sin x$ 且已知 f 与 g 都有一阶连续偏导数,$\frac{\partial g}{\partial z}\neq 0$,求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 u 有一阶连续偏导数,由复合函数求导有:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}. \qquad ①$$

由 $g(x^2,e^y,z)=0$,记 $v=x^2$, $w=e^y$,得

$$\frac{\partial g}{\partial v}\cdot 2x+\frac{\partial g}{\partial w}\cdot e^y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0. \qquad ②$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x, \qquad ③$$

$$y=\sin x. \qquad ④$$

由 ①,②,③,④ 式,可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos x-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial w}\cdot e^{\sin x}\cos x}{\frac{\partial g}{\partial z}}-\frac{2x\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial g}{\partial z}}.$$

844.(西北电讯工程学院)

设 f, F 可微,且 $\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$,求由 $\begin{cases}y=f(x,z),\\F(x,y,z)=0\end{cases}$ 所确定的函数 $y(x)$, $z(x)$ 的一阶导数.

解 $\begin{cases}y=f(x,z)\\F(x,y,z)=0\end{cases}$ 两端对 x 求导有 $\begin{cases}y'_x=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot z'_x,\\\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'_x+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot z'_x=0.\end{cases}$

从而可以解出:$y'_x=\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}}$,

$$z'_x=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

845.(华东师范大学,2000 年) 设 $z=z(x,y)$ 是曲线方程 $F(xyz,x^2+y^2+z^2)=0$ 所确定的可微隐函数,试求 $\mathrm{grad}z$.

解　设 $u = xyz, v = x^2 + y^2 + z^2$,
方程两边分别对 x, y 求导得:

$$F'u(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}) + F'v(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}) = 0,$$

$$F'u(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}) + F'v(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}) = 0.$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yzF_u' + 2xF_v'}{xyF_u' + 2zF_v'}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xzF_u' + 2yF_v'}{xyF_u' + 2zF_v'}$.

故 $gradz = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})$

$$= (-\frac{yzF_u' + 2xF_v'}{xyF_u' + 2zF_v'}, -\frac{xzF_u' + 2yF_v'}{xyF_u' + 2xF_v'}).$$

846.(中国科技大学)　设有方程 $\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1$, ①

证明　$(gradu)^2 = 2a \cdot gradu$,其中 $a = (x, y, z)$.

证　由题意可知方程 ① 确定隐函数 $u = u(x, y, z)$,在 ① 的两端同时对 x 求导可得:

$$\frac{2x}{a^2 + u} - \left[\frac{x^2}{(a^2 + u)^2}u_x' + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} \cdot u_x' + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \cdot u'_x\right] = 0.$$

解得 $u'_x = \frac{1}{G} \cdot \frac{2x}{a^2 + u}$,

其中 $G = \frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2}$.

同理可得: $u_y' = \frac{1}{G} \cdot \frac{2y}{b^2 + u} \cdot u_z' = \frac{1}{G} \cdot \frac{2z}{c^2 + u}$.

所以 $gradu = (u_x', u_y', u_z') = \frac{2}{G}(\frac{x}{a^2 + u}, \frac{y}{b^2 + u}, \frac{z}{c^2 + u}), 2a \cdot gradu$

$$= \frac{4}{G}(\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u})$$

$$\xlongequal{\text{由①}} \frac{4}{G}. \quad ②$$

而 $(gradu)^2 = gradu \cdot gradu$

$$= \frac{4}{G^2}[\frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2}]$$

$$= \frac{4}{G^2} \cdot G = \frac{4}{G}. \quad ③$$

比较 ②,③ 即得 $(gradu)^2 = 2a \cdot gradu$.

847.(东北师范大学)　证明:若 u 是 x,y,z 的函数且 $\varphi(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=0$,则 $\frac{u_x'}{x}+\frac{u_y'}{y}+\frac{u_z'}{z}=\frac{1}{u}$.

证　令 $R=u^2-x^2,s=u^2-y^2,t=u^2-z^2$.

$\varphi(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=0$ 两端同时对 x 求导有:

$\varphi_R'(2u\cdot u_x'-2x)+\varphi_s'\cdot 2u\cdot \varphi_x'+\varphi_t'\cdot 2u\cdot\varphi_x'=0.$

解得　$\varphi_x'=\frac{\varphi_R'x}{(\phi_R'+\varphi'_s+\varphi'_t)\cdot u}$

同理有　$u'_y=\frac{\varphi'_R x}{(\varphi'_R+\varphi'_s+\varphi'_t)u},u'_z=\frac{\varphi'_s y}{(\varphi'_R+\varphi'_s+\varphi'_t)u}$

所以　$\frac{\varphi'_x}{x}+\frac{\varphi'_y}{y}+\frac{\varphi'_z}{z}=\frac{1}{u}.$

848.(厦门大学)　设 $z=f(x,y),u=x+ay,v=x-ay,a$ 为常数,z 关于 u,v 具有二阶连续偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$.

解　由 $u=x+ay,v=x-ay$,有

$x=\frac{1}{2}(u+v),y=\frac{1}{2a}(u-v).$

故 $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2a}\frac{\partial z}{\partial y},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{2a}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})+\frac{1}{2a}(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2a}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})$$
$$=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{4a}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

849.(湖南大学)　设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy}),f$ 可微,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　设 $u=x^2-y^2,v=e^{xy}$,

则　$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial f}{\partial u}+ye^{xy}\frac{\partial f}{\partial v},$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-2y\frac{\partial f}{\partial u}+xe^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}.$

850.(西北工业大学)　设 $u=xf(x-y,xy^2)$,其中 f 具有连续的三阶偏导数,求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x-y,xy^2)+xf'_1(x-y,xy^2)+xy^2f'_2(x-y,xy^2),$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-f'_1+2xyf'_2-xf''_{11}+2x^2yf''_{12}+2xyf'_2-xy^2f''_{21}+2x^2y^3f''_{22}$$
$$=-f'_1+4xyf'_2-xf''_{11}+(2x^2y-xy^2)f''_{12}+2x^2y^2f''_{22}.$$

851.(**华中师范大学,2001年**)) 设f为可微函数,$u=f(x^2+y^2+z^2)$和方程$3x+2y^2+z^3=6xyz$ ①

试对以下两种情况,分别求$\frac{\partial u}{\partial x}$在点$p_0(1,1,1)$处的值.

(1) 由方程①确定了隐函数$z=z(x,y)$;

(2) 由方程①确定了隐函数$y=y(x,z)$.

解 (1) 由题知$z=z(x,y)$ 记$v=x^2+y^2+z^2$,则$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$.

在方程 $3x+2y^2+z^3=6xyz$ 两端对x求导有:

$$3+3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=6yz+6xy\frac{\partial z}{\partial x}.$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2yz-1}{z^2-2xy}$.

于是$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial v}(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial f}{\partial v}(2x+2z\cdot\frac{2yz-1}{z^2-2xy})$.

故 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{P_0}=0$.

(2) 对方程①两端对x求导有:

$3+4y\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=6xy+6xz\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$,

解得 $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{6yz-3}{4y-6xz}$.

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial v}(2x+2y\frac{\partial y}{\partial x})=\frac{\partial f}{\partial v}(2x+2y\cdot\frac{6yz-3}{4y-6xz})$,

则$\frac{\partial u}{\partial x}|_{P_0}=-\frac{\partial f}{\partial v}|_{P_0}$.

852.(**华中师范大学**) 设$f(x,y)$存在二阶连续导数,且

$f''_{xx}f''_{yy}-f''^2_{xy}\neq 0$.

证明变换$\begin{cases}u=f_x'(x,y),\\ v=f_y'(x,y),\\ w=-z+xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y).\end{cases}$

存在唯一的逆变换$\begin{cases}x=g'_u(u,v),\\ y=g'_v(u,v),\\ z=-w+ug'_u(u,v)+vg'_v(u,v).\end{cases}$

证 考虑 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{vmatrix}\neq 0$.

从而存在唯一的逆变换$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases}$

考虑 $x\mathrm{d}u + y\mathrm{d}v = x\mathrm{d}f_x'(x,y) + y\mathrm{d}f_y'(x,y)$

$= x(f''_{xx}\mathrm{d}x + f''_{yx}\mathrm{d}y) + y(f''_{xy}\mathrm{d}x + f''_{yy}\mathrm{d}y)$

$= (xf''_{xx} + yf''_{xy})\mathrm{d}x + (xf''_{yx} + yf''_{yy})\mathrm{d}y$

$= (xf_x' + yf_y' - f)_x'\mathrm{d}x + (xf_x' + yf_y' - f)_y'\mathrm{d}y$

$= \mathrm{d}(xf_x' + yf_y' - f)$

$= \mathrm{d}g$(令 $g = xf_x'$) $+ yf_y' - f = g(u,v)$.

另一方面 $\mathrm{d}g = g'_u\mathrm{d}u + g'_v\mathrm{d}u$(一阶微分形式不变性)

从而知 $\begin{cases} x = g'_u(u,v), \\ y = g'_v(u,v) \end{cases}$

而 $w = -z + ug_u(u,v) + vg'_v(u,v)$,

故 $z = -w + ug'_u(u,v) + vg'_v(u,v)$. 故证.

853.(武汉大学) 设 $F(x,y)$ 在点(x_0,y_0)的某邻域内有二阶连续的偏导数,且 $F(x_0,y_0)$, $F'_x(x_0,y_0) = 0$, $F'_y(x_0,y_0) > 0$, $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$.

证明:由方程 $F(x,y) = 0$ 确定的 x_0 的某邻域内的隐函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处达到局部极小值.

证 $f_x'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} = 0$,

对 $y = f(x)$ 由泰勒公式有:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2),$$

即 $f(x) - f(x_0) = \dfrac{1}{2}f''_{(x_0)}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$.

由 $f'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$,对 x 求导有

$$f''(x) = -\frac{1}{F_y'^2}\{[F''_{xx} + F''_{yx}f'(x)]F'_y - F'_x[F''_{xy} + F''_{yy}f'(x)]\}$$

则 $f''(x_0) = -\dfrac{1}{(F'_y(x_0,y_0)^2)}[F''_{xx}(x_0,y_0)F'_y(x_0,y_0)]$

$$= -\frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} > 0.$$

从而 $f(x) - f(x_0) = \dfrac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \geqslant 0$,

故 $f(x) \geqslant f(x_0)$,

即 $F(x,y) = 0$ 在 x_0 的某邻域的隐函数 $y = f(x)$ 达到局部极小值.

854.(天津大学) (1) 求方程组 $\begin{cases} u^3 + xv = y, \\ v^3 + yu = x \end{cases}$ 所确定隐函数 $u(x,y)$.

$v(x,y)$ 的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$ 和$\frac{\partial v}{\partial x}$;

(2) 设 $F(x,y)$ 满足隐函数存在定理的条件且存在二阶偏导数,求方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 的二阶导数.

解 (1) 由 $u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$ 方程$\begin{cases} u^3+xv=y, \\ v^3+yu=x \end{cases}$

两边同时对 x 求导有$\begin{cases} 3u^2\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\frac{\partial v}{\partial x}=0, \\ 3v^2\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}=1, \end{cases}$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x+3v^2}{9u^2v^2-xy},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{3u^2+vg}{9u^2v^2-xy},$

(2) 由 $y=y(x)$,对 $F(x,y)=0$ 两端对 x 求导有:

$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)f'(x)=0.$

再次求导有:$F''_{xx}(x,y)+F''_{xy}(x,y)f'(x)F'_y(x,y)$

$+f'(x)[F''_{yx}(x,y)+F''_{yy}(x,y)f'(x)]=0.$

故 $f''(x)=\frac{F_x'(x,y)(F''_{yx}(x,y)-(F''_{xy}(x,y)))}{(F'_y(x,y))^2}-\frac{F_{yy}''(x,y)(F'_x(x,y))^2}{(F'_y(x,y))^3}-\frac{F''_{xx}(x,y)}{F'_y(x,y)}.$

855.(**南京大学**) 设 z 由$\varphi(cx-az,cy-bz)=0$定义为 x,y 的隐函数,其中 φ 为二次连续可微,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 由 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 两边对 x 求导

$$\varphi'_1(c-a\frac{\partial z}{\partial x})-b\varphi'_2\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad ①$$

得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c\varphi'_1}{a\varphi'_1+b\varphi'_2}.$

①式两端再对 x 求导得

$$\left[\varphi''_{11}(c-a\frac{\partial z}{\partial x})-b\varphi''_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\right](c-a\frac{\partial z}{zx})-a\varphi'_1\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-$$

$$\left[\varphi''_{21}(c-a\frac{\partial z}{\partial x})-b\varphi''_{22}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial z}{\partial x}-b\varphi'_2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

解得:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{a\varphi'_1+b\varphi'_2}\left[\varphi''_{11}(c-a\frac{\partial z}{\partial x})-b\varphi''_{12}\frac{\partial z}{\partial x})(c-a\frac{\partial z}{\partial x})-(\varphi''_{21}(c-a\frac{\partial z}{\partial x})-b\varphi''_{22}\frac{\partial z}{\partial x})\frac{\partial z}{\partial x}\right].$$

$$=\frac{bc^2}{(a\varphi'_1+b\varphi'_2)^3}[b\varphi'_2(\varphi'_2\varphi''_{11}-\varphi'_1\varphi''_{12})-\varphi'_1(\varphi''_{21}\varphi'_2-\varphi''_{22}\varphi'_1)].$$

§3 多元微分学的应用

【考点综述】

一、综述

1. 泰勒定理 (1) 若 $f(x,y)$ 在点 $P_0=(x_0,y_0)$ 的邻域 $U(p_0)$ 内存在 $n+1$ 阶连续的偏导数，则 $\forall (x_0+h,y_0+k)\in U(p_0)$，有

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h,y_0+k) &= f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)\\
&+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots\\
&+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)\\
&+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)
\end{aligned}
$$

其中 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)=\sum_{p=0}^{m} c_m^p h^{m-p}k^p\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-p}\partial y^p}\Big|_{p_0}$

(2) 当 $x_0=0,y_0=0$ 时，相应二元函数 $f(x,y)$ 的麦克劳林公式为

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)+\cdots\\
&+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)\\
&+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta x,\theta y).
\end{aligned}
$$

2. 极值 (1) 定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $p_0=(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(p_0)$ 内有定义，如果 $\forall (x,y)\in U(p_0)$ 满足 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$ ($f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$)，则称 $f(x_0,y_0)f(x,y)$ 的极大值(极小值)，此时点 p_0 称为 $f(x,y)$ 的极大值点(极小值点)．极大值，极小值统称极值．

(2) 函数 $f(x,y)$ 在点 p_0 的偏导数存在，则 f 在 p_0 取得极值的必要条件为：$f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，满足上述条件的点 p_0 称为稳定点或驻点．

(3) 极值的充分条件，设函数 $f(x,y)$ 在点 $p_0=(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(p_0)$ 内具有二阶连续的偏导数，且 p_0 是 f 的稳定点．

记 $A=f''_{xx}(p_0)$，$B=f''_{xy}(p_0)$ $C=f''_{yy}(p_0)$ 则

(1) 当 $B^2-AC<0$ 时，函数 f 在 p_0 取得极值，若 $A<0$，则取极大值，若 $A>0$，则取极小值；

(2) 当 $B^2-AC>0$ 时，函数 f 在点 p_0 不取极值；

(3) 当 $B^2 - AC = 0$ 时，不能判定 f 在 p_0 是否极值；

(4) 记 $f(x,y)$ 在 p_0 的海塞(Hesse)矩阵为：

$$H_f(p_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f''_{xy} & f_{yy}'' \end{bmatrix}_{p_0}$$

条件如 2(3) 中条件，则

(1) 当 $H_f(p_0)$ 正定时，f 在 p_0 取得极小值；

(2) 当 $H_f(p_0)$ 负定时，f 在 p_0 取得极大值；

(3) 当 $H_f(p_0)$ 是非定号矩阵时，f 在 p_0 不取极值。

此结论推广到 n 元函数也成立。

3. 几何应用

(1) 平面曲线的切线与法线

平面曲线由方程　$F(x,y) = 0$ 给出，它在点 $p_0(x_0,y_0)$ 的切线与法线的方程. 切线方程为：$F'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$，

法线方程为：$F'_y(x_0,y_0)(x - x_0) - F'_x(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$.

(2) 空间曲线的切线与法平面

(ⅰ) 空间曲线 L 由参数方程

$L: x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha,\beta]$，

表出，假定 $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ 不全为零，则曲线 L 在 $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程式为：

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

法平面方程式为：$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$，

(ⅱ) 空间曲线 L 由方程式组

$$L: \begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

给出时，当 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}, \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$ 中至少一个不为零时.

则曲线 L 在点 p_0 的切线方程为：

$$\frac{(x - x_0)}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{p_0}} = \frac{(y - y_0)}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{p_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{p_0}},$$

法平面方程为：

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{p_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{p_0}(y - y_0) + \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{p_0}(z - z_0) = 0.$$

(3) 空间曲线的切平面与法线

设曲面由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，$p_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面上一点，并设函数 $F(x,y,z)$ 的偏导数在该点连续，且不同时为零，则曲面上点 P_0 处的切平面方程为：

$$F'_x(P_0)(x-x_0)+F'_y(P_0)(y-y_0)+F'_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{F'_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(P_0)}.$$

4. **条件极值.**

(1) 求条件极值的方法有两种：一种是将条件极值化为无条件极值的问题来解；另一种是用拉格朗日乘数法来解.

(2) 拉格朗日乘数法求二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值步骤如下：

(1) 作相应的拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

(2) 令 $L'_x=L'_y=L'_\lambda=0$ 即

$$\begin{cases} f_x'(x,y)+\lambda\varphi'_x(x_1,y)=0, \\ f_y'(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

(3) 求解上述方程组，得稳定点 $p_0(x_0,y_0)$.

(4) 判定该点是否为条件极值：如果是实际问题，可由问题本身的性质来判定，如不是实际问题，可用二阶微分判别.

3. 对于条件极值的一般情形，求函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在约束条件

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0. \end{cases}$$

(其中 $f,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$ 均具有一阶连续偏导数，且雅可比(*Jacobi*)矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

的秩为 m) 下的极值步骤如下：

(1) 作拉格朗日函数

$$L=f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_m\varphi_m.$$

(2) 分别令 $L'_{x_1} = L_{x_2}' = \cdots = L'_{x_n} = L'_{\lambda_1} = L_{\lambda_2}' = \cdots = L_{\lambda_m}' = 0$ 得到相应的方程组.

(3) 解上述方程组得到可能的条件极值点,再对这些点进行判定.

二、解题方法

1. 考点 1　求极值

解题方法:先求稳定点,再判别.

2. 考点 2　求几何图形的方程

解题方法:公式法.

3. 考点 3　求条件极值

解题方法:(1) 化为元条件极值问题求解;(2) 用拉格朗日乘积法.

【经典题解】

856.(武汉大学,2000 年)　求函数 $f = x^2 + y^2 + z^2$ 在 $ax + by + cz = 1$ 下的最小值.

解　作拉格朗日函数

$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(ax + by + cz - 1)$.

令 $L'_x = L'_y = L'_z = L'_\lambda = 0$,即

$$\begin{cases} 2x + \lambda a = 0, \\ 2y + \lambda b = 0, \\ 2z + \lambda c = 0, \\ ax + by + cz = 1. \end{cases}$$

解得唯一驻点

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad y = \frac{b}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad z = \frac{c}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \lambda = \frac{-2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

将它们代入 $f = x^2 + y^2 + z^2$ 得 $f = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$.

因此 f 在 $ax + by + cz = 1$ 下的最小值为

$$f_{\min} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

857.(武汉大学,1999 年)　求函数 $f(x, y, z) = xyz$ 在条件 $x + y = 1$ 及 $x - y + z^2 = 1$ 下的极值.

解 作拉格朗日函数

$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz + \lambda_1(x+y-1) + \lambda_2(x-y+z^2-1)$,

令 $L'_x = L'_y = L'_z = L'_{\lambda_1} = L'_{\lambda_2} = 0$ 得

$$\begin{cases} yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ xy + 2z\lambda_2 = 0, \\ x + y = 1, \\ x - y + z^2 = 1. \end{cases}$$

解得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, x = 1, y = 0, z = 0$ 或 $\lambda_1 = \sqrt{\frac{3}{10}}, \lambda_2 = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{10}}$, $x = \frac{2}{5}, y = \frac{3}{5}, z = -2\sqrt{\frac{3}{10}}$. 将它们代入 $f(x,y,z)$ 得其值分别为 0 和 $-\frac{12}{25}\sqrt{\frac{3}{10}}$, 故原函数在条件 $x+y=1$ 及 $x-y+z^2=1$ 下的极大值为 0, 极小值为 $-\frac{12}{25}\sqrt{\frac{3}{10}}$.

858.(清华大学,2000 年) 求 $ky^3 + zx$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1, z \geqslant 0$ 下的最大值和最小值.

解 作拉格朗日函数

$L(x,y,z,\lambda) = ky^3 + zx + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

令 $L'_x = L'_y = L'_z = L'_\lambda = 0$ 得

$$\begin{cases} z + 2\lambda x = 0, \\ 3ky^3 + 2\lambda y = 0, \\ x + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

解得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 0, z = \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda = -\frac{1}{2}$ 或

$x = \frac{1}{3|k|}\sqrt{\frac{9k^2-1}{2}}, y = \frac{1}{3k}, z = \frac{1}{3|k|}\sqrt{\frac{9k^2-1}{2}}, \lambda = -\frac{1}{2}$.

在点$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 有 $ky^3 + zx = \frac{1}{2}$, ①

在点$\left(\frac{1}{3|k|}\sqrt{\frac{9k^2-1}{2}}, \frac{1}{3k}, \frac{1}{3k}\sqrt{\frac{9k^2-1}{2}}\right)$有

$ky^3 + zx = \frac{1}{27k^2} + \frac{9k^2-1}{18k^2} = \frac{27k^2-1}{54k^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{54k^2} < \frac{1}{2}$. ②

又 $9k^2-1\geqslant 0$ 得 $k^2\geqslant\frac{1}{9}$，由②知当 $k^2=\frac{1}{9}$，即 $k=\frac{1}{3}$ 时，原函数有最小值 $\frac{1}{2}-\frac{1}{54\times\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$.

由①，②可得所求最大值为 $\frac{1}{2}$，最小值为 $\frac{1}{3}$.

859.（**复旦大学，1999 年**） 已知 $u=ax^2+by^2+cz^2$，其中 $a>0,b>0,c>0$. 求在条件 $x+y+z=1$ 下的极小值.

解 作拉格朗日函数

$L(x,y,z,\lambda)=ax^2+by^2+cz^2+\lambda(x+y+z-1)$.

令 $L'x=L'_y=L'_z=L'_\lambda=0$ 即

$$\begin{cases}2ax+\lambda=0,\\2by+\lambda=0,\\2cz+\lambda=0,\\x+y+z=1.\end{cases}$$

解得 $x=\frac{bc}{ab+bc+ac},y=\frac{ac}{ab+bc+ac}$,

$z=\frac{ab}{ab+bc+ac},\lambda=\frac{-2abc}{ab+bc+ac}$.

故所求最小值为 $u_{\min}=\frac{abc(bc+ac+ab)}{(ab+bc+ac)^2}=\frac{abc}{ab+bc+ac}$.

860.（**中山大学**） 求曲面 $z=xy-1$ 上距原点最近的点的坐标.

解 此即求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $z=xy-1$ 的限制下取得极小值的点的坐标，作拉格朗日函数

$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(z-xy+1)$.

令 $L'_x=L'_y=L'_z=L'_\lambda=0$，即

$$\begin{cases}2x-\lambda y=0,\\2y-\lambda x=0,\\2z+\lambda=0,\\z-xy+1=0\end{cases}$$

解得 $x=0,y=0,z=-1,\lambda=2$.

故曲面 $z=xy-1$ 上距原点最近的点的坐标为 $(0,0,-1)$.

861.（**北京科技大学，2001 年**） 求 $z=2x^2-8x-2y+9$ 在 $D:2x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大值和最小值.

解 1° 先求函数 $z(x,y)$ 在区域 D 内部 $2x^2+y^2<1$ 的可疑点

令 $f_x'=f_y'=0$，得

$$\begin{cases}4x-8=0,\\2y-2=0.\end{cases}$$

解得 $x=2, y=1$，而点 $(2,1)$ 不在区域 D 内部 $2x^2+y^2<1$，从而 $z(x,y)$ 在区域内部没有 极值点，最大值，最小值只能在区域 D 的边界

$2x^2+y^2=1$ 上达到.

2° 再求 $z(x,y)$ 在边界上的极值，为此，作拉格朗日函数.

$L(x,y,\lambda)=2x^2+y^2-8x-2y+9+\lambda(2x^2+y^2-1)$

令 $L'_x=L'_y=L'_\lambda=0$，得

$$\begin{cases}4x-8+4\lambda x=0,\\2y-2+2\lambda y=0,\\2x^2+y^2-1=0.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\y=\dfrac{1}{3},\\\lambda=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{2}{3},\\y=-\dfrac{1}{3},\\z=-4.\end{cases}$

所以 $z(x,y)$ 在 $x^2+y^2=1$ 上的最大值为 16，最小值为 4，故 $z(x,y)$ 在 $D:2x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大值和最小值为

$z_{\max}=16, z_{\min}=4.$

862. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它为一边旋转成一个圆柱体，问矩形的边长各为多少时，才可使圆柱的体积为最大.

解法 1 化为无条件极值问题求解.

设矩形的长和宽分别为 x,y，则 $x+y=p$，旋转所得圆柱体的体积为 $V=\pi x^2y$，即 $V=\pi x^2(p-x)$，$(x>0)$.

令 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\pi x(2p-3x)=0$，得 $x=\dfrac{2}{3}p$，$x=0$（舍去）.

令 $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\Big|x=\dfrac{2}{3}p=(2\pi p-6\pi x)\Big|_{x=\frac{2}{3}p}=-2\pi p<0.$

故矩形的长和宽分别为 $\dfrac{2}{3}p$，$\dfrac{p}{3}$ 时取最大体积，且最大体积 $V=\dfrac{4\pi p^3}{27}$.

解法 2 用拉格朗乘数法

设 $L(x,y,\lambda)=\pi x^2y+\lambda(x+y-p)$，$L'_x=L'_y=L'_\lambda=0$.

解得 $x=\dfrac{2}{3}p$，$y=\dfrac{1}{3}P$，故矩形长为 $\dfrac{2}{3}p$，宽为 $\dfrac{1}{3}p$，最大体积

$V=\dfrac{4\pi p^3}{27}$.

863.(西北工业大学,华中理工大学,1997年)　在直线 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 位于第一象限的那一部分上求一点,使该点横坐标的余弦与纵坐标的余弦的乘积最大,并求出此最大值.

解法1　令　$f(x,y)=\cos x\cos y$,而 $x+y=\frac{\pi}{2}$,则

$$f(x,y)=\cos x\cos(\frac{\pi}{2}-x)$$
$$=\cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,$f(x,y)$ 取得最大值$\frac{1}{2}$,横坐标 $y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{4}$.

解法2　用拉格朗日乘数法

设 $L(x,y,\lambda)=\cos x\cos y+\lambda(x+y-\frac{\pi}{2})$,

令 $L'_x=L'_y=L'_\lambda=0$,得

$$\begin{cases}-\sin x\cos y+\lambda=0,\\ -\cos x\sin y+\lambda=0,\\ x+y=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

解得　$x=y=\frac{\pi}{4},\lambda=\frac{1}{2}$.

故 $f(x,y)$ 在点$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$的横坐标的余弦与纵坐标的余弦的乘积最大,且最大值为$\frac{1}{2}$.

864.(华中理工大学,2000年)　求直线 $4x+3y=16$ 与椭圆 $18x^2+5y^2=45$ 之间的最短距离.

解法1　设直线$4x+3y=k$与椭圆$18x^2+5y^2=45$有且只有唯一交点,则二次方程

$$18x^2+5(\frac{k-4x}{3})^2=45,$$

有且只有唯一解.

$$1600k^2-4\cdot 242(5k^2-45\cdot 9)=0,$$
$$k^2=121,$$
$$k=\pm 11$$

当 $k=11$ 时,$4x+3y=16$ 与 $4x+3y=11$ 之间的距离 $d_1=1$.

当 $k=-11$ 时,$4x+3y=16$ 与 $4x+3y=-11$ 之间距离 $d_2=\frac{27}{5}$.

故所求最短距离为 1.

解法 2　设椭圆上的点为 (x_1,y_1). 则 (x_1,y_1) 到 $4x+3y=16$ 的距离为 $d=\frac{|4x_1+3y_1-16|}{5}$, 原问题转化为求 $f(x_1,y_1)=\frac{|4x_1+3y_1-16|}{5}$ 在限制条件 $18x^2+5y_1^2=45$ 下的最小值. 作拉格朗日函数

$L(x_1,y_1,\lambda)=\frac{1}{5}|4x_1+3y_1-16|+\lambda(18x_1^2+5y_1^2-45)$.

令 $L'_{x_1}=L'_{y_1}=L'_\lambda=0$, 解得 $x_1=\frac{10}{11}, y_1=\frac{27}{11}, \lambda=-\frac{11}{450}$, 或

$x_1=\frac{-10}{11}, y_1=\frac{-27}{11}, \lambda=\frac{11}{450}$, 分别代入 $f(x_1,y_1)$ 得

$d_1=1, d_2=\frac{27}{5}$, 故所求最短距离为 1.

865.(中国科学院,2001 年)　设 V 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面和三个坐标平面所围成的区域的体积, 求 V 的最小值.

解　过点 (x,y,z) 点的切平面方程为

$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0$,

即

$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1$.

此平面在坐标轴上截距分别是 $\frac{a^2}{x},\frac{b^2}{y},\frac{c^2}{z}$.

切平面与坐标轴围成的四面体的体积为 $V=\frac{a^2b^2c^2}{6xyz}$.

因此求 V 的最小值, 只须求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在限制条件

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 之下的最大值, 为此, 作拉格朗日函数

$L(x,y,z,\lambda)=xyz-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$,

令 $L'_x=L'_y=L'_z=L'_\lambda=0$, 得

$$\begin{cases} yz - \lambda \dfrac{2x}{a^2} = 0, \\ xz - \lambda \dfrac{2y}{b^2} = 0, \\ xy - \lambda \dfrac{2z}{c^2} = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases}$$

解得 $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a, y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}b, z = \dfrac{\sqrt{3}}{3}c, \lambda = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}abc.$

故 $V_{\min} = \dfrac{a^2b^2c^2}{6xyz} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}abc.$

866.(中国科学院,2002 年) 求两曲面 $x + 2y = 1$ 和 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 的交线上距原点最近的点.

解法 1 化为无条件极值问题.

设(x, y, z)为交线上的一点,则 p 到原点的距离的平方为

$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - y^2 = f(y)$ $(\because x^2 + y^2 = 1 - 2y^2)$

令 $f_y' = 2y = 0$,得 $y = 0$,由此得 $x = 1, z = 0$.

即交线上距离最近的点为(1,0,0).

解法 2 用拉格朗日乘数法

设$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$

$= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + 2y - 1) + \lambda_2(x^2 + 2y^2 + z^2 - 1).$

令 $L'_x = L'_y = L'_z = L'_{\lambda_1} = L'_{\lambda_2} = 0$,得

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0, \\ 2y + 2\lambda_1 + 4y\lambda_2 = 0, \\ 2z + 2z\lambda = 0, \\ x + 2y = 1, \\ x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

解得 $x = 1, y = 0, z = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1,$

故交线上距原点最近的点为(1,0,0).

867.(北京航空航天大学,2000 年) 在曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$,且 $x_0 \geqslant 0, y_0 \geqslant 0, z_0 \geqslant 0$使该点处曲面的切平面与三坐标面围成的四面体的体积最小.

解 过点(x_0, y_0, z_0)的切平面方程为

$x_0(x - x_0) + y_0(y + y_0) + z_0(z - z_0) = 0,$

即 $x_0x + y_0y + z_0z = 1$，此平面与三坐标轴截距为$\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{z_0}$，

因此四面体的体积 $V = \frac{1}{x_0y_0z_0}$.

原问题化为求 V 在限制条件$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ 下的极小值点

作拉格朗日函数

$$L(x_0, y_0, z_0, \lambda) = \frac{1}{x_0y_0z_0} + \lambda(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1).$$

令 $L'_{x_0} = L'_{y_0} = L'_{x_0} = L'_\lambda = 0$ 得

$$\begin{cases} -\frac{1}{x_0^2y_0z_0} + 2\lambda x_0 = 0, \\ -\frac{1}{x_0{y_0}^2z_0} + 2\lambda y_0 = 0, \\ -\frac{1}{x_0y_0z_0^2} + 2\lambda z_0 = 0, \\ x_0^2 + {y_0}^2 + z_0^2 = 1. \end{cases}$$

解得　$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $p_0 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$，且最小体积为

$$V_{\min} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 3\sqrt{3}.$$

868.（中国科技大学）　在椭球$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$的内接长方体中，求体积最大的一个.

解　由对称性，我们只须考虑长方体在第一卦限部分的最大体积，设 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 为所求长方体在第一卦限的顶点，则长方体在第一卦限的体积为 $V_1 = x_0y_0z_0$，为此，作拉格朗日函数

$$L(x_0, y_0, z_0, \lambda) = x_0y_0z_0 + \lambda(\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1).$$

令 $L'_{x_0} = L'_{y_0} = L'_{z_0} = L'_\lambda = 0$ 得

$$\begin{cases} y_0 z_0 + \dfrac{2\lambda x_0}{a^2} = 0, \\ x_0 z_0 + \dfrac{2\lambda y_0}{b^2} = 0, \\ x_0 y_0 + \dfrac{2\lambda z_0}{c^2} = 0, \\ \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0{}^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases}$$

解得 $x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, y_0 = \dfrac{b}{\sqrt{3}}, z_0 = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

故 $V_1 |_{\max} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} abc$,所求长方体的最小体积

$V_{\max} = 8V_1 |_{\max} = \dfrac{8}{3\sqrt{3}} abc$.

869.(北京航空航天大学,2001 年) 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 所截成一椭圆,求原点至该椭圆的最近,最远距离.

解 求函数 $f(x,y) = x^2 + y^2$ 在限制条件

$z = x^2 + y^2$ 及 $x + y + z = 1$ 下的极值.为此,作拉格朗日函数

$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - z) + \lambda_2(x + y + z - 1)$.

令 $L'_x = L'_y = L'_{\lambda_1} = L'_{\lambda_2} = 0$ 得

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \\ 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \\ x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

解得 $(x,y,z) = (\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3})$ 此时 $f(x,y) = 2+\sqrt{3}$ 或 $(x,y,z) = (\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3})$,此时 $f(x,y) = 2-\sqrt{3}$.故所求的最近距离为$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$,最远距离为$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

870.(清华大学) 利用导数证明周长一定的三角形中以等边三角形的面积最大.

证 设三角形三边分别为 x,y,z.其周长为定数 $2p$,则面积

$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$

所求为 S 在限制条件 $x + y + z = 2p$ 下的极大值,为此,作拉格朗日函数

$L(x,y,z,\lambda)=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}-\lambda(x+y+z-2p)$.

令 $L'_x=L'_y=L'_z=L'_\lambda=0$ 得

$$\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{p(p-y)(p-z)}}{2\sqrt{p-x}}-\lambda=0,\\ -\dfrac{\sqrt{p(p-x)(p-z)}}{2\sqrt{p-y}}-\lambda=0,\\ -\dfrac{\sqrt{p(p-x)(p-y)}}{2\sqrt{p-z}}-\lambda=0,\\ x+y+z=2p.\end{cases}$$

解得 $x=y=z=\dfrac{2p}{3}$,此时 $S_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{9}p^2$.

871.(山东化工学院) 设有两个正数 x 与 y 之和为定值,求函数 $f(x,y)=\dfrac{x^n+y^n}{2}$ 的极值,并证明$\dfrac{x^n+y^n}{2}\geqslant(\dfrac{x+y}{2})^n$,其中 $n\in z^+$.

证 (1) 设 $x+y=a$,由拉格朗日乘数法,令

$L(x,y,\lambda)=\dfrac{x^n+y^n}{2}-\lambda(x+y-a)$.

由$\begin{cases}L'_x=\dfrac{n}{2}x^{n-1}-\lambda=0,\\ L'_y=\dfrac{n}{2}y^{n-1}-\lambda=0,\\ x+y=a.\end{cases}$

解得唯一稳定点 $x=y=\dfrac{a}{2}$,用极值判别法可得 $f(x,y)$ 有唯一极值 $f(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2})=(\dfrac{a}{2})^n$.

由于$f(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2})<f(a,0)=\dfrac{a^n}{2}=f(0,a)$,所以当 $x=y=\dfrac{a}{2}$ 时,

$f(x,y)$ 取最小值$(\dfrac{a}{2})^n$.

(2) 由上可知$f(x,y)=\dfrac{x^n+y^n}{2}$,只有当 $x=y=\dfrac{a}{2}=\dfrac{x+y}{2}$ 时取最小值,即$\dfrac{x^n+y^n}{2}\geqslant(\dfrac{a}{2})^n=(\dfrac{x+y}{2})^n$.

872.(华东师范大学,1999 年) 用条件极值法证明不等式:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\geqslant(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^n,(x_k>0,k=1,2,\cdots,n)$$

证　令 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}$，设 $x_1+x_2+\cdots x_n=r(r>0)$. 下求 f 在 $x_1+x_2+\cdots x_n=r(r>0)$ 下的极值，为此，作拉格朗日函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-r)$$

令　$L'_{x_1}=L'_{x_2}=\cdots=L'_{x_n}=L'_\lambda=0$，得

$$\begin{cases}\dfrac{2x_1}{n}+\lambda=0,\\ \dfrac{2x_2}{n}+\lambda=0,\\ \cdots\\ \dfrac{2x_n}{n}+\lambda=0,\\ x_1+x_2+\cdots+x_n=r.\end{cases}$$

解得　$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{r}{n}$.

故 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)\geqslant f_{\min}=\dfrac{(\frac{r}{n})^2+\cdots(\frac{r}{n})^2}{n}$

$=\dfrac{r^2}{n^2}=(\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n})^2$.

873.（北京科技大学，1998 年）　求 $u=x^2-y^2+2xy$ 在有界区域 $x^2+y^2\leqslant1$ 上的最大值与最小值.

解

令 $\begin{cases}u'_x=2x+2y=0\\ u'_y=-2y+2x=0\end{cases}$ 解得 $x=y=0$，得驻点 $(0,0)$.

且 $u(0,0)=0$.

再考虑在边界上 $x^2+y^2=1$，令 $x=\cos\theta, y=\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$

则

$$u=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\cos2\theta+\sin2\theta=\sqrt{2}\sin(2\theta+\frac{\pi}{4}).$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ 时，u 有最大值 $\sqrt{2}$，当 $\theta=\dfrac{5}{8}\pi$ 时，u 有最小值 $-\sqrt{2}$. 再与 $u(0,0)$ 比较，则

$u_{\max}=\sqrt{2}, u_{\min}=-\sqrt{2}$.

874.（兰州大学）　写出函数 $f(x,y)=y^{2^x}$ 在点 $(1,1)$ 附近的 *Taylor* 公式，（写出二阶项，余项形式可不具体写出）.

解 $f(1,1)=1$,

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=y^{2^x}2^x\ln y\ln 2\mid_{(1,1)}=0$,

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=y^{2^x}\cdot\frac{2^x}{y}\mid_{(1,1)}=2$,

$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=y^{2^x}\ln y\ln^2 2(2^x\ln y+1)\mid_{(1,1)}=0$,

$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=y^{2^x}\frac{2^x\ln 2}{y}(2^x\ln y+1)\mid_{(1,1)}=2\ln 2=\frac{\partial^2 f}{2y\partial x}\mid_{(1,1)}$,

$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}=\left.y^{2^x}\frac{2^x}{y^2}(2^x-1)\right|_{(1,1)}=2$.

所以

$$f(x,y)=f(1,1)+\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(1,1)$$

$$+\frac{1}{2!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(1,1)+o(\rho^2)$$

$$=1+2(y-1)+\ln 2(x-1)(y-1)+(y-1)^2+o(\rho^2).$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

875.(北京大学,1994年) 写出函数 $u=e^x\cos y$ 在(0,0)点邻域带皮亚诺余项的四阶台劳公式.

解
$$u=f(x,y)=e^x\cos y=f(0,0)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(0,0)+\frac{1}{3!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3f(0,0)$$

$$+\frac{1}{4!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^4f(0,0)+o(\rho^4),$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

而 $f(0,0)=1,\frac{\partial f}{\partial x}\mid_{(0,0)}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mid_{(0,0)}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\mid_{(0,0)}=\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\mid_{(0,0)}=1$,

$\frac{\partial f}{\partial y}\mid_{(0,0)}=0,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mid_{(0,0)}=-1,\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_{(0,0)}=0,\left.\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right|_{(0,0)}=1,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=0$,

$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right|_{(0,0)}=0,\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mid_{(0,0)}=-1,\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\mid_{(0,0)}=0,\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\mid_{(0,0)}=0$,

从而

$$u=f(x,y)=e^x\cos y=1+x+\frac{1}{2!}(x^2-y^2)+\frac{1}{3!}(x^3-2xy^2)$$

$$+\frac{1}{4!}(x^4-6x^2y^2+y^4)+o(\rho^4)$$

876.(北京大学)　设 $F(x,y,z)$ 有连续各阶偏导数，并满足不等式 $y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\geq a>0,\forall(x,y,z)\in R^3$，其中 a 为常数.

证明：当动点 (x,y,z) 沿着曲线 $\Gamma: x=\cos t, y=\sin t, z=t, t\geq 0$，趋于无穷远点时(即 $t\longrightarrow+\infty$)时，$F(x,y,z)\longrightarrow+\infty$.

证　应用多元函数的泰勒公式，考虑

$$F(x,y,z)=F(-\cos t,\sin t,t)$$
$$=F(-1,0,0)+[f(-\cos t,\sin t,t)]'|_{t=t_0}\cdot t$$
$$=F(-1,0,0)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sin t+\frac{\partial F}{\partial y}\cos t+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot 1\right)\Big|_{t=t_0}\cdot t$$
$$=f(-1,0,0)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sin t_0+\frac{\partial F}{\partial y}\cos t_0+\frac{\partial F}{\partial z}\right)\cdot t.$$

记　$(-\cos t_0,\sin t_0,t_0)=(x_0,y_0,z_0)$，得

$$F(x,y,z)=F(-1,0,0)+\left(y_0\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\right)\cdot t.$$
$$\geq F(-1,0,0)+at$$

故当 $t\longrightarrow+\infty$ 时，$F(x,y,z)\longrightarrow+\infty$.

877.(大连海运学院，中国人民大学，2000年)　证明函数

$z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值，而没有任何极小值.

证　由

$$\begin{cases}f_x'=-(1+e^y)\sin x=0,\\ f_y'=(\cos x-y-1)e^y=0\end{cases}$$

得无穷多个稳定点 $(n\pi,(-1)^n-1)$.$(n=0,\pm1,\pm2)$.

(1) 当 $n=2k$ 时，对应驻点为 $(2k\pi,0)$ 此时

$A=(1+e^y)(-\cos x)|_{(2k\pi,0)}=-2$,

$B=-e^y\sin x|_{(2k\pi,0)}=0$,

$C=(\cos x-y-z)e^y|_{(2k\pi,0)}=-1$.

$B^2-AC<0, A<0$，因此函数在 $(2k\pi,0)$ 有极大值，且极大值为 $f(2k\pi,0)=2$.

(2) 当 $n=2k+1$ 时，对应驻点为 $((2k+1)\pi,-2)$. 此时

$A=1+e^{-2}, B=0, C=-e^{-2}$

$B^2-AC=e^{-2}(1+e^{-2})>0$，函数在这些点无极值，即证

878.(华中师范大学，2001年)　设 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内有二阶连续的偏导数，且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq 0$.

证明：$z = f(x,y)$ 的最大值，最小值只能在区域的边界上取得.

证　因 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，故由连续函数的最值性知 $f(x,y)$ 在 D 上一定可取得最大值和最小值，下证 $f(x,y)$ 在 D 的内部不能取得极值，这里只须证明在 D 内任何点 (x,y) 处 $B^2 - AC > 0$ 即可.

设 $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, c = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 对 D 内任何点 (x,y) 由于 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$，即 $A + C = 0$.

而 $A \cdot C \leqslant \frac{(A+C)^2}{4}$，故 $A \cdot C \leqslant 0$，

又 $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \neq 0$，所以 $B^2 - AC > 0$.

故 $f(x,y)$ 不可能在 D 内部取得极值，从而 $F(x,y)$ 的最大值和最小值只能在 D 的边界上取得.

879.（四川大学）　在已知三角形内求一点，使该点至三个顶点的距离的平方和最小.

解　设三角形三顶点的坐标分别是 $A(a_1,b_1), B(a_2,b_2), C(a_3,b_3)$ 在 $\triangle ABC$ 内任取一点 $M(x,y)$ 取 $\rho = \sum_{i=1}^{3}[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2]$. 则

$$\rho_x' = \sum_{i=1}^{3} 2(x-a_i), \rho_y' = \sum_{i=1}^{3} 2(y-b_i),$$

由极值存在的必要条件，令 $\rho'_x = \rho'_y = 0$，得

$$x_0 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, y_0 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}.$$

另外极值可疑点还有三顶点 A, B, C. 以 A 为例，将 $M_0(x_0,y_0)$ 与 A 点比较，由余弦定理

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM_0}^2 + \overline{M_0B}^2 - \overline{2AM_0} \cdot \overline{M_0B}\cos\theta_1,$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM_0}^2 + \overline{M_0C}^2 - \overline{2AM_0} \cdot \overline{M_0C}\cos\theta_2,$$

由初等几何知 θ_1, θ_2 为钝角，故

$$\overline{AB}^2 > \overline{AM_0}^2 + \overline{M_0B}^2; \overline{AC}^2 > \overline{AM_0}^2 + \overline{M_0C}^2,$$

从而 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 > \overline{2AM_0}^2 + \overline{BM_0}^2 + \overline{CM_0}^2 > \overline{AM_0}^2 + \overline{BM_0}^2 + \overline{CM_0}^2$.

这说明 A 点到三顶点的距离平方和大于 M_0 点到三顶点的距离的平方和，则 M_0 即为所求.

880.（西北工业大学）　在平面上求一点，使它到 n 个定点 (x_1,y_1)，$(x_2,y_2), \cdots, (x_n,y_n)$ 的距离之平方和最小.

解　设所求之点为 (x,y)，则由题设有

$$f(x,y) = (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + \cdots$$
$$+ (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2.$$

$$f_x' = 2nx - 2\sum_{i=1}^{n} x_i, f_y' = 2ny - 2\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

令 $f_x' = f_y' = 0$ 得 $x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, y_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

而 $f''_{xx} = 2n = A, f''_{xy} = 0 = B, f''_{yy} = 2n = C$.

于是有 $B^2 - AC = 0 - 4n^2 < 0$,且 $A = 2n > 0$.

故 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0),即在 $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$ 处取得极小值,亦即为最小值.

881.(华东石油学院) 求内接于半径为 a 的半球的最大长方体的体积.

解 由对称性,我们只须求第一卦限部分的最大体积,设顶点坐标为 (x,y,z),其中 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$,于是有

$$V_1 = xyz = xy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{a^2 y - 2x^2 y - y^3}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{a^2 x - 2xy^2 - x^3}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

由极值存在的必要条件可得($x = 0$ 及 $y = 0$ 舍去)

$$\begin{cases} a^2 - 2x^2 - y^2 = 0, \\ a^2 - 2y^2 - x^2 = 0. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \\ y = \frac{a}{\sqrt{3}}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{a}{\sqrt{3}}, \\ y = -\frac{a}{\sqrt{3}}. \end{cases}$ 只取正的得 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}a. \end{cases}$

故 $V_{1_{\max}} = \frac{\sqrt{3}}{9}a^3, V_{\max} = 4V_{1_{\max}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}a^3$.

882.(厦门大学,2002 年) 证明不等式

$$e^y + x\ln x - x - xy \geq 0, (x \geq 1, y \geq 0).$$

证 令 $f(x,y) = e^y + x\ln x - x - xy$,则我们只须证明函数 $f(x,y)$ 在区域

$D = \{(x,y) \mid x \geq 1, y \geq 0\}$ 上有最小值 0 即可.

令 $f_x' = f_y' = 0$. 得 $x = e^y$,由此可见函数 $f(x,y)$ 的最小值只能在曲线 $x = e^y$ 上达到,且

$$f(e^y, y) = e^y + e^y y - e^y - e^y = 0,$$

因此，在 D 上 $f(x,y)\geqslant 0$，即证.

883.（复旦大学，1999 年）　在曲面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1(x>0,y>0,z>0)$ 上求一点，使过该点的切平面在三个坐标轴上的截距平方和最小.

解　在曲面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1,(x>0,y>0,z>0)$ 上任取一点 (x_0,y_0,z_0)，过该点的切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+\frac{z_0}{2}(z-z_0)=0.$$

该切平面在三个坐标轴上的截距分别为

$$\frac{\frac{z_0^2}{2}+2y_0^2+2x_0^2}{2x_0},\quad\frac{\frac{z_0^2}{2}+2y_0^2+2x_0^2}{2y_0},\quad\frac{\frac{z_0^2}{2}+2y_0^2+2x_0^2}{\frac{z_0^2}{2}}.$$

也即为

$$\frac{1}{x_0},\frac{1}{y_0},\frac{4}{z_0}.$$

令 $f(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{1}{x_0^2}+\dfrac{1}{y_0^2}+\dfrac{16}{z_0^2}$，原问题即求在限制条件 $x_0^2+y_0^2+\dfrac{z_0^2}{4}=1$，$(x_0>0,y_0>0,z_0>0)$ 下的使 $f(x_0,y_0,z_0)$ 取得最小值的 (x_0,y_0,z_0). 为此，作拉格朗日函数

$$L(x_0,y_0,z_0,\lambda)=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}+\lambda\left(x_0^2+y_0^2+\frac{z^2}{4}-1\right).$$

令 $L'_{x_0}=L'_{y_0}=L'_{z_0}=L'_\lambda=0$，得

$$\begin{cases}-\dfrac{2}{x_0^3}+2\lambda x_0=0,\\[2mm] -\dfrac{2}{y_0^3}+2\lambda y_0=0,\\[2mm] -\dfrac{32}{z_0^3}+\dfrac{\lambda}{2}z_0=0,\\[2mm] z_0^2+y_0^2+\dfrac{z_0^2}{4}-1=0.\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2}, \\ y_0 = \dfrac{1}{2}, \\ z_0 = \sqrt{2}, \\ \lambda = 16. \end{cases}$$

故所求的点为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2})$，且过该点的切平面在三个坐标轴上的截距平方和最小值为$f_{\min} = 16$.

884.(大连工学院)　求曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 上与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线方程.

解　平面 $x + 2y + z = 4$ 的法向量为 $\vec{n} = \{1,2,1\}$，而曲线 $x = t$, $y = -t^2, z = t^3$ 的切向量为 $\vec{\tau} = \{1,-2t,3t^2\}$ 当曲线的切线与已知平面平行时，有 $\vec{n} \perp \vec{\tau}$，故 $\vec{n}\cdot\vec{\pi} = 0$，即 $1 - 4t + 3t^2 = 0$，得 $t = 1$ 与 $t = \frac{1}{3}$.

(1) 当 $t = 1$时，过曲线上的点$(1,-1,1)$的切线，其方向数为 $\vec{\tau} = \{1,-2,3\}$ 切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}.$$

(2) 当 $t = \frac{1}{3}$ 时，过曲线上的点$(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27})$ 的切线；方向数为 $\vec{\tau} = \{1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\}$ 切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{3}}{1} = \frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$$

即　$$\frac{3x-1}{3} = \frac{9y+1}{-6} = \frac{27z-1}{9}.$$

885.(北京科技大学，1999年)　求曲线$f(x) = \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 6, \\ x+y+z = 0 \end{cases}$在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解　设 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6, G(x,y,z) = x + y + z$.

则 $F_x' = 2x, F_y' = 2y, F_z' = 2z, G_x' = G_y' = G_z' = 1$.

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)} = -6,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M = \left|\begin{matrix}2z & 2x\\ 1 & 1\end{matrix}\right|_{(1,-2,1)} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M = \left|\begin{matrix}2x & 2y\\ 1 & 1\end{matrix}\right|_{(1,-2,1)} = 6.$$

所以曲线 $f(x)$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{6},$$

法平面方程为

$$-6(x-1)+6(z-1)=0.$$

886.(北京科技大学,2001 年)　求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+ze^z=2,\\ x^2+xy+y^2=1\end{cases}$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的切线方程.

解　令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+ze^z-2, G(x,y,z)=x^2+xy+y^2-1.$

则 $F'_x=2x, F'_y=2y, F'_z=e^z(1+z),$

$G'_x=2x+y, G'_y=x+2y, G'_z=0.$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,-1,0)} = \left|\begin{matrix}2y & e^z(1+z)\\ x+2y & 0\end{matrix}\right|_{(1,-1,0)} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{(1,-1,0)} = \left|\begin{matrix}e^z(1+z) & 2x\\ 0 & 2x+y\end{matrix}\right|_{(1,-1,0)} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,-1,0)} = \left|\begin{matrix}2x & 2y\\ 2x+y & x+2y\end{matrix}\right|_{(1,-1,0)} = 0.$$

故曲线在 $(1,-1,0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}.$$

887.(武汉水利电力学院)　已知平面 $lx+my+nz=p$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相切,证明 $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=p^2$.

证　椭球面过 (x_1,y_1,z_1) 点的切平面为

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y+\frac{z_1}{c^2}z=1,$$

两边同乘 p 得 $p\frac{x_1}{a^2}x+p\frac{y_1}{b^2}y+p\frac{z_1}{c^2}z=p$

因该平面与平面 $lx+my+nz=p$ 均是过 (x_1,y_1,z_1) 的切平面,故须

$$l=p\frac{x_1}{a^2}, m=p\frac{y_1}{b^2}, n=p\frac{z_1}{c^2},$$

$\therefore x_1 = \dfrac{a^2 l}{p}, y_1 = \dfrac{b^2 m}{p}, z_1 = \dfrac{c^2 n}{p}.$

再将它们代入已知平面方程即 $lx + my + nz = p$,即有

$a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 = p^2.$

888.(浙江工学院,东北师范大学)　证明:若函数 $F(u,v)$ 有连续的偏导数,则曲面 $S: F(nx - lz, ny - mz) = 0$ 上任一点的切平面都平行于直线

$L: \dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}.$

证　令 $u = nx - lz, v = ny - mz.$

则 $F_x' = nF_u', F_y' = nF_v', F_z' = -lF_u' - mF_v'.$

故曲面 S 上任一点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量为:

$\vec{n} = \{F_x', F_y', F_z'\} = \{nF_u', nF_v', -lF_u' - mF_u'\}.$

又直线 L 的方向数为 $\vec{\tau} = \{l, m, n\}$,

所以 $\vec{n} \cdot \vec{\tau} = nlF_u' + nmF_v' - nlF_u' - nmF_v' = 0$,即 $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ 从面直线 L 平行于曲面 S 在点 P_0 处的切平面.

889.(合肥工业大学)　试证曲面 $xyz = a^2$ 在任何一点处的切平面与三坐标面所围成的立体体积为定值.

证　过点 (x,y,z) 的切平面方程为

$yz(X - x) + xz(Y - y) + xy(Z - z) = 0,$

即　$yzX + xzY + xyZ = 3a^2.$

此平面与坐标轴截距分别为 $\dfrac{3a^2}{yz}, \dfrac{3a^2}{xz}, \dfrac{3a^2}{xy}$. 切平面与坐标面所围成的立体体积为

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{3a^2}{yz} \cdot \frac{3a^2}{xz} \cdot \frac{3a^2}{xy} = \frac{9}{2}a^2, \text{为定值.}$$

890.(上海化工学院,华东工程学院)　证明:曲面

$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}\,(a > 0)$ 的切平面坐标轴上割下的诸线段,其和为常量.

证　设 $F(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$,有

$F_x' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, F_y' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, F_z' = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}.$

则曲线在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0,$$

即　$\dfrac{x}{\sqrt{x_0}} + \dfrac{y}{\sqrt{y_0}} + \dfrac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$,化为截距式得

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1,$$

所以切平面在各坐标轴上的截距之和为

$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a$ 为常量.

891.(四川联合大学,2000年)　求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点(2,1,0)处的切平面方程.

解　令 $F(x,y,z) = e^z - z - xy - 3$,则

$F_x' |_{(2,1,0)} = y |_{(2,1,0)} = 1,$

$F_y' |_{(2,1,0)} = x |_{(2,1,0)} = 2,$

$F_z' |_{(2,1,0)} = (e^z - 1) |_{(2,1,0)} = 0.$

故所求切平面方程为

$x - 2 + 2(y - 1) = 0.$

892.(武汉测绘学院)　求椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 在点 $P_0(-1,2,3)$ 处的交角.

解　令　$F(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 16, G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14.$

则曲面 $F(x,y,z) = 0$ 与 $G(x,y,z) = 0$ 在点 p_0 处的法向量分别是

$\vec{n}_F = \{F_x', F_y', F_z'\} |_{P_0} = \{-6,4,6\},$

$\vec{n}_G = \{G_x', G_y', G_z'\} |_{P_0} = \{-2,4,6\}.$

于是两曲面在该点的交角 θ 的余弦为

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_F \cdot \vec{n}_G}{|\vec{n}_F| \cdot |\vec{n}_G|} = \frac{12 + 16 + 36}{\sqrt{88} \cdot \sqrt{56}} = \frac{8}{\sqrt{77}},$$

故所求交角为 $\theta = \arccos\frac{8}{\sqrt{77}}$.

893.(长沙铁道学院)　过直线 $\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 的切平面,求此切平面方程.

解　设 $F(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - z^2 - 27$,则

$F_x' = 6x, F_y' = 2y, F_z' = -2z$

过直线 $\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 的平面方程为

$10x + 2y - 2z - 27 + \lambda \cdot (x + y - z) = 0,$

其法向量为 $\{10 + \lambda, 2 + \lambda, -2 - \lambda\}$. 设所求切面切点为 $p_0(x_0, y_0, z_0)$,

则

$$\begin{cases}\dfrac{10+\lambda}{6x_0}=\dfrac{2+\lambda}{2y_0}=\dfrac{2+\lambda}{2z_0},\\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2-27=0,\\ (10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0\end{cases}$$

解得 $x_0=3, y_0=1, z_0=1, \lambda=-1$ 或 $x_0=-3, y_0=-17, z_0=-17, \lambda=-19$. 所求切平面方程为

$9x+y-z-27=0$

或 $9x+17y-17z+27=0$.

第九章　重积分

§1　二重积分

【考点综述】

一、综述

1. 定义　设二元函数 $f(x,y)$ 定义在可求面积的有界闭区域 D 上，T 为 D 的任一个分割，即 $T:\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma_n$，其 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\sigma i = D$，$i\neq j$ 时除边界外 $\sigma_1\cap\sigma_j = \phi$ 用 $\triangle\sigma_i$ 表示 σ_i 的面积，在每个 σ_i 上任取一点 (ξ_i,η_i) 作和数

$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\triangle\sigma_i$——称为 $f(x,y)$ 关于 T 的积分和，记 $\|T\|$ 为 σ_i 的直径中的最大者. 如果 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i) = J$ 存在，且 J 与对 D 的分割 T 及每个 σ_i 所取的点 (ξ_i,η_i) 均无关. 则称 $f(x,y)$ 在 D 上可积且 J 称为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分，记为 $\iint\limits_D f(x)y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 或 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

2. 性质：假设性质中所涉及的函数的积分均存在

(1) 有界性. 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，则 $f(x,y)$ 在 D 上有界，(可积的必要条件).

(2) 线性性. 若 f,g 均在 D 上可积，k,l 为任意实常数，则 $kf+lg$ 仍在 D 上可积，且

$$\iint\limits_D (kf+lg)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma + l\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma.$$

(3) 区域可加性. 设 $D = D_1\cup D_2$，其中 D_1 与 D_2 的内部不相交则 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是 $f(x,y)$ 在 D_1 与 D_2 上均可积，且

$$\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f\mathrm{d}\sigma.$$

注：此性质可推广到 D 可表示成任意有限个内部不相交的区域的并的情形.

(4) 单调性. 若在任区域 D 上，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$. 则

$$\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g\mathrm{d}\sigma.$$

特别：当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，$\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma\geqslant 0$.

当 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$ 时　$m\cdot\triangle D\leqslant\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma\leqslant M\cdot\triangle D$，其中 $\triangle D$ 表示 D 的面积.

(5) $\left|\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint\limits_D |f|\,\mathrm{d}\sigma$.

(6) 中值公式.若 $f(x,y)$ 在 D 上连续，$g(x,y)$ 在 D 上可积且不变号.则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使

$$\iint\limits_D f\cdot g\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g\mathrm{d}\sigma.$$

特别，当 $g(x,y)=1$ 时

$\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\cdot\triangle D$　其中 $\triangle D$ 表示 D 的面积.

3. 可积的条件

(1) 设 $f(x,y)$ 在 D 上有界，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是

$\forall\varepsilon>0$，存在 D 的某分割 $T:\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma_n$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\triangle\sigma_i<\varepsilon$　其中

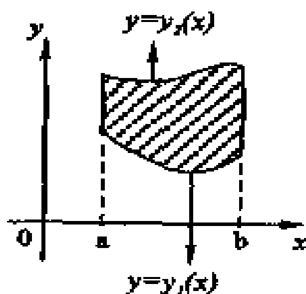
$\omega=\sup\limits_{(x,y)\in\sigma_i}f(x,y)-\inf\limits_{(x,y)\in\sigma_i}f(x,y)$——称为 $f(x,y)$ 在 σ_i 上的振幅.

(2) 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续(或 $f(x,y)$ 在 D 上只有有限个间断点)，且有界，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

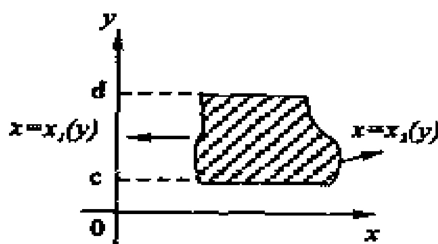
(3) 若 $f(x,y)$ 在 D 上有界且不连续点分布在 D 内的一条或有限条光滑或逐段光滑曲线上，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

4. 两类典型的简单区域

(1) x 型区域：$\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\}$ 其中 $y_1(x)\leqslant y_2(x)$　其图形如图示



(1)



(2)

(2) y 型区域：

$\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d, x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)\}$ 其中 $x_1(y)\leqslant x_2(y)$

其图形如图示(2)

5. 常用公式

(1) 化为累次积分的计算公式

(ⅰ) 若 $f(x,y)$ 在 x 型区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\}$ 上连续，$y_1(x)$，$y_2(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\iint_D f\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f\mathrm{d}y.$$

(ⅱ) 若 $f(x,y)$ 在 y 型区域 $D=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d, x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)\}$ 上连续，$x_1(y)$，$x_2(y)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\iint_D f\mathrm{d}\sigma=\int_c^d y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f\mathrm{d}x.$$

(2) 变量替换公式

(ⅰ) 设变量替换 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$ 将 xy 平面上的有界闭区域 D 一一地变成 uv 平面上的有界闭区域 D'，且 $x(u,v),y(u,v)\in C^{(1)}(D)$. $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，若 $f(x,y)$ 在 D 上连续，

则 $$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D'}f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

(ⅱ) 设广义极坐标变换 $\begin{cases}x=x_0+ar\cos\theta\\y=y_0+br\sin\theta\end{cases}$ 将 xy 平面上的有界闭区域 D 一一地变成 $r\theta$ 平面上有界闭区域 D'，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D'}f(x_0+ar\cos\theta,y_0+br\sin\theta)\cdot abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

特别，当 $(x_0,y_0)=(0,0)$，$a=b=1$ 时　公式变为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D'}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$——极坐标变换公式

(3) 若区域 D 是由两族光滑曲线 $g(x,y)=c_1$，$h(x,y)=c_2$ 中各取两条曲线 $g(x,y)=a$，$g(x,y)=b$，$(a<b)$. $h(x,y)=c$，$h(x,y)=d$ $(c<d)$ 所围成，且 $f(x,y)$ 在 D 上连续，作变量替换 $\begin{cases}u=g(x,y)\\v=h(x,y)\end{cases}$，

则 $$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{\substack{a\leqslant u\leqslant b\\ c\leqslant v\leqslant d}}f[g^{-1}(u,v),h^{-1}(u,v)]\cdot\left|\frac{\partial(g^{-1},h^{-1})}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中$\begin{cases} x = g^{-1}(u,v) \\ y = h^{-1}(u,v) \end{cases}$为$\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases}$的反函数组

注:可通过$\dfrac{\partial(g^{-1},h^{-1})}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}}$计算$\dfrac{\partial(g^{-1},h^{-1})}{\partial(u,v)}$

6. 几个结果(重积分与单积分互换)

(1)$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　其中 $D = [a,b]\times[a,b]$

(2)$\iint\limits_D f(ax+by)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}f(\sqrt{a^2+b^2}x)\mathrm{d}x$,

其中 $a^2+b^2\neq 0, D: x^2+y^2\leqslant 1$

(3)$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant+\infty\\0\leqslant y\leqslant+\infty}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$.

二、解题方法

1. 考点 1.重积分的计算

常用方法

(1) 化累次积分计算法(见下面第 894 题).

(2) 变量替换法(见下面第 896 题).

(3) 对称法(第 897 题).

2. 考点 2:累次积分顺序的互换

常用方法:简单区域的互换(第 895 题).

3. 考点 3:积分等式的证明

常用方法

(1) 重积分化累次积分(见下面第 914 题).

(2) 变量替换法(见下面第 911 题).

(3) 对称法.

(4) 交换积分顺序(见下面第 922 题).

4. 考点 4:单积分的等式与不等式的证明

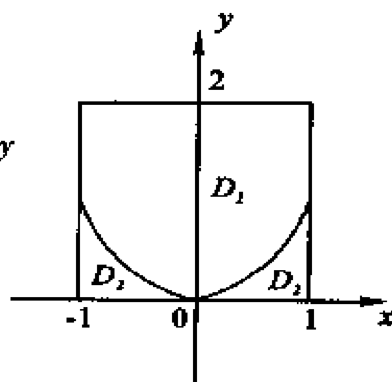
常用方法:单积分化为重积分(见下面第 942 题).

5. 考点 5:可积的判断

【经典题解】

894.(北京师范大学,2002 年)　计算二重积分$\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中 D 为区域 $|x|\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2$



第 894 题

解　如图示 D 可分为 $D_1 \cup D_2$

在 D_1 内 $y > x^2$，在 D_2 内 $y < x^2$

所以 $\iint\limits_{D} \sqrt{|y - x^2|}\,dxdy = \iint\limits_{D_1} \sqrt{y - x^2}\,dxdy$

$+ \iint\limits_{D_2} \sqrt{x^2 - y}\,dxdy$

$= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{y - x^2}\,dy$

$+ \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\,dy = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$

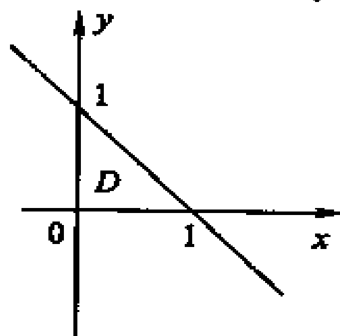
895.（华中理工大学）　设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，证明

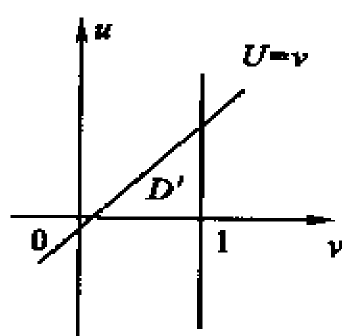
$\int_a^b dx \int_a^x f(g)\,dy = \int_a^b (b - x) f(x)\,dx$

证　改变积分顺序得

$$\int_a^b dx \int_a^x f(y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(y)\,dx = \int_a^b (b - y) f(y)\,dy = \int_a^b (b - x) f(x)\,dx$$

896.（湖北大学 2002 年，中南矿冶学院）　求 $\iint\limits_{D} e^{\frac{y}{x+y}}\,dxdy$　其中 $D = \{(x, y) \mid x + y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$





第 896 题

解　令 $\begin{cases} x + y = v \\ y = u \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = v - u \\ y = u \end{cases}$　则

D 变成 $D' = \{(u, v) \mid {}^{0 \leqslant v \leqslant 1}_{0 \leqslant u \leqslant v}\}$，$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -1$

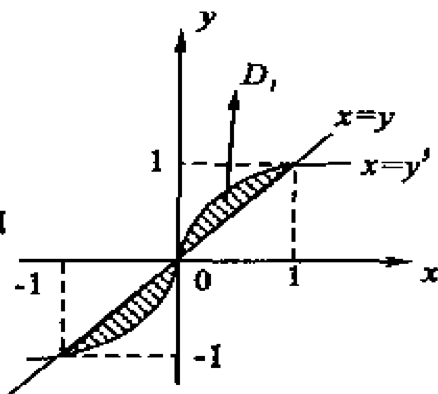
$\iint\limits_{D} e^{\frac{y}{x+y}}\,dxdy = \iint\limits_{D'} e^{\frac{u}{v}}\,dudv = \int_0^1 dv \int_0^v e^{\frac{u}{v}}\,du$

$= \int_0^1 v(e - 1)\,dv = \frac{1}{2}(e - 1).$

897.(武汉大学 1992 年)　计算下列积分

(1)$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$　其中 a, b 为常数 $0 < a < b$;

(2)$\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　其中 D 为直线 $y = x$ 与曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 围成的有界闭区域.



第 897 题

解　(1)$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\ln x}x^y \Big|_a^b \mathrm{d}x$

$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_a^b x^y \mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{y+1}x^{y+1}\Big|_0^1 \mathrm{d}y$

$= \int_a^b \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = \ln\frac{b+1}{a+1}$

(2) 由对称性及被积函数为关于 y 的偶函数知

$$\iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{y^3} e^{-y^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^1 (y - y^3)e^{-y^2}\mathrm{d}y \xlongequal{t = y^2} \int_0^1 (1-t)e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{e}.$$

898.(北京师范大学 1999 年)　给定积分

$I = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 作正则变换 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, 区域 D 变成 Ω. 如果变换满足

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad ①$$

试证: $I = \iint\limits_\Omega \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

证　由积分变换公式知

$$I = \iint\limits_\Omega \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

而 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$

$\xlongequal{\text{由①}} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\therefore\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+2\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\overset{\text{由①}}{=\!=}$$

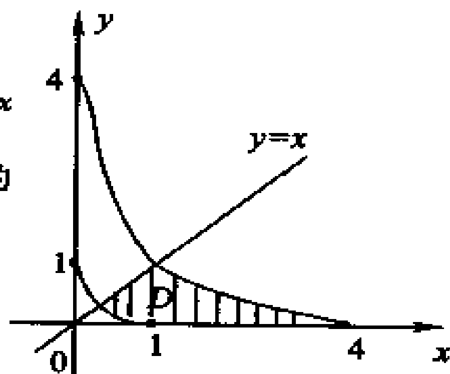
$$\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]$$

$$=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|.$$

所以 $I=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

899.（清华大学 1999 年） 计算二重积分

$$I=\iint\limits_{D}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^4}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ 其中 D 是由 x 轴，$y=x$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 和 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ 围成的有界闭区域



第 899 题

解 令 $\begin{cases}u=\sqrt{x}+\sqrt{y},\\ v=\dfrac{y}{x},\end{cases}$ 则 $1\leqslant u\leqslant 2$，$0\leqslant v\leqslant 1$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{x^2}.$$

$$\therefore\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=2\cdot\frac{x^2}{u},$$

$$\therefore I=\iint\limits_{\substack{1\leqslant u\leqslant 2\\0\leqslant v\leqslant 1}}\frac{u^4}{x^2}\cdot 2\cdot\frac{x^2}{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\iint\limits_{\substack{1\leqslant u\leqslant 2\\0\leqslant v\leqslant 1}}u^3\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\int_0^1\mathrm{d}v\int_1^2u^3\mathrm{d}u$$

$= 2 \cdot \frac{1}{4}(2^4 - 1) = \frac{15}{2}$.

900.(南开大学 1999 年)

设 $f(u)$ 具有连续的导函数，且 $\lim\limits_{u\to+\infty} f'(u) = A > 0$,

$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}, (R > 0)$.

(1) 证明：$\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = +\infty$；

(2) 求 $I_R = \iint\limits_D f'(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(3) $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{I_R}{R^2}$.

解 (1) $\because \lim\limits_{u\to+\infty} f'(u) = A > 0, A > \frac{A}{2}$.

$\therefore$ 由局部保号性知，$\exists M > 0$，使当 $u \geqslant M$ 时，$f'(u) > \frac{A}{2}$.

$\therefore$ 由微分中值公式知，当 $u > M$ 时，

$f(u) = f(M) + f'(\xi)(u - M) > f(M) + \frac{A}{2}(u - M)$，其中 $M < \xi < u$.

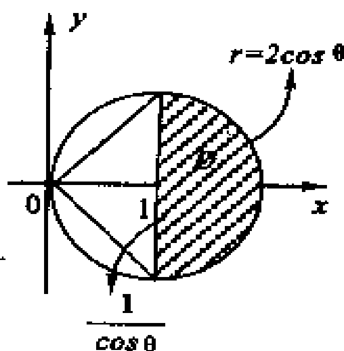
$\therefore \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = +\infty$.

(2) 令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 则 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$I_R = \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant R \\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} f'(r^2) \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}[f(R^2) - f(0)] = \frac{\pi}{4}[f(R^2) - f(0)]$.

(3) $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{I_R}{R^2} = \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{f(R^2) - f(0)}{R^2}$

$= \frac{\pi}{4} \cdot \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{2Rf'(R^2)}{2R} = \frac{\pi}{4}A$.



第 901 题

901.(天津大学 1998 年) 求

$\iint\limits_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是 $x^2 + y^2 = 2x$ 内且 $x \geqslant 1$ 的部分

解 令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 则 $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$,

$\frac{1}{\cos\theta} \leqslant r \leqslant 2\cos\theta$.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta}\frac{1}{r^4}\cdot r\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta-\frac{1}{4\cos^2\theta})\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{8}.$$

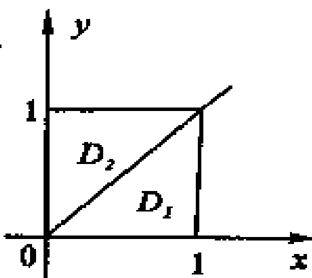
902.(中国人民大学2001年)　求积分$\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^y(\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^x\sin x)\mathrm{d}x$

解　改变积分顺序得

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^y(\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^x\sin x)\mathrm{d}x = -\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1(\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^x\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^x\cdot\sin x)\mathrm{d}y = -\int_0^1(x\mathrm{e}^{-x^2}+x\mathrm{e}^x\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}\sin 1}{2}$$

903.(北京航空航天大学,2000年)　求$\iint_D(x+y)\mathrm{sgn}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　其中$D=\left\{(x,y)\left|\begin{matrix}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\end{matrix}\right.\right\}$



第903题

解　如图示 $D=D_1\cup D_2$

其中 $D_1=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant x\end{cases}$, $D_2=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\x\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$

$$\therefore \iint_D(x+y)sgn(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_2}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

904.(天津大学)

(1) 进行适当的变量替换,化下列积分为定积分$\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$由曲线$xy=1,xy=2,y=x,y=4x(x>0,y>0)$所围成的区域;

(2) 化累次积分$\int_0^x\mathrm{d}\xi\int_0^\xi\mathrm{d}\eta\int_0^\eta f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$为定积分.

解　(1) 令$\begin{cases}u=xy,\\v=\dfrac{y}{x},\end{cases}$则$\begin{matrix}1\leqslant u\leqslant 2,\\1\leqslant v\leqslant 4,\end{matrix}$ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\dfrac{1}{2v}.$

$$\therefore \iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\substack{1\leqslant u\leqslant 2\\1\leqslant v\leqslant 4}} f(u)\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^4\frac{1}{v}\mathrm{d}v\cdot\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\ln 2\cdot\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u.$$

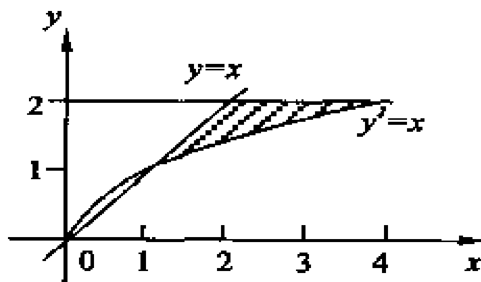
(2) $\because \int_0^{\xi}\mathrm{d}\eta\int_0^{\eta}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \int_0^{\xi}\mathrm{d}\varepsilon\int_{\varepsilon}^{\xi}f(\varepsilon)\mathrm{d}\eta = \int_0^{\xi}f(\varepsilon)(\xi-\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$,

$\therefore \int_0^{x}\mathrm{d}\xi\int_0^{\xi}\mathrm{d}\eta\int_0^{\eta}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \int_0^{x}\mathrm{d}\xi\int_0^{\xi}f(\varepsilon)(\xi-\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$

$= \int_0^{x}\mathrm{d}\varepsilon\int_{\varepsilon}^{x}f(\varepsilon)(\xi-\varepsilon)\mathrm{d}\xi = \int_0^{x}\frac{1}{2}f(\varepsilon)(\xi-\varepsilon)^2\Big|_{\varepsilon}^{x}\mathrm{d}\varepsilon$

$= \frac{1}{2}\int_0^{x}f(\varepsilon)(x-\varepsilon)^2\mathrm{d}\varepsilon.$

905.(天津大学 1998 年) 求 $I = \int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y + \int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y.$



第 905 题

解 $I = \int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x$

$= -\int_1^2\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}y\mathrm{d}y$

$= -\left[\frac{2y}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}y\Big|_1^2 - \frac{4}{\pi^2}\int_1^2\sin\frac{\pi}{2}y\right]$

$= -\left[-\frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^2}\cdot\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}y\Big|_1^2\right)\right]$

$= -\left[-\frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^3}\right] = \frac{4}{\pi^2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right).$

906.(中山大学) 若 $f(x,y)$ 在矩形 $G:0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上有定义，且积分

$I_1 = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 与 $I_2 = \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 都存在，则(　　)

(1) $I_1 = I_2$ (2) $I_1 \neq I_2$ (3) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 存在 (4) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 可能不存在.

解 答案为(4).

$$\text{如} f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})}{[(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2]^2} & \text{当}(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\neq 0 \\ 0 & x=y=\frac{1}{2}\text{ 时} \end{cases}$$

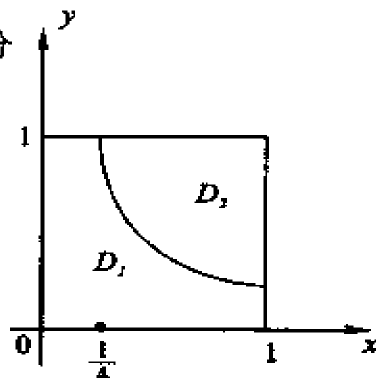
显然在 $G:0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上有定义，且 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x = 0$，但 $f(x,y)$ 在点$(\frac{1}{2}),\frac{1}{2}\in G$ 无界，所以 $f(x,y)$ G 上不可积.

907.(北京大学) (1) 计算积分 $A=\iint\limits_{D}|xy-\frac{1}{4}|\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=[0,1]\times[0,1]$;(2)(华东师大,1999年) 设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,\mathrm{d}]$ 上有二阶连续编导数.

1) 通过计算验证:$\iint\limits_{D}f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}f''_{yx}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

2) 利用(1) 证明 $f''_{xy}(x,y)=f''_{xy}(x,y),(x,y)\in D$.

解 (1) 如图示,$xy=\frac{1}{4}$ 将 D 分成两部分 D_1,D_2.



第907题

在 D_1 上,$|xy-\frac{1}{4}|=\frac{1}{4}-xy$,在 D_2 上 $|xy-\frac{1}{4}|=xy-\frac{1}{4}$.

$\therefore A=\iint\limits_{D_1}(\frac{1}{4}-xy)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(xy-\frac{1}{4})\mathrm{d}\sigma.$

而 $D_2=\{(x,y)\mid\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1,\frac{1}{4x}\leqslant y\leqslant 1\}$,

$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4},0\leqslant y\leqslant 1\}\cup\{(x,y)\mid\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{4x}\}$.

$$\therefore\iint\limits_{D_2}(xy-\frac{1}{4})\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4x}}^{1}(xy-\frac{1}{4})\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{32x}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}+\ln 2\right).$$

$$\iint\limits_{D_1}(\frac{1}{4}-xy)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1(\frac{1}{4}-xy)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4x}}(\frac{1}{4}-xy)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{16}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{16}\ln 2=\frac{1}{16}(\frac{3}{4}+\ln 2).$$

$\therefore A=\frac{1}{8}(\frac{3}{4}+\ln 2)$.

$$(2)\iint\limits_{D}f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^{\mathrm{d}}f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b[f_x'(x,\mathrm{d})-f_x'(x,c)]\mathrm{d}x$$

$$=f(b,\mathrm{d})-f(a,\mathrm{d})-f(b,c)+f(a,c),$$

$$\iint_D f''_{yx}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f''_{yx}(x,y)\mathrm{d}x$$

$$= \int_c^d [f_y'(b,y) - f_y'(a,y)]\mathrm{d}y$$

$$= f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c),$$

故等式成立.

(2) $\forall (x,y)\in D, \varepsilon>0$ 令 $D' = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]\times[y-\varepsilon, y+\varepsilon]$.

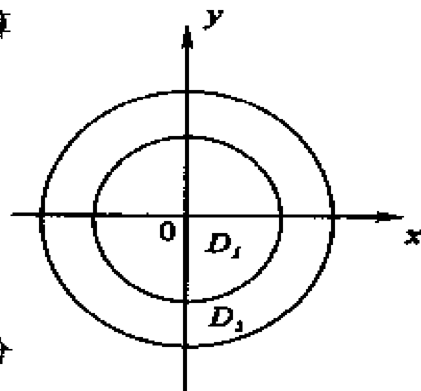
由(1) 知, $\iint_{D'} f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f''_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 又由积分中值公式知, $\exists(\xi,\eta)\in D'$, $(\xi_2,\eta_2)\in D'$,

使 $\iint_{D'} f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f''_{xy}(\xi_1,\eta_1)\cdot 4\varepsilon^2$, $\iint_{D'} f''_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f''_{yx}(\xi_2,\eta_2)\cdot 4\varepsilon^2$.

所以 $f''_{xy}(\xi_1,\eta_1) = f''_{yx}(\xi_2,\eta_2)$.

而由 f''_{xy}, f''_{yx} 连续且当 $\varepsilon\to 0$ 时 $(\xi_1,\eta_1)\to(x,y)$, $(\xi_2,\eta_2)\to(x,y)$ 所以 $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

908. (河北师范大学) 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{16}} \min\left\{\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2}, 2(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



第 908 题

解 由 $\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2} = 2(x^2+y^2)$,

知 $x^2+y^2 = \frac{1}{8}$.

显然如图示圆周将 $x^2+y^2\leqslant\frac{3}{16}$ 分成两部分 D_1, D_2,

其中 $D_1: x^2+y^2\leqslant\frac{1}{8}$, $D_2: \frac{1}{8}\leqslant x^2+y^2\leqslant\frac{3}{16}$.

当 $(x,y)\in D_1$ 时 $\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2}\leqslant 2(x^2+y^2)$.

当 $(x,y)\in D_2$ 时 $\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2}\geqslant 2(x^2+y^2)$.

所以 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{16}} \min\left\{\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2}, 2(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint_{D_1}\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} 2(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad ①$$

令$\begin{cases} x = r\cos\theta, \text{则 } D_1 \text{ 变成}, 0 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ y = r\sin\theta, D_2 \text{ 变成} \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant r \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{4}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{cases}$

①式右端 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \sqrt{\dfrac{3}{16} - r^2} \cdot r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} 2r^2 \cdot r dr$

$$= 2\pi\left(\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} r \cdot \sqrt{\frac{3}{16} - r^3} dr + 2\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} dr\right)$$

$$= 2\pi\left[\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{16^2} - \frac{1}{8^2}\right)\right]$$

$$= 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{64} - \frac{9}{24 \times 64}\right) = \frac{\pi}{32}\left(\sqrt{3} - \frac{9}{24}\right).$$

909.(北京大学)　设 $a > 0$ 是常数,计算积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant ax} xy^2 dx dy.$$

解　令$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$则 $x^2 + y^2 \leqslant ax$,变成 $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{a}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant ax} xy^2 dx dy = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{2} \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} \left(\frac{a}{2} + r\cos\theta\right) r^2 \sin^2\theta \cdot r dr d\theta =$$

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{2} \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} \left(\frac{a}{2} \cdot r^3 \sin^2\theta + r^4 \cos\theta \sin^2\theta\right) dr d\theta = \frac{a^5}{128}.$$

注　此题若采用以原点为极点的极坐标变换,计算要复杂一些.

910.(西北师范学院)　计算由椭圆

$(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1 \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0)$

所围图形的面积.

解　$\begin{cases} u = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ v = a_2 x + b_2 y + c_2, \end{cases}$则

$(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 \leqslant 1.$

变 $u^2 + v^2 \leqslant 1$,且 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$.

所以,所示图形的面积(记为 S)为

$$S = \iint\limits_{(a_1x+b_1y+c1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2\leqslant 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{|a_1b_2 - a_2b_1|} \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\pi}{|a_1b_2 - a_2b_1|}.$$

911.(东北师范大学) 证明：

$$\iint\limits_S (ax + by + c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2} + c)\,\mathrm{d}u,$$

其中 $S: x^2 + y^2 \leqslant 1, a^2 + b^2 \neq 0$.

证 作正交变换 $\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(ax + by), \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(bx - ay). \end{cases}$

则 $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$,因此 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 变成 $u^2 + v^2 \leqslant 1$,且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} b & a \\ -b & a \end{vmatrix} = 1.$$

所以$\iint\limits_S f(ax + by + c)\mathrm{d}r\mathrm{d}y = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f(\sqrt{a^2+b^2}u + c)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

而$\{u^2 + v^2 \leqslant 1\} = \{(u,v) \mid -1 \leqslant u \leqslant 1, -\sqrt{1-u^2} \leqslant v \leqslant \sqrt{1-u^2}\}$,

所以 $\iint\limits_S f(ax + by + c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2} + c)\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2}u + c)\,\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}v$$

$$= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2+b^2}u + c)\,\mathrm{d}u.$$

912.(华中理工大学 1997 年) 计算二重积分

$\iint\limits_D (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由曲线 $x^2 + y^2 = x + y$ 所围成的区域.

解 将 $x^2 + y^2 - x - y = 0$,变为$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$.

令$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + r\cos\theta, & \text{则 } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ y = \dfrac{1}{2} + r\sin\theta, & 0 \leqslant r \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$

$$\therefore \iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}[r(\cos\theta+\sin\theta)+1]r\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}.$$

913.(西北电讯工程学院)

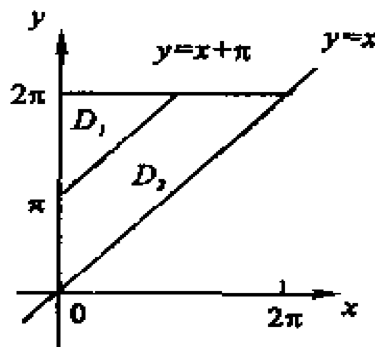
求$\iint\limits_D |\sin(x-y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中

$D: 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 2\pi$.

解 因 $|\sin(x-y)| = |\sin(y-x|=$

$\begin{cases} \sin(y-x) & 0 \leqslant y-x < \pi, \\ -\sin(y-x) & \pi \leqslant y-x \leqslant 2\pi, \end{cases}$

如图示 D 被直线$y = x+\pi$分成两个区域D_1 和 D_2.



第 913 题

所以$\iint\limits_D |\sin(x-y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= -\iint\limits_{D_1}\sin(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2}\sin(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变换$\begin{cases} u = y-x, \\ v = x, \end{cases}$即$\begin{cases} x = v, \\ y = u+v, \end{cases}$

则$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

D_1 变为$\left\{(u,v)\,\middle|\, \begin{matrix} 0 \leqslant u \leqslant \pi \\ \pi \leqslant u \leqslant 2\pi - v \end{matrix}\right\}$,

D_2 变为$\left\{(u,v)\,\middle|\, \begin{matrix} 0 \leqslant u \leqslant \pi \\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi - u \end{matrix}\right\}$.

从而$\iint\limits_{D_1}\sin(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\mathrm{d}v\int_{\pi}^{2\pi-v}\sin u\mathrm{d}u = \int_0^{\pi}\left(-\cos u\,\Big|_{\pi}^{2\pi-v}\right)\mathrm{d}v$

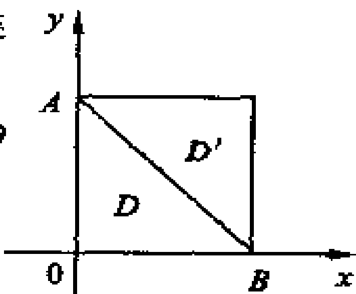
$$= -\int_0^{\pi}[\cos(2\pi-v)+1]\mathrm{d}v$$

$$= -\int_0^{\pi}(1+\cos v)\mathrm{d}v = -\pi.$$

$$\iint_D \sin(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\mathrm{d}u\int_0^{2\pi-u}\sin u\mathrm{d}v = \int_0^{\pi}(2\pi-u)\sin u\mathrm{d}u$$

$= 4\pi - \int_0^{\pi} u\sin u\mathrm{d}u = 3\pi$,所以$\iint_D |\sin(x-y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi+3\pi = 4\pi$.

914.(武汉大学 1995 年) 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,证明:



第 914 题

$\iint_D f(1-y)f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x]^2$,其中 D 为以 $O(0,0)$,$A(0,1)$,$B(1,0)$ 为顶点的三角形区域.

证 因

$$\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=1-y}$$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(1-y)\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} f(x)f(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如图示$\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\end{matrix}\right\} = D\cup D'$,

$\therefore [\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x]^2 = \iint_D f(x)f(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D'} f(x)f(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

令$\begin{cases}u=1-y,\\v=1-x,\end{cases}$ 即$\begin{cases}y=1-u,\\x=1-v,\end{cases}$ 则$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{vmatrix} = -1.$

D' 变成$\left\{(u,v)\middle|\begin{matrix}0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant u\end{matrix}\right\}$,

$\therefore \iint_{D'} f(x)f(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant u}} f(u)f(1-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

注意到二重积分的值与积分变量的记号无关.

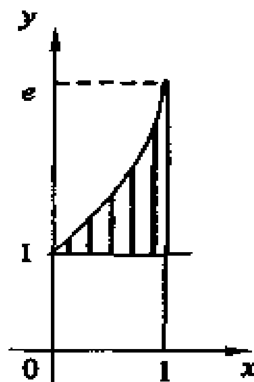
$\therefore \iint_{D'} f(x)f(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant x}} f(x)f(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(x)f(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$\therefore \iint_D f(x)f(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x]^2.$

915.(北京大学 1991 年) 计算积分

$I = \iint_\Omega (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中 Ω 是由 $y=1, y=e^x$ 以 $x=0, x=1$ 所围成区域.



第 915 题

解 因 $\Omega=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}0\leqslant x\leqslant 1\\1\leqslant y\leqslant e^x\end{matrix}\right\}$,

所以 $I=\int_0^1 dx\int_1^{e^x}(x+y)dy$

$$=\int_0^1\left[x(e^x-1)+\frac{1}{2}(e^{2x}-1)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(xe^x-x+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{e^2-1}{4}.$$

916.(北京航空航天大学)

设 f 为连续函数,求证 $\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-A}^{A}f(\xi)(A-|\xi|)d\xi$,其中 $D:|x|\leqslant\frac{A}{2}, |y|\leqslant\frac{A}{2}$,($A$ 为常数).

证 令 $\begin{cases}\xi=x-y,\\\eta=x+y,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\\y=\frac{1}{2}(\eta-\xi),\end{cases}$ 则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

D 变为 D':$|\xi|+|\eta|\leqslant A$,而

$$D'=\left\{(\xi,\eta)\middle|\begin{matrix}-A\leqslant\xi\leqslant A\\-(A-|\xi|)\leqslant\eta\leqslant A-|\xi|\end{matrix}\right\}.$$

所以 $\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\iint\limits_{D'}f(\xi)\cdot\frac{1}{2}d\xi d\eta=\frac{1}{2}\int_{-A}^{A}d\xi\int_{|\xi|-A}^{A-|\xi|}f(\xi)d\eta$

$$=\int_{-A}^{A}f(\xi)(A-|\xi|)d\xi.$$

917.(大连工学院) 计算

$$\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

解 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则 $\begin{matrix}\pi\leqslant r\leqslant 2\pi,\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.\end{matrix}$ 由极坐标变换公式,得

原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi}\sin r\cdot r\,dr$

$$=2\pi(-r\cos r+\sin r)\Big|_\pi^{2\pi}=2\pi(-2\pi-\pi)=-6\pi^2.$$

918.(武汉大学) 计算重积分

$$I=\iint_D \frac{3x}{y^2+xy^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 为平面曲线 $xy=1, xy=3$, $y^2=x, y^2=3x$ 所围成的有界闭区域.

第 918 题

解 令 $\begin{cases} u=xy, \\ v=\dfrac{y^2}{x}, \end{cases}$

则 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & 2\dfrac{y}{x} \end{vmatrix}$

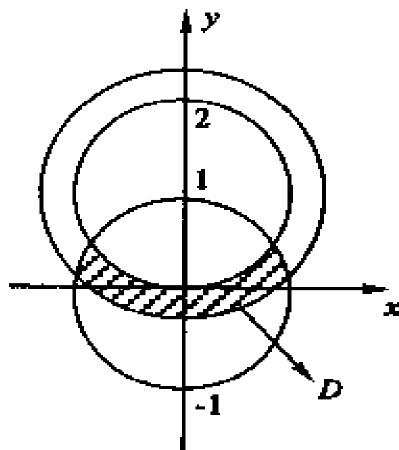
$=3\dfrac{y^2}{x}=3v$,

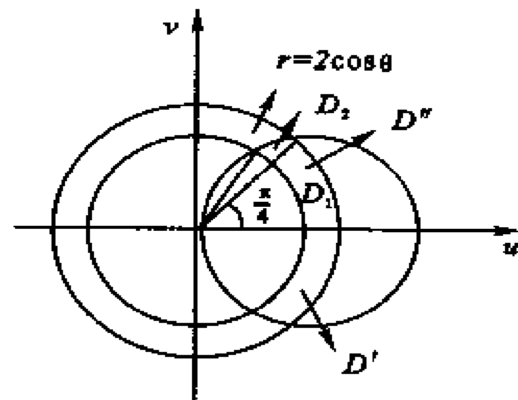
D 变为 $\left\{(u,v)\,\middle|\,\begin{matrix}1\leqslant u\leqslant 3\\ 1\leqslant v\leqslant 3\end{matrix}\right\}$.

$$\therefore I=\iint_{\substack{1\leqslant u\leqslant 3\\1\leqslant v\leqslant 3}}\frac{3}{v(1+u)}\cdot\frac{1}{3v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_1^3\frac{1}{v^2}\mathrm{d}v\int_1^3\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u=\frac{2}{3}\ln 2.$$

919.(南开大学)





第 919 题

计算二重积分 $\iint_D (3x^3+x^2+y^2+2x-2y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+(y-1)^2\leqslant 2 \text{ 且 } x^2+y^2\leqslant 1\}$.

解 因 D 关于 y 轴对称,所以积分中关于 x 的奇次项的积分值为零.

从而$\iint\limits_D(3x^3+x^2+y^2-2y+2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D[(x^2+(y-1)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

令$\begin{cases}u=y-1,\\v=x,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=v,\\y=1-u,\end{cases}$ 则$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}=1.$

D 变成 $D'=\{(u,v)\mid 1\leqslant u^2+v^2\leqslant 2$ 且 $(u-1)^2+v^2\leqslant 1\}.$

$\iint\limits_D(3x^2+x^2+y^2+2x-2y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

而 D' 关于 u 轴对称，且 $D''=D_1\cup D_2$.

所以$\iint\limits_{D'}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\iint\limits_{D''}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$=2\left(\iint\limits_{D_1}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\iint\limits_{D_2}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right).$$

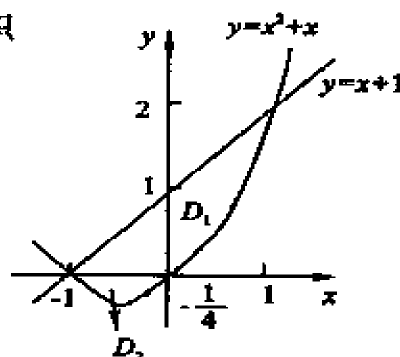
令$\begin{cases}u=r\cos\theta,\\v=r\sin\theta,\end{cases}$则 D_1 变为$\left\{(r,\theta)\left|\begin{array}{l}0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\\1\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\end{array}\right.\right\}$,

D_2 变为$\left\{(r,0)\left|\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\\1\leqslant r\leqslant 2\cos\theta\end{array}\right.\right\}$.

$\therefore\iint\limits_{D'}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}r^3\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\cos\theta}r^3\mathrm{d}r\right)=\dfrac{7}{12}\pi+\dfrac{7}{8}\sqrt{3}-2.$

920.（北京大学 1995 年）

设$f(x,y)$是R^2上的连续函数，试交换累次积分$\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2+x}^{x+1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 的求积次序.



第 920 题

解　如图示

$$D=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}-1\leqslant x\leqslant 1\\x^2+x\leqslant y\leqslant x+1\end{array}\right.\right\}=D_1\cup D_2.$$

而

$$D_1=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}0\leqslant y\leqslant 2\\y-1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}+\sqrt{y+\frac{1}{4}}\end{array}\right.\right\}$$

$$D_2=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}-\frac{1}{4}\leqslant y\leqslant 0\\-\frac{1}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}}\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}+\sqrt{y+\frac{1}{4}}\end{array}\right.\right\},$$

所以$\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2+x}^{x+1}f(x,y)dy=\int_0^2 dx\int_{y-1}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{y+\frac{1}{4}}}f(x,y)dx$

$+\int_{-\frac{1}{4}}^{0}dy\int_{-\frac{1}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}}}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{y+\frac{1}{4}}}f(x,y)dx.$

921.(浙江化工学院)

试证明：$\int_0^4 dx\int_0^{\frac{3}{4}x}f(x,y)dy+\int_4^5 dx\int_0^{\sqrt{25-x^2}}f(x,y)dy=$

$\int_0^3 dy\int_{\frac{4y}{3}}^{\sqrt{25-y^2}}f(x,y)dx,$

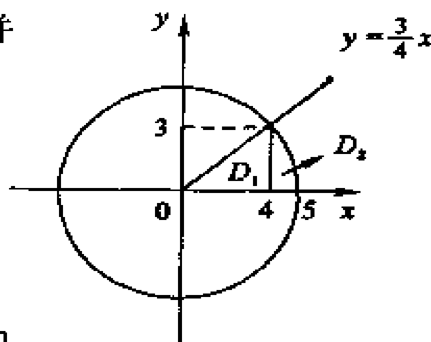
其中$f(x,y)$连续的.

证　如图示在左边积分区域，D_1与D_2的并

$D_2\cup D_2=D$

$=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}0\leqslant y\leqslant 3\\ \frac{4}{3}y\leqslant x\leqslant\sqrt{25-y^2}\end{array}\right.\right\}.$

所以左边$=\int_0^3 dy\int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}}f(x,y)dx.$



第 921 题

922.(北京工业学院)　已知$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明

$$2\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy=\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2.$$

证　交换积分顺序，有

$$\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy=\int_0^a f(y)dy\int_0^y f(x)dx.$$

而积分值与积分变量的记号无关，

所以$\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy=\int_0^a f(x)dx\int_0^x f(y)dy.$

从而$2\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy=\int_0^a f(x)dx\int_x^a f(y)dy+\int_0^a f(x)dx\int_0^x f(y)dy$

$=\int_0^a f(x)dx[\int_x^a f(y)dy+\int_0^x f(y)dy]=\int_0^a f(x)dx\cdot\int_0^a f(y)dy$

$=[\int_0^a f(x)dx]^2$

923.(天津天学)　证明$\int_a^b dx\int_a^x(x-y)^{n-2}f(y)dy=\frac{1}{n-1}\int_a^b(b-y)^{n-1}f(y)dy$，其中$n$为大于1的正整数.

证 交换积分顺序,得

左边 $=\int_a^b \mathrm{d}y\int_y^b (x-y)^{n-2}f(y)\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)\frac{1}{n-1}(x-y)^{n-1}\Big|_y^b\mathrm{d}y=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y.$

924.(上海交通大学) 将对极坐标的二次积分

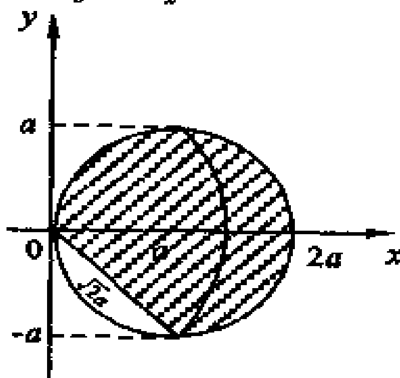
$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$,交换积分顺序,再把它化直角坐标系,写出先对 x 后对 y 以及先对 y 后对 x 的两个累次积分.

解 直角坐标系下的积分区域如图示.

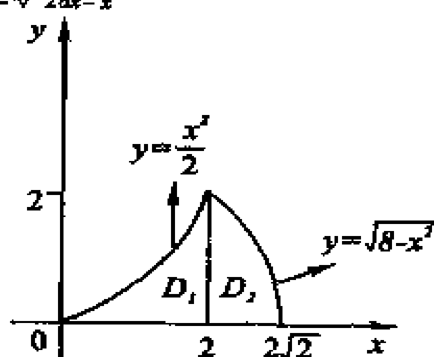
$$I=\int_0^{\sqrt{2}a}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}\theta+\int_{\sqrt{2}a}^{2a}\mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^a \mathrm{d}y\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-a}^0\mathrm{d}y\int_{-y}^{a+\sqrt{a^2-y^2}}(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\mathrm{d}x\int_{-x}^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_a^{2a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$



第 924 题



第 925 题

925.(东北工学院) 改变二次积分

$\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 的顺序.

解 如图示积分区域 D 为 D_1 与 D_2 的并,而

$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 2,\sqrt{2y}\leqslant x\leqslant\sqrt{8-y^2}\}$.

所以

$$\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)dy + \int_2^{2\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^2 dy\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx.$$

926.(北京工业学院)　改变二次积分的次序

$\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$,其中 $f(x,y)$ 是连续函数,$a>0$.

解　积分区域(如图示)可分为 D_1、D_2、D_3、三个部分.

其中 $D_1 = \left\{(x,y)\middle| 0\leqslant y\leqslant a, \frac{y^2}{2a}\leqslant x\leqslant a-\sqrt{a^2-y^2}\right\}$,

$D_2 = \left\{(x,y)\middle| 0\leqslant y\leqslant a, a+\sqrt{a^2-y^2}\leqslant x\leqslant 2a\right\}$,

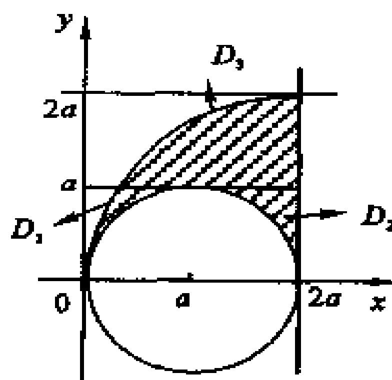
$D_3 = \left\{(x,y)\middle| a\leqslant y\leqslant 2a, \frac{y^2}{2a}\leqslant x\leqslant 2a\right\}$.

所以

$$\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy =$$

$$\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx +$$

$$\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$



第926题

927.(湖南大学)　计算二重积分

$$S = \iint_D xye^{-x^2-y^2}dxdy,$$

其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant 1$ 在第一象限的部分.

解法1　令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 则 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 1$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta\cdot e^{-r^2}\cdot rdr = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta\cdot\int_0^1 r^3e^{-r^2}dr$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left[\frac{1}{2}(-r^2e^{-r^2}-e^{-r^2})\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

解法2　$S = \int_0^1 e^{-x^2}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ye^{-y^2}dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 (xe^{-1}-xe^{-x^2})dx$

$$= \left(-\frac{1}{4}e^{-1}x^2 - \frac{1}{4}e^{-x^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

928.(国防科技大学)

计算$\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$.

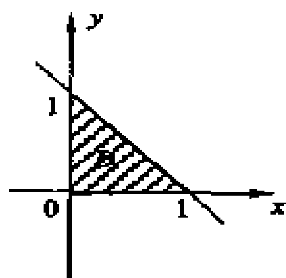
解　令$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$则 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1$.

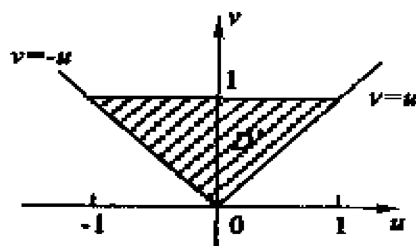
$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cdot\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 r\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{t=r^2} \pi\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t = \pi\int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}r$$

$$= \pi\left(\arcsin t\,\big|_0^1 + \sqrt{1-t^2}\,\big|_0^1\right) = \pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

929.（浙江大学）　计算积分$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x=0, y=0$, $x+y=1$ 所围成.





第 929 题

解　令$\begin{cases} u = x-y, \\ v = x+y, \end{cases}$

即$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u+v), \\ y = \dfrac{1}{2}(v-u), \end{cases}$则$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$.

D 变成 $D' = \{(u,v) \mid 0 \leqslant v \leqslant 1, -v \leqslant u \leqslant v\}$.

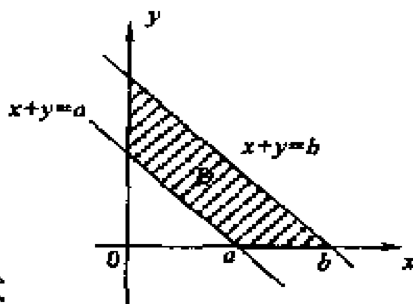
$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1\left(v\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\,\big|_{-v}^{v}\right)\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 v(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})\,\mathrm{d}v = \frac{1}{4}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}).$$

930.（湖南大学）　求$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$D: a \leqslant x+y \leqslant b, x \geqslant 0, y \geqslant 0 (0 < a < b)$.



第 930 题

解 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^a \mathrm{d}x\int_{a-x}^{b-x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y+\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{b-x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y.$

$=a\mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-a}-b\mathrm{e}-b-\mathrm{e}^{-b}.$

931.(长沙铁道学院)

设在区间$[a,b]$上$f(x)$连续且恒大于0,试用重积分证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geqslant(b-a)^2.$$

证 因$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}}\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}}\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

所以 $2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}}\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\geqslant 2\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2(b-a)^2.$$

932.(华南工学院)

设$f(x)$为$[a,b]$上连续函数,试研究$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$,从而证明不等式$[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.此处仅当$f(x)$为常数时等号才成立.

证 记$D=[a,b]\times[a,b]$,则

$$0\leqslant\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y=\iint\limits_D[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$=\iint\limits_D f^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+(b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y-2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$

$=2(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]^2,$

故不等式成立,

显然由上述过程知等号成立的充要条件是

$\iint\limits_D[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

而$[f(x)-f(y)]^2$连续,

所以$\iint\limits_D[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$的充要条件是

$f(x)-f(y)\equiv 0,\forall x,y\in[a,b]$,

即$f(x)$为常数.

933.(1)试用二重积分证明柯西不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right);$$

(2)若$f(x)$在[0,1]上连续,且单调增加,$f(x)\neq 0$.试证:

$$\frac{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}.$$

证 (1)

因为$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2=\iint\limits_D f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=\iint\limits_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$D=[a,b]\times[a,b]$.

而$f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)\geqslant 2f(x)g(x)f(y)g(y)$,

所以$\iint\limits_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant$

$2\iint\limits_D f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

即 $2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 2\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$

故命题得证.

(2)因$f(x)$连续,且$f(x)\neq 0$,

所以$f^2(x)$连续,$f^2(x)\geqslant 0$,且$f^2(x)\neq 0$.

$xf^2(x)$在[0,1]上连续,$xf^2(x)\geqslant 0$且$xf^2(x)\neq 0$.

从而$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x>0,\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x>0$.

记$I=\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$

$$=\iint\limits_D f^3(x)\cdot f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D xf^3(x)\cdot f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D f^3(x)f^2(y)(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

同理 $I=\iint\limits_D f^2(y)f^2(x)(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

所以

$2I=\iint\limits_D f^2(x)f^2(y)(y-x)(f(x)-f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

又 f 是单调增加的,

所以　当 $y\geqslant x$ 时,$f(x)\leqslant f(y)$,从而$(y-x)(f(x)-f(y))\leqslant 0$.

　　　当 $x\geqslant y$ 时,$f(y)\leqslant f(x)$,从而$(y-x)(f(x)-f(y))\leqslant 0$.

可见无论 x 与 y 的大小关系如何,总有

$(y-x)(f(x)-f(y))\leqslant 0$.

从而　$f^2(x)f^2(y)(y-x)(f(x)-f(y))\leqslant 0$.

所以　$2I\leqslant 0$,即 $I\leqslant 0$.

整理即得所要证明的不等式

934. 把下列二重积分化成单积分(即定积分)

(1) $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D:1\leqslant xy\leqslant 2,x\leqslant y\leqslant 2x$;

(2) $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D:|x|+|y|\leqslant 1$.

解　(1) 令$\begin{cases}u=xy\\ v=\dfrac{y}{x}\end{cases}$,则 D 变成$D'\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 2\}$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}y & x\\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{y}{x}+\frac{y}{x}=2\frac{y}{x}=2v.$$

$$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}f(u)\cdot\left|\frac{1}{2v}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'}f(u)\cdot\frac{1}{v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u\cdot\int_1^2\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u.$$

(2) 因为 $D:-1\leqslant x+y\leqslant 1,-1\leqslant x-y\leqslant 1$,

令$\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$,则 D 变成$\{(u,v)\mid -1\leqslant u\leqslant 1,-1\leqslant v\leqslant 1\}\overset{\triangle}{=\!=}D'$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2$$

$$\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}f(u)\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v = \int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u.$$

935. 用二重积分证明

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right)^2$$

证 因 $\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2 = \iint\limits_D f(x)f(y)\cos kx\cos ky\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2 = \iint\limits_D f(x)f(y)\sin kx\sin ky\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$D = [a,b]\times[a,b].$

所以

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \iint\limits_D f(x)f(y)(\cos kx\cos ky + \sin kx\sin ky)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D f(x)f(y)\cos k(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leqslant \iint\limits_D |f(x)f(y)||\cos k(x-y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leqslant \iint\limits_D |f(x)||f(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right)^2 = \text{右边}.
\end{aligned}$$

936. 计算 $\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 与两坐标轴所围成的区域.

解 令 $\begin{cases}\sqrt[4]{x} = r\cos\theta,\\ \sqrt[4]{y} = r\sin\theta,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x = r^4\cos^4\theta,\\ y = r^4\sin^4\theta,\end{cases}$

则 D 变成 $D' = \{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 16r^7\sin^3\theta\cos^3\theta.$$

$$\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} 16r^8\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^8\mathrm{d}r = \frac{4}{27}.$$

937. 求曲面 $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2+2y-1}$ 与平面 $z = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 围成立体的体积.

解 曲面 $z = {}^{-x^2-y^2+2y-1}$ 与平面 $z = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 的交线为

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{e}, \\ x^2 + (y-1)^2 = 1, \end{cases}$$

从而所围立体在 xy 平面上的投影 D 为 $x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$.

所以所围立体的体积

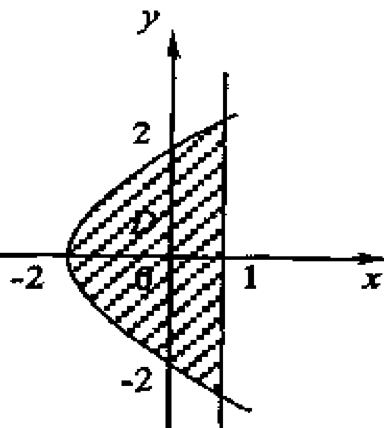
$$V = \iint_D \left[e^{-x^2-y^2+2y-1} - \frac{1}{e} \right] dxdy = \iint_D e^{-x^2-y^2+2y-1} dxdy - \frac{\pi}{e}$$

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = 1 + r\sin\theta, \end{cases}$ 则 D 变为 $\left\{ (r,\theta) \middle| \begin{matrix} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{matrix} \right\}$.

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-r^2} \cdot r dr - \frac{\pi}{e} = 2\pi \cdot \frac{1}{2}(-e^{-r^2}) \Big|_0^1 - \frac{\pi}{e}$$

$$= \pi(1 - \frac{1}{e}) - \frac{\pi}{e} = \pi(1 - \frac{2}{e}).$$

938.（华北水利水电学院） 试计算出曲面 $y^2 = 2x + 4$ 和平面 $x + z = 1$，$z = 0$ 所包围的立体体积.



第 938 题

解 如图示立体在 xy 平面上的投影

$D = \{(x,y) \mid y^2 \leqslant 2x + 4, x \leqslant 1\}$
$= \{(x,y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, -\sqrt{2x+4} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x+4}\}$.

所以立体的体积

$$V = \int_{-2}^{1} dx \int_{-\sqrt{2x+4}}^{\sqrt{2x+4}} (1-x) dy$$

$$= 2\int_{-2}^{1} (1-x)\sqrt{2x+4}\, dx = \frac{24\sqrt{6}}{5}.$$

939.（山东矿业学院） 求圆锥 $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ 截圆柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 所得有界部分立体的体积.

解 立体在 xy 平面上的投影 $D: x^2 + y^2 \leqslant 2y$，根据对称性，所得立体体积.

$$V = 2\iint_D a\sqrt{x^2 + y^2} dxdy.$$

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 则 D 变为 $\{(r,\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. 0 \leqslant r \leqslant 2\sin\theta\}$.

$$V = 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} ar \cdot r dr = \frac{16a}{3}\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{64}{9}a.$$

940.（山东大学） 已知两个球的半径为 a 和 b（$a > b$），且小球球心在

大球球面上，试求小球在大球内那一部分的体积.

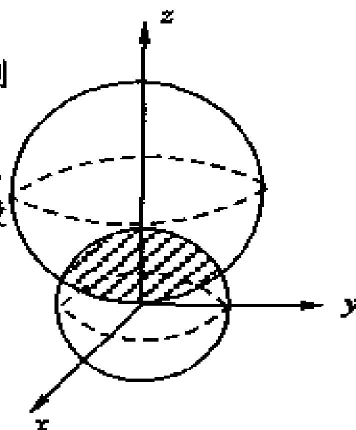
解 如图示以小球心为原点建立坐标系，则大小球面的方程分别为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2 \text{与} x^2+y^2+z^2=b^2.$$

记所考虑的立体为 V，则 V 在 xy 平面上的投影 $D: x^2+y^2\leqslant b^2\left(1-\dfrac{b^2}{4a^2}\right)$.

V 的体积(仍记为 V)

$$V=\iint\limits_D\left\{\sqrt{b^2-x^2-y^2}-\left[a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



第 940 题

利用极坐标变换可得

$$V=\left(\frac{2}{3}-\frac{b}{4a}\right)\pi b^3.$$

941.(天津大学)

(1) 求积分$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\mathrm{d}x$;

(2) 设连续函数序列$\{f_n(x,y)\}$在有界闭域 D 上一致收敛于$f(x,y)$，证明：$\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_D f_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 (1)$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\mathrm{d}x=\int\left[-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]'\arccos x\mathrm{d}x$

$$=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\arccos x-\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\arccos x-x+C.$$

(2) 先证：$f(x,y)$ 在 D 上连续，从而$\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在.

$\forall(x_0,y_0)\in D$，$\because f_n(x,y)\rightrightarrows f(x,y)$，$(x,y)\in D$.

$\therefore\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当 $n>N$ 时

$$|f_n(x,y)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(x,y)\in D.$$

$$\begin{aligned}\therefore |f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x,y)-f_n(x,y)|+|f_n(x,y)-\\&\quad f_n(x_0,y_0)|+|f_n(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&<\frac{2\varepsilon}{3}+|f_n(x,y)-f_n(x_0,y_0)|.\end{aligned}$$

又 $f_n(x,y)$ 在(x_0,y_0)处连续，$\therefore\exists\delta>0$. 使当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，

$|f_n(x,y)-f_n(x_0,y_0)|<\varepsilon/3$,从而 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$,即 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续,再由 $(x_0,y_0$ 的任意性知 $f(x,y)$ 在 D 上连续.从而 $f(x,y)$ 在 D 上可积即 $\iint\limits_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在.

再证极限等式.

记 $\triangle D$ 为 D 的面积,

$\because f_n(x,y)\rightrightarrows f(x,y)$, $\therefore \forall\varepsilon>0,\exists N>0$,使 $n>N$ 时,有

$|f_n(x,y)-f(x,y)|<\varepsilon/\triangle D$.

$\therefore \left|\iint\limits_D f_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\iint\limits_D|f_n(x,y)-f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$<\dfrac{\varepsilon}{\triangle D}\cdot\triangle D=\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_D f_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

942.(第二届全国大学生数学夏令营二试)

证明不等式 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\mathrm{e}^{-a^2})^{\frac12}<\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}a^2})^{\frac12}$,其中 $a>0$.

证　如图以 a 和 $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}a$ 为半径作两个四分之一圆域 D_1,D_2 和一个正方形区域 D.

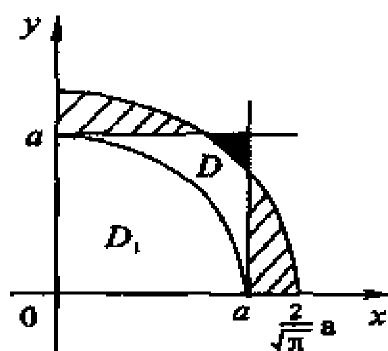
即　$D_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2,\\x\geqslant0,y\geqslant0,\end{cases}$　$D_2:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant\dfrac{4}{\pi}a^2,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0,\end{cases}$　$D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant a,\\0\leqslant y\leqslant a,\end{cases}$

由于 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 在如图阴影部分的积分大于在黑体部分的积分

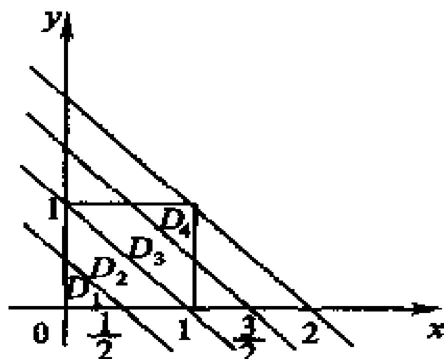
$\therefore \iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

即　$\dfrac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-a^2})<\left(\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2<\dfrac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{\frac{4}{\pi}a^2})$,

$\therefore \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\mathrm{e}^{-a^2})^{\frac12}<\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}a^2})^{\frac12}$.



第 942 题



第 943 题

943.(清华大学 2001 年)

计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{n^2}\left[\frac{2i+j}{n}\right]$ 这里 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数.

解 由二重积分的定义 并注意到

$\left[\frac{2i+j}{n}\right]=\left[\frac{2}{n}i+2\cdot\frac{j}{2n}\right]$,知

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n^2}\left[\frac{2}{n}i+\frac{j}{n}\right]$$

$$=4\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{i=1}^{n}\left[2\cdot\frac{i}{n}+2\cdot\frac{j}{2n}\right]$$

$$=4\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}}[2(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如图示 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$ 被分成四块

在 D_1 内 $[2(x+y)]=0$,在 D_2 内 $[2(x+y)]=1$,

在 D_3 内 $[2(x+y)]=2$,在 D_4 内 $[2(x+y)]=3$.

$$\therefore\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}}[2(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint\limits_{D_4}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}.$$

§2 三重积分

【内容综述】

一、综述

1. 定义　设区域 V 为三维空间中可求体积的有界闭区域,$f(x,y,z)$ 为定义在 V 上的三元函数,任给 V 一个分割 T: $V_1,V_2\cdots,V_n$,其中 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_i=V$,且

$V_1, V_2, \cdots, V_n$ 除边界外，两两内部不相交. 在每个 V_i 上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，作和数.

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \triangle V_i$—— 称为 f 关于 T 的积分和其中 $\triangle V_i$ 表示 V_i 的体积，记 $\|T\|$ 表示 $V_i(m = 1,2,\cdots\cdots,n)$ 的直径中的最大者. 若

$\lim_{\|T\|} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \triangle V_i = J$ 存在且 J 与对 V 的分割 T 以及每个 V_i 上任取的点(ξ_i, η_i, ζ_i)均无关，则称 $f(x,y,z)$ 在 V 上可积. 并称 J 为 $f(x,y,z)$ 在区域 V 上的三重积分，记为 $\iiint\limits_V f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 或 $\iiint\limits_V f\mathrm{d}V$

2. 性质　假设性质中所涉及的函数均可积.

(1) 有界性. 若 f 在 V 上可积，则 f 在 V 上有界.

(2) 线性性. 若 f, g 均在 V 上可积，α, β 为任意实常数，则 $\alpha f + \beta g$ 仍在 V 上可积，且

$$\iiint\limits_V (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}V = \alpha \iiint\limits_V f\mathrm{d}V + \beta \iiint\limits_V g\mathrm{d}V.$$

(3) 可加性. 设 $V = V_1 \cup V_2$，其中 V_1 与 V_2 的内部不相交，则 $f(x,y,z)$ 在 V 上可积的充要条件是

$f(x,y,z)$ 在 V_1 与 V_2 上均可积，且

$$\iiint\limits_V f\mathrm{d}v = \iiint\limits_{V_1} f\mathrm{d}V + \iiint\limits_{V_2} f\mathrm{d}V.$$

(4) 单调性. 若在区域 V 上，$f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$，则

$$\iiint\limits_V f\mathrm{d}V \leqslant \iiint\limits_V g\mathrm{d}V.$$

特别：当 $m \leqslant f(x,y,z) \leqslant M$ 时

$m \cdot \triangle V \leqslant \iiint\limits_V f\mathrm{d}V \leqslant M \cdot \triangle V$，其中 $\triangle V$ 表示 V 的体积.

(5) $\left|\iiint\limits_V f\mathrm{d}v\right| \leqslant \iiint\limits_V |f|\mathrm{d}v.$

(6) 中值公式：若 $f(x,y,z)$ 在 V 上连续，$g(x,y,z)$ 在 V 上可积且不变号，则存在$(\xi, \eta, \zeta) \in V$　使

$$\iiint\limits_V f \cdot g\mathrm{d}v = f(\xi, \eta, \zeta) \iiint\limits_V g\mathrm{d}V.$$

3. 可积的充要条件

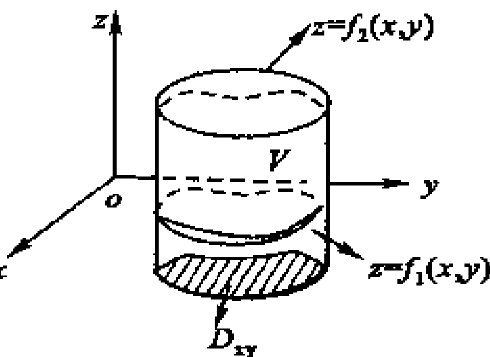
三元函数可积有与二元函数可积完全类似的充要条件(略).

4. 几类空间简单区域

(1) 坐标型区域

Z 型区域：$V=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_{xy}, f_1(x,y)\leqslant z_1\leqslant f_2(x,y)\}$

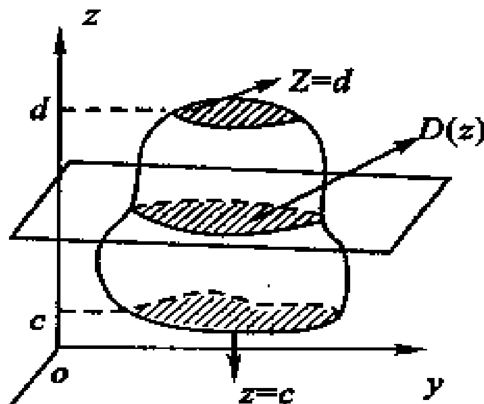
其中 D_{xy} 为 V 在 xy 平面上的投影区域，其图形如图示.



同理还有 x 型区域与 y 型区域，读者自行仿照给出

(2) 关于坐标轴的截面区域

关于 Z 轴的截面区域 $V=\{(x,y,z)\mid c\leqslant z\leqslant d, (x,y)\in D(z)\}$ 其中 $D(z)$ 为过 Z 轴上点 $(0,0,z)$ 与 Z 轴垂直的平面与 V 相截的截面在 xy 平面上的投影区域，其图形如图示.



同理也有关于 x 轴(y 轴) 的截面区域，读者自行给出.

5. 常用公式

(1) 化为累次积分的计算公式

(i) 若 V 为 Z 型区域 $\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_{xy}, f_1(x,y)\leqslant z\leqslant f_2(x,y)\}$

则 $\iiint\limits_V f\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f\mathrm{d}z.$

如图 D_{xy} 还为 xy 平面上的简单区域 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{l}a\leqslant x\leqslant b\\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\end{array}\right\}$

则公式进一步变为

$$\iiint\limits_V f\mathrm{d}v=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f\mathrm{d}z.$$

若 V 为 x 型区域(y 型区域)

$\{(x,y,z)\mid (y,z)\in D_{yz}, x_1(y,z)\leqslant x\leqslant x_2(y,z)\}$

$(\{(x,y,z)\mid_{(x,z)}\in D_{xz}, y_1(x,z)\leqslant y\leqslant y_2(x,z)\})$，则

$$\iiint_V f\mathrm{d}V = \iint_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}f\mathrm{d}x\left(=\iint_{D_{xz}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)}f\mathrm{d}y\right).$$

(ⅱ) 若 V 为关于 Z 轴的截面区域 $\{(x,y,z)\mid c\leqslant z\leqslant d,(x,y)\in D(z)\}$

则 $\iiint_V f\mathrm{d}V = \int_c^d\mathrm{d}z\iint_{D(z)}f\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

若 V 为关于 x 轴的截面区域(y 轴的截面区域) $\{(x,y,z)\mid a\leqslant x\leqslant b,(y,z)\in D(x)\}$ ($\{(x,y,z)\mid p\leqslant y\leqslant q,(x,z)\in D(y)\}$)

则 $\iiint_V f\mathrm{d}V = \int_a^b\mathrm{d}x\iint_{D(x)}f\mathrm{d}y\mathrm{d}z\left(=\int_p^q\mathrm{d}y\iint_{D(y)}f\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right)$.

(2) 变量替换公式

(ⅰ) 设变量替换 $\begin{cases}x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$ 将 xyz 空间上的有界闭区域 V 一一地变成 uvw 空间上的有界闭区域 V',且 $x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\in c'(V)$, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\neq 0$,则

$$\iiint_V f\mathrm{d}V = \iiint_{V'}f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}V'.$$

(ⅱ) 设坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 将 xyz 空间中的区域 V 一一地变成 $r\theta z$ 空间中的区域 V',则

$$\iiint_V f\mathrm{d}V = \iiint_{V'}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

(ⅲ) 设椭球坐标变换 $\begin{cases}x=ar\cos\varphi\cos\theta,\\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}$ 将 xyz 空间中的区域 V 一一地变成 $r\theta\varphi$ 空间中的区域 V',则

$$\iiint_V f\mathrm{d}V = \iiint_{V'}f(ar\sin\varphi\cos\theta,br\sin\varphi\sin\theta,cr\cos\varphi)\cdot abc\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

特别当 $a=b=c=1$ 时,上述公式为球坐标变换公式.

(ⅳ) 若空间区域 V 是由三族光滑曲面 $l(x,y,z)=c_1,m(x,y,z)=c_2,n(x,y,z)=c_3$ 中各取两个曲面 $l(x,y,z)=a_1,l(x,y,z)=a_2(a_1<a_2)$; $m(x,y,z)=b_1,m(x,y,z)=b_2(b_1<b_2)$; $n(x,y,z)=d_1,n(x,y,z)=$

$d_2(d_1 < d_2)$ 所围成,作变量替换$\begin{cases} u = l(x,y,z), \\ v = m(x,y,z), \\ w = n(x,y,z) \end{cases}$

$$\iiint_V f\mathrm{d}V = \iiint_{\substack{a_1 \leqslant u \leqslant a_2 \\ b_1 \leqslant v \leqslant b_2 \\ d_1 \leqslant w \leqslant d_2}} f[l^{-1}(u,v,w), m^{-1}(u,v,w), n^{-1}(u,v,w)] \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

其中$\begin{cases} x = l^{-1}(u,v,w), \\ y = m^{-1}(u,v,w), \\ z = n^{-1}(u,v,w), \end{cases}$为$\begin{cases} u = l(x,y,z), \\ v = m(x,y,z), \\ w = n(x,y,z) \end{cases}$的反函数组

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}.$$

6. 几个结果

(1) $\iiint_V f(ax + by + cz + d)\mathrm{d}V = \pi\int_{-1}^{1} f(kx)(1 - x^2)\mathrm{d}x$,

其中 $V: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \neq 0$.

(2) 若 $f(x,y,z)$ 在区域 V 上非负连续,则

$$\iiint_V f\mathrm{d}V = 0 \Leftrightarrow f(x,y,z) \equiv 0 \quad (x,y,z) \in V$$

若 $f(x,y,z)$ 在区域 V 上非负连续,则

$$\iint_V f\mathrm{d}V > 0 \Leftrightarrow f(x,y,z) \not\equiv 0 \quad (x,y,z) \in V$$

若 $f(x,y,z)$ 在区域 V 上连续,则

$$f(x,y,z) \equiv 0 \quad (x,y,z) \in V \Leftrightarrow \forall V_1 \subset V, \text{总有} \iiint_{V_1} f\mathrm{d}V = 0.$$

若 $f(x,y,z)$ 在区域 V 上连续,且对 V 上任意可积函数 $g(x,y,z)$ 都有 $\iiint_V f \cdot g\mathrm{d}V = 0$,则 $f(x,y,z) \equiv 0, (x,y,z) \in V$.

二、解题方法

1. 考点 1　重积分的计算

常用方法

(1) 简单区域法.

(2) 变量替换法.

(3) 对称法:若 V 关于 xy 平面对称, V_1 为 V 位于 $z \geqslant 0$ 的部分, $f(x,y,z)$



为关于 z 的奇(偶)函数,即

$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\ (f(x,y,-z)=f(x,y,z))$,则

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\begin{cases}0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\text{ 时},\\ 2\iiint\limits_{V_1} f\mathrm{d}V, & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\text{ 时}.\end{cases}$$

同理还有其它类型的类似公式

若 V 中 x,y,z 的地位相同,则

$$\iiint\limits_{V} f(x)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{V} f(y)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{V} f(z)\mathrm{d}V.$$

2. 考点 2:累次积分顺序的互换

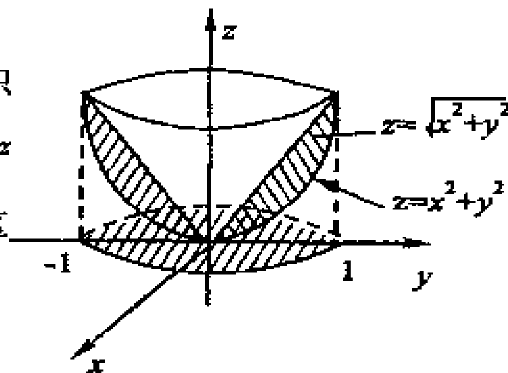
常用方法

简单区域的互换

3. 考点 3:积分性质的应用.

【经典题解】

944.(北京大学 2002 年) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=x^2+y^2$ 围成的有界区域.



第 944 题

解 如图示 Ω 在 xy 平面上的投影.

$D: x^2+y^2\leqslant 1$

所以 $\iiint\limits_{\Omega} x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$

$$\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D}\left[\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\right]x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\xlongequal[\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant r\leqslant 1}]{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r-r^2)\cdot r^2\cos^2\theta\cdot r\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^5-r^6)\mathrm{d}r$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)=\frac{\pi}{42}.$$

945.(中国人民大学 2001 年)求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^6}\iiint\limits_{\Omega_t}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega_t=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$,

解　作球坐标变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$.

则 $\iiint\limits_{\Omega_t}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t\sin r^3\cdot r^2\cdot\sin\varphi\mathrm{d}r==$

$4\pi\int_0^t r^2\sin r^3\mathrm{d}r$,

$$\therefore \text{所求极限}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi\int_0^t r^2\sin r^3\mathrm{d}r}{t^6}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi t^2\sin t^3}{6t^5}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t^3}{t^3}=\frac{2}{3}\pi.$$

946.(西北大学)　设(V)是由球 B　$x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$与锥面:以 Z 轴为轴,以坐标原点为顶点,顶角为2α,所围成的立体,求(V)的体积 V.

解　令 $x=r\cos\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$,则

$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha, 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi$.

$$\therefore V=\iiint\limits_{(V)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\alpha}\frac{1}{3}\cdot 8a^3\cos^3\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{16}{3}\pi a^3\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4\pi}{3}a^3(-\cos^4\varphi)\Big|_0^{\alpha}=\frac{4\pi}{3}a^3(1-\cos^4\alpha).$$

947.(北京航空航天大学,2000年)　已知圆柱壳 V:$\begin{matrix}4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9,\\ 0\leqslant z\leqslant 4,\end{matrix}$密度均匀为 μ,求它对位于原点处质量为 m 的质点的引力.

解　由引力公式知

$$F_x=k\iiint\limits_V\frac{xm\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=km\mu\iiint\limits_V\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$F_y=k\mu m\iiint\limits_V\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$F_z=k\mu m\iiint\limits_V\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 k 为引力系数.

∴所求引力为

$$F = F_x\vec{i} + F_y\cdot\vec{j} + F_z\cdot\vec{k} = 4(\sqrt{5}-2)\pi km\mu\cdot\vec{k}.$$

(其中令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$,则 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. 2 \leqslant r \leqslant 3, 0 \leqslant z \leqslant 4$

$$F_x = km\mu\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^4\mathrm{d}z\int_2^3\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r = 0$$

同理:$Fy = 0$

$$F_z = km\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^3\mathrm{d}r\int_0^4\frac{r\cdot z}{(r^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}z = 2\pi km\mu\int_2^3\mathrm{d}r\int_2^4\frac{r\cdot z}{(r^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}z$$

$$= 4(\sqrt{5}-2)\pi km\mu.$$

948.(北京大学,2001 年) 求极限

$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 f 在[0,1]上连续 $f(0)=0, f'(0)=1$.

解 利用球坐标变换,得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)\cdot r^2\cdot\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= 4\pi\int_0^t f(x)\cdot r^2\mathrm{d}r.$$

再由罗必塔法则得

$$\text{原式} = \lim_{t\to0^+}\frac{4\pi\int_0^t f(x)\cdot r^2\mathrm{d}r}{t^4} = \lim_{t\to0^+}\frac{4\pi t^2 f(t)}{4t^3} = \pi\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}$$

$$= \pi f'(0) = \pi.$$

949.(北京大学,2000 年) 求积分

$\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$V$ 是实心球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, \alpha > 0$.

解 利用球坐标变换法

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^{2\alpha}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = 4\pi\int_0^R r^{2(\alpha+1)}\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{\alpha^{2\alpha+3}}.$$

950.(西北电讯工程学院) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\iiint\limits_{r\leqslant n}[r]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi,$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,$[r]$ 是 r 的整数部分,n 为正整数.

证 因$[0,n] = \{n\}\cup(\bigcup\limits_{i=1}^{n}[i-1,i))$.

所以 $\{r\leqslant n\} = \{r=n\}\cup(\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{i-1<i\})$,注意到$\iiint\limits_{r=n}[r]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$.

$$\iiint\limits_{r\le n}[r]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\iiint\limits_{i-1\le r\le i}[r]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}(i-1)\iiint\limits_{i-1\le r<i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4\pi}{3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)[i^3-(i-1)^3]=\frac{4\pi}{3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)(3i^2-3i+1)$$

$$=\frac{4\pi}{3}\sum_{i=1}^{n}(3i^3-6i^2+4i-1)$$

$$=\frac{4\pi}{3}(3\sum_{i=1}^{n}i^3-6\sum_{i=1}^{n}i^2+4\sum_{i=1}^{n}i-n)$$

$$=\frac{4\pi}{3}[3\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-6\cdot\frac{1}{6}\cdot n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n]$$

$$=\frac{4\pi}{3}[\frac{3}{4}(n^2+n)^2-n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)-n].$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\iiint\limits_{r\le n}[r]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\frac{3}{4}(n^2+n)^2-n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)-n}{n^4}=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{3}{4}=\pi$$

951.(辽宁师大)　设函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=0$，求 $\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解　令 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\y=r\sin\varphi\sin\theta,\\z=r\cos\varphi,\end{cases}$ 则 $x^2+y^2+z^2\le t^2$ 变成 $\{(r,\theta,\varphi)\mid 0\le r\le t,0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\pi\}$.

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot2\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r$$

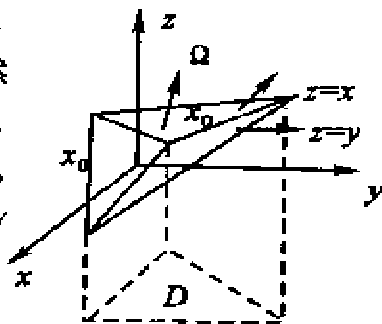
$\therefore$ 所求极限 $=\lim\limits_{t\to0}\frac{4\pi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r}{\pi t^4}=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)\cdot t^2}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to0}f'(t)=f'(0)$

注：条件改变 $f(x)$ 连续且 $f(0)=0,f'(0)$ 存在，则结论仍成立，但 $\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$ 应按导数定义计算.

952.(广西大学)　求下列三重积分的极限

$$\lim_{t\to x_0^+}\frac{1}{(t-x_0)^{n+4}}\iiint\limits_{\Omega}(x-y)^n f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 是由 $y = x_0(x_0 > 0), y = x, x = t(> x_0), z = x$ 及 $z = y$ 所围成的区域的内部，n 是自然数，$f(x)$ 在 $[x_0, x_0 + \delta](\delta > 0)$ 上，可微 $f(x_0) = 0$.



第 952 题图

解 如图示 Ω 在 xy 平面上的投影 $D = \{(x, y) \mid x_0 \leqslant x \leqslant t, x_0 \leqslant y \leqslant x\} = \{(x, y) \mid x_0 \leqslant y \leqslant t, y \leqslant x \leqslant t\}$.

所以
$$\iiint_\Omega (x - y)^n f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_y^x (x - y)^n f(y)\mathrm{d}z$$
$$= \iint_D (x - y)^{n+1} f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_{x_0}^t \int_y^t (x - y)^{n+1} f(y)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{x_0}^t \frac{1}{n+2}(x - y)^{n+2} f(y)\Big|_y^t \mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{n+2}\int_{x_0}^t (t - y)^{n+2} f(y)\mathrm{d}y.$$

从而所求极限记为 I,

$$I = \lim_{t \to x_0} \frac{1}{n+2} \cdot \frac{\int_{x_0}^t (t - y)^{n+2} f(y)\mathrm{d}y}{(t - x_0)^{n+4}} \xlongequal{\text{连续用 } n+3 \text{ 次罗毕塔法则}}$$
$$\frac{1}{n+2} \cdot \lim_{t \to x_0^+} \frac{(n+2)!\,f(t)}{(n+4)(n+3)\cdots 2(t - x_0)}$$
$$= \frac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)} \cdot \lim_{t \to x_0^+} \frac{f(t)}{t - x_0} = \frac{f'(x_0)}{(n+4)(n+3)(n+2)}.$$

953.(吉林大学) 设 $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j$ 表示变量 (x_1, x_2, x_3) 的二次型其系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 为对称正定的，证明椭球面 $S: \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j = 1$ 所包围的体积等于 $\frac{4\pi}{3}(\det A)^{-\frac{1}{2}}$，$\det A$ 表示 A 的行列式.

证 $\because A$ 是对称正定的，$\therefore$ 由代数知识得存在可逆矩阵 B.
使 $B'AB = E$，(E 为单位矩阵).

作线性变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

则 S 变为$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$,

且$\dfrac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} = \det B$.

$\therefore$ 所包围的体积 $= \iiint\limits_{\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j \leq 1} dx_1dx_2dx_3 = \iiint\limits_{y_1^2+y_2^2+y_3^2 \leq 1} |\det B| dy_1dy_2dy_3$

$= \dfrac{4\pi}{3} |\det B|$.

又 $|\det B|^2 |\det A| = 1$,($\because B'AB = E, \det B' = \det B$),

$\therefore |\det B|^2 = \dfrac{1}{|\det A|} = \dfrac{1}{\det A}$,($\because A$ 正定,$\det A > 0$)

$\therefore |\det B| = (\det A)^{-\frac{1}{2}}$.

$\therefore$ 包围的体积等于$\dfrac{4\pi}{3}(\det A)^{-\frac{1}{2}}$.

954.(延边大学) 求曲面$(\frac{x}{a})^{\frac{2}{5}} + (\frac{y}{b})^{\frac{2}{5}} + (\frac{z}{c})^{\frac{2}{5}} = 1$所围空间区域的体积 V.

解 令 $u = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{5}}, v = \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{1}{5}}, w = \left(\dfrac{z}{c}\right)^{\frac{1}{5}}$,则

$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} 125abc(uvw)^4 dudvdw$.

令$\begin{cases} u = ar\sin\varphi\cos\theta, \\ v = br\sin\varphi\sin\theta, \\ w = cr\cos\varphi \end{cases}$ 则 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$V = 125abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin^4\varphi\cos^4\theta \cdot r^4\sin^4\varphi\sin^4\theta \cdot r^4\cos^4\varphi \cdot r^2\sin\varphi dr$

$= 125abc\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\cos^4\theta d\theta\int_0^{\pi}\sin^9\varphi\cos^4 d\varphi\int_0^1 r^{14}dr$

$= 125abc \cdot \dfrac{1}{32}\int_0^{2\pi}(\sin 2\theta)^4 d(2\theta)[-\int_0^{\pi}(\cos^4\varphi - 2\cos^6\varphi + \cos^8\varphi)d\cos\varphi \cdot \dfrac{1}{15}]$

$= \dfrac{25}{96}abc[\dfrac{3}{8}(2\theta) - \dfrac{1}{4}\sin 4\theta + \dfrac{1}{32}\sin 8\theta] |_0^{2\pi} \cdot [-(\dfrac{1}{5}\cos^5\varphi - \dfrac{2}{7}\cos^7\varphi$

$+ \dfrac{1}{9}\cos^9\varphi)] |_0^{\pi}$

$= \frac{5}{504}abc\pi.$

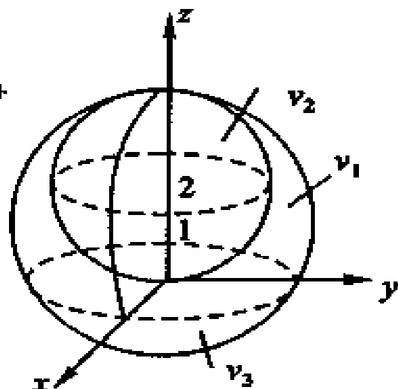
955.(南京大学) 求$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}V$,其中 $V: x^2+y^2+(z-2)^2 \geqslant 4$且$x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 9. z \geqslant 0$所成的空心立体.

解 令 $V_1\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 9\}$,

$V_2\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 4\}$,

$V_3\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 9 \text{且} z \leqslant 0\}$.

所以



第 955 题图

$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{V_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}V - \iiint\limits_{V_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}V - \iiint\limits_{V_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}V.$

令$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = 1 + r\cos\varphi \end{cases}$

则 V_1 变为

$\{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant 3, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$,

$\iiint\limits_{V_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^3 r^2\sin^2\varphi \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^3 r^4\mathrm{d}r = \frac{8\pi}{15}\times 3^5.$

同理 令$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta,, \\ z = 2 + r\cos\varphi, \end{cases}$

则$\iiint\limits_{V_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\mathrm{d}r = \frac{8\pi}{15}\times 2^5$

$V_3\{(x,y,z) \mid 1-\sqrt{9-x^2-y^2} \leqslant z \leqslant 0, (x,y) \in (x^2+y^2 \leqslant 8)\}$

$\therefore \iiint\limits_{V_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}v = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 8}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{3}\mathrm{d}z = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 8}(x^2+y^2)(\sqrt{9-x^2-y^2}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

令$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$则

$$\iiint\limits_{V_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r^2(\sqrt{9-r^2}-1)\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}r^2(\sqrt{9-r^2}-1)\cdot r\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{t=r^2}\pi\int_0^8 t(\sqrt{9-t}-1)\mathrm{d}t=\pi[6\times 26-\frac{2}{5}(3^5-1)-32].$$

$$\therefore\iiint\limits_V(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\frac{8\pi}{15}3^5-\frac{8\pi}{15}\cdot 2^5-\pi[6\times 26-\frac{2}{5}(3^5-1)-32]$$

$$=\pi\left[\frac{8}{15}\cdot 3^5+\frac{6}{15}-124-\frac{2}{5}-\frac{8}{15}\cdot 2^5\right]$$

$$=\pi\left[\frac{14\times 243}{15}-124-\frac{6}{15}-\frac{8\times 32}{15}\right]$$

$$=\pi(\frac{340}{15}-124)=\pi(\frac{628}{3}-124)=\pi\frac{256}{3}.$$

956.(北京大学)　给定重积分$\iiint\limits_\Omega[\frac{1}{yz}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{xz}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{1}{xy}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

其中$\Omega:1\leqslant yz\leqslant 2,1\leqslant xz\leqslant 2,1\leqslant xy\leqslant 2$,试将积分作下面变换　$u=yz,v=xz,w=xy$,要求变换后积分出现u,v,w和F关于u,v,w的偏导数(假设F有连续的一阶偏导数).

解　由$u=yz,v=xz,w=xy$,得

$$\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{vw}{u}},\\ y=\sqrt{\dfrac{uw}{v}},\\ z=\sqrt{\dfrac{uv}{w}}\end{cases}$$
则Ω变为$V=\{(u,v,w)\mid 1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 2,1\leqslant w\leqslant 2\}$,

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}=\frac{1}{2xyz}=\frac{1}{2\sqrt{uvw}}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{vw}{u}}(-\frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{1}{w}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}).$$

同理　$$\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{uw}{v}}(\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{1}{w}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}),$$

$$\frac{\partial F}{\partial w}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{uv}{w}}(\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{1}{w}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}).$$

$$\therefore 2\sqrt{\frac{u}{vw}}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+2\sqrt{\frac{v}{uw}}\frac{\partial F}{\partial v}+2\sqrt{\frac{w}{uv}}\frac{\partial F}{\partial w}=\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{1}{w}\frac{\partial F}{\partial z}.$$

$$\therefore \iiint_{\Omega}\left(\frac{1}{yz}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{zx}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{1}{xy}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{V}\left(2\frac{u}{vw}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+2\frac{v}{uw}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+2\frac{w}{uv}\cdot\frac{\partial F}{\partial w}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{uvw}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\iiint_{V}\left(\frac{1}{vw}\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{1}{uw}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{1}{uv}\cdot\frac{\partial F}{\partial w}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

957.（河北师范学院）　求曲面 $x^2+y^2+z^2=\frac{z}{h}e^{-\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}$ 所界的体积

解　由曲面方程知 $z\geqslant 0$.

令 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$ 则

$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{h}\cos\varphi e^{-\cos^2\varphi}$.

从而所求体积

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{h}\cos\varphi e^{-\cos^2\varphi}}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{\frac{1}{h}\cos\varphi e^{-\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{h^3}\cdot\cos^3\varphi e^{-3\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$\xlongequal{t=\cos\varphi}\frac{2\pi}{3h^3}\int_0^1 t^3e^{-3t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{u=t^2}\frac{\pi}{3h^3}\int_0^1 ue^{-3u}$$

$$=\frac{\pi}{3h^3}\left(\frac{1}{9}-\frac{2}{9}e^{-3}\right)=\frac{\pi}{27h^3}\left(1-\frac{2}{e^3}\right).$$

958.（厦门大学）　求 xz 平面上的圆周 $(x-a)^2+z^2=b^2(0<b<a)$，绕 Z 轴一圈所画的闭曲面所包围的体积.

解　令 V 为所画闭曲面所围的空间，则

$V=\{(x,y,z)\mid -b\leqslant z\leqslant b,\ (a-\sqrt{b^2-z^2})^2\leqslant x^2+y^2\leqslant(a+\sqrt{b^2-z^2})^2\}$,

$\therefore$ 所求体积仍记为 V，则

$$V=\iiint_{V}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-b}^{b}\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-b}^{b}[(a+\sqrt{b^2-z^2})^2\pi-(a-\sqrt{b^2-z^2})^2\pi]dz$$

$$= 4\pi\int_{-b}^{b}a\sqrt{b^2-z^2}dz \xlongequal{z=b\sin\theta} 4\pi ab^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta = 2ab^2\pi^2.$$

959.(北京大学,1997 年) 计算三重积分

$$\iiint\limits_{V:x^2+y^2+z^2\leqslant 2z}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}dxdydz.$$

解 令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$,则 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi$.

$\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}dxdydz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^5\cdot r^2\sin\varphi d = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{8}$
$\cdot 2^8\cos^8\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{64\pi}{9}(-\cos^9\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64\pi}{9}.$

960.(中国科学院,2001 年) 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^3xyz(a>0)$ 所围成立体的体积.

解 由曲面方程知所围立体只能位于第一,三,五,七卦限,且体积为第一卦限立体 V_1 体积的 4 倍.

即 $V = 4V_1 = \iiint\limits_{V_1}dxdydz.$

令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ 则

$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant a(\sin^2\varphi\cos\varphi\cdot\sin\theta\cos\theta)^{\frac{1}{3}}.$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a(\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}}\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3(\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta)\cdot\sin\varphi d\varphi$$

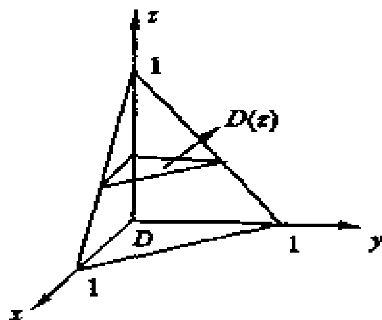
$$= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{4a^3}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{a^3}{6}.$$

961.(中国科学院,1999 年,郑州大学,1984 年) 计算积分

$$\iiint\limits_{\substack{x,y,z\geqslant 0\\ x+y+z\leqslant 1}}x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}dxdydz, \text{其中 } p>0, q>0, r>0.$$

(提示:$B(\alpha,\beta) = \int_0^1x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx, B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$)

解 $\because$ $V=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 1,(x,y)\in D(z)\}$，其中 $D(z)=\{x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1-z\}$



第 961 题图

$$\therefore \iiint\limits_{\substack{x,y,z\geqslant 0\\ x+y+z\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}x\int_0^{1-x-z}x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 z^{r-1}\mathrm{d}z\int_0^{1-z}x^{p-1}\frac{1}{q}(1-x-z)^q\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{q}\int_0^1 z^{r-1}\mathrm{d}z\int_0^{1-z}x^{p-1}(1-z-x)^q\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=(1-z)t}\frac{1}{q}\int_0^1 z^{r-1}\mathrm{d}z\int_0^1(1-z)^{p-1}t^{p-1}\cdot(1-z)^q(1-t)^q\cdot(1-z)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{q}\int_0^1 z^{r-1}(1-z)^{p+q}\mathrm{d}z\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{q}B(r,p+q+1)\cdot B(p,q+1)$$

$$=\frac{1}{q}\cdot\frac{\Gamma(r)\Gamma(p+q+1)]}{\Gamma(p+q+r+1)}\cdot\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}$$

$$=\frac{1}{q}\cdot\frac{\Gamma(r)\Gamma(p)\cdot q\Gamma(q)}{(p+q+r)\Gamma(p+q+r)}$$

$$=\frac{1}{p+q+r}\cdot\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}.$$

962.（华东师范大学，1998 年） 设 $D:x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$，$F(t)=\iiint\limits_D f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 f 为连续函数，$f(1)=1$，证明 $F'(1)=4\pi$.

解 令 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$ 则 $0\leqslant r\leqslant t,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

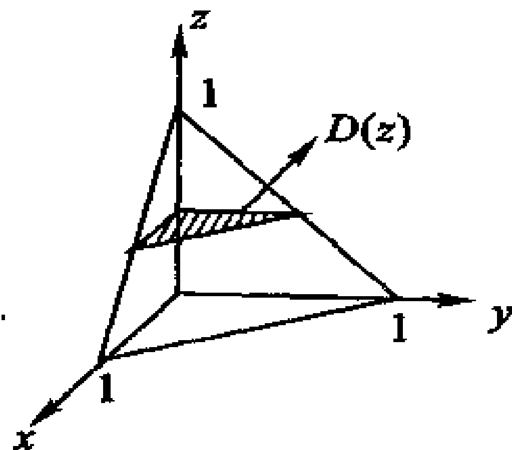
$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t r^2 f(r^2)\mathrm{d}r,$$

$$\therefore F'(t)=4\pi t^2 f(t^2),F'(1)=4\pi f(1)=4\pi.$$

963.（北京大学，1996 年） 求积分 $I=\iiint\limits_D(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的值，其中 D 由平面 $x+y+z=1$ 以及三个坐标平面所围成的区域.

解 由 x,y,z 的对称性，有

$$\iiint_D (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=3\iiint_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$
$$=3\int_0^1 \mathrm{d}z\iint_{D(z)} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{8}.$$



第 963 题图

964. 计算$\iiint_V xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V:

$1\leqslant\frac{yz}{x}\leqslant 2, y\leqslant zx\leqslant 2y, z\leqslant xy\leqslant 2z$,

解　令 $u=\frac{yz}{x}, v=\frac{zx}{y}, w=\frac{xy}{z}$

则 V 变为 V': $1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 2, 1\leqslant w\leqslant 2$.

$\frac{\partial(x,v,w)}{\partial(x,y,z)}=4$，从而$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{4}$, $xyz=uvw$.

所以

$$\iiint_V xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{V'} uvw\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$
$$=\frac{1}{4}\int_1^2 u\mathrm{d}u\cdot\int_1^2 v\mathrm{d}v\cdot\int_1^2 w\mathrm{d}w$$
$$=\frac{1}{4}\left(\int_1^2 u\mathrm{d}u\right)^3=\frac{27}{32}.$$

965.(1) 若 f 为连续函数，证明：

$$\iiint_V f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^1 f(z)(1-z^2)\mathrm{d}z,$$

其中 $V: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$;

(2) 若 f 连续，证明：

$$\iiint_V f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^1 f(ku)(1-u^2)\mathrm{d}u,$$

其中 $V: x^2+y^2+z^2\leqslant 1, k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

证　(1) 采用柱面坐标，得

$$\therefore \iiint_V f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-1}^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z^2} f(z)r\mathrm{d}r=\int_{-1}^1 2\pi\,\frac{(1-z^2)}{2}f(z)\mathrm{d}z$$
$$=\pi\int_{-1}^1 f(z)(1-z^2)\mathrm{d}z.$$

(2) 作正交变换$\begin{cases} u = \dfrac{1}{k}(ax + by + cz), \\ v = a_1x + b_1y + c_1z, \\ w = a_2x + b_2y + c_2z \end{cases}$ 其中$k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

则由正交变换的特性知

V变成V': $u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1$, 且$\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 1$.

所以

$$\iiint_V f(ax + by + cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V'} f(ku)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$\xlongequal{\text{由(1)}} \pi\int_{-1}^{1} f(ku)(1 - u^2)\mathrm{d}u.$$

966.(山东大学) 求区域$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x, x + y \leqslant z \leqslant e^{x+y}$的体积.

解 所求体积

$$V = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_{x+y}^{e^{x+y}} \mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x [e^{x+y} - (x + y)]\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 [e^{x+y} - (xy + \frac{1}{2}y^2)]\Big|_0^x \mathrm{d}x = \int_0^1 (e^{2x} - \frac{3}{2}x^2 - e^x)\mathrm{d}x$$

$$= (\frac{1}{2}e^{2x} - e^x - \frac{1}{2}x^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - e^1 - \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - 1)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e = \frac{e(e-2)}{2}.$$

967.(同济大学) 计算三重积分

$$\iiint_\Omega \frac{\cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\pi^2, x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \pi^2$$

解 令$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ 则Ω变成

$\pi \leqslant r \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

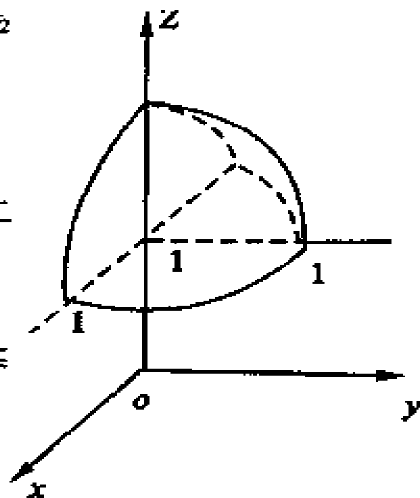
$$\iiint_\Omega \frac{\cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\int_\pi^{2\pi} \frac{\cos r}{r}\cdot r^2\sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= 4\pi\int_\pi^{2\pi} r\cos r\mathrm{d}r = 4\pi(r\sin r + \cos r)\Big|_\pi^{2\pi}$$

$$= 8\pi.$$

968.(西北电讯工程学院) 求

$$I = \int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$



第968题图

解　累次积分的区域 V 如图示为第一、二卦限的四分之一单位球域

令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ 则 V 变成 $\frac{1}{\cos\varphi} \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$.

$$I = \int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi}\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{2}[4\cos^2\varphi - \frac{1}{\cos^2\varphi}]d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3}(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}) - \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$

969.(西安交通大学)　求三重积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} e^{|z|}dV$ 的值.

解　令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ 则 $0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

$$\iiint\limits_V e^{|z|}dV = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 e^{r|\cos\varphi|}\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$\xlongequal{\text{对称性}} 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 e^{r\cos\varphi}\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$= 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2e^{r\cos\varphi}\sin\varphi d\varphi = 4\pi\int_0^1(e^r-1)rdr$$

$$= 2\pi.$$

970.(大连工学院)　求 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$,

其中 Ω 是 $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2, x^2+y^2+(z-a)^2 \leqslant a^2$ 的公共部分.

解　如图示 Ω 在 xy 平面上的投影区域

$D: x^2+y^2 \leqslant \frac{3}{4}a^2, V$

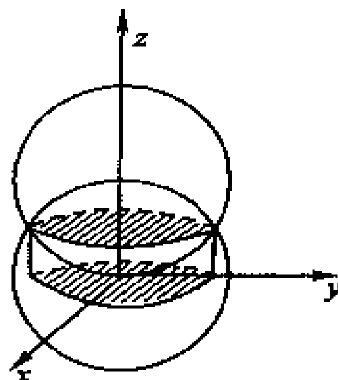
$= \{(x,y,z) \mid a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$.

则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}V = \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z^2 \mathrm{d}z$.

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$,则 D 变为

$0 \leqslant r \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}a, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \mathrm{d}r \int_{a-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} z^2 \mathrm{d}z = \frac{59}{480}\pi a^5.$$



第 970 题图

注:也可直接采用柱坐标变换计算,效果相同.

971.(昆明工学院) 求闭曲面$(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2)^2 = c^3 z (a,b,c > 0)$所围立体之体积.

解 由曲面方程知 $z \geqslant 0$.

令 $\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ 则 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant c(\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}$.

$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = -abr^2\sin\varphi$.

$\therefore$ 所求立体体积

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{c(\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}} abr^2 \sin\varphi \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{ab}{3} \sin\varphi c^3 \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{ab\pi}{3}c^3.$$

972.(浙江大学) 求由半径 a 的球面与顶点在球心顶角为 2α 的圆锥面所围成区域(如图)的体积

解 如图建立坐标系,则球面方程为

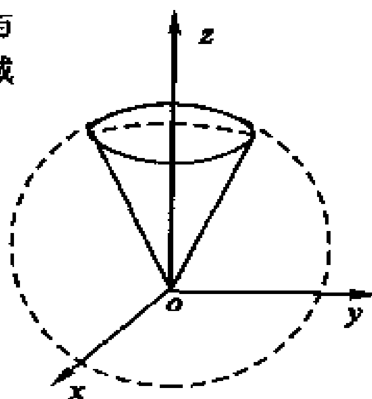
$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

锥面方程 $z = \cot\alpha \sqrt{x^2 + y^2}$,

取球坐标变换,则区域体积为

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\alpha} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a} r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \cdot \frac{a^3}{3} \int_0^{\alpha} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{3} a^3 (1 - \cos\alpha).$$



第 972 题

973.(湖南大学) 设 $F(x)=\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 f 为可微函数,$V=\{0\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant t,0\leqslant z\leqslant t\},t>0$,证明

$$F'(t)=\frac{3}{t}\Big[F(t)+\iiint\limits_V xyzf'(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Big].$$

证 令 $x=ut,y=vt,z=wt$,则 V 变成 $V':a\leqslant u\leqslant 1,0\leqslant v\leqslant 1,0\leqslant w\leqslant 1$.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=t^3.$$

$$\therefore F(t)=\iiint\limits_{V'} t^3f(t^3uvw)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

$$F'(t)=\iiint\limits_{V'} 3t^2f(t^3uvw)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\iiint\limits_{V'} t^3\cdot f'(t^3uvw)\cdot 3t^2uvw\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\frac{3}{t}\Big[\iiint\limits_{V'} t^3f(t^3uvw)\mathrm{d}u\mathrm{d}w\mathrm{d}w+\iiint\limits_{V'} tu\cdot tv\cdot twf'(t^3uvw)\cdot t^3\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\Big]$$

$$=\frac{3}{t}\Big[F(t)+\iiint\limits_V xyzf'(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Big].$$

974.(南京邮电学院)

(1) 计算二重积分 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 为 $y=x^3,y=1,x=-1$ 所围成区域,f 是连续函数.

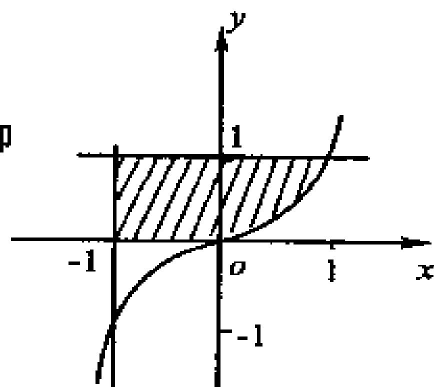
(2) 假设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,证明

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z=0.$$

解 (1) 如图示

$D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,x^3\leqslant y\leqslant 1\}$.

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)=f(x)$ 即 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.



第 974 题图

$$\therefore \iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 x[1+y(x^2+y^2)]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^1 x(1-x^3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{2}{5} + \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}\frac{1}{2}xf(x^2+y^2)\mathrm{d}(x^2+y^2)$$

$$= -\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(1+x^2) - F(x^2+x^6)]\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2}{5}.$$

(2) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(0) = 0$,

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(F(y) - F(x))f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1[F(y)\cdot f(y) - F(x)f(y)]\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x[\frac{1}{2}(F^2(1) - F^2(0)) - F(x)(F(1) - F(0))]$$

$$= \int_0^1[\frac{1}{2}F^2(1) - F(1)F(1))f(x)]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 F^2(1)f(x)\mathrm{d}x - F(1)\int_0^1 F(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}F^2(1)(F(1) - F(0)) - F(1)\cdot\frac{1}{2}(F^2(1) - F^2(0))$$

$$= \frac{1}{2}F^3(1) - \frac{1}{2}F^3(1) = 0.$$

注　若$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z$改为$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z$可类似运用

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{3!}(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^3.$$

975.(北京师范大学,1997 年)　设 Ω 由 $z = x^2 + y^3, z = 0, xy = 1, xy = 2, y = 3x, y = 4x$ 所围成,求积分　$I = \iiint\limits_{\Omega} x^2y^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解　由于 $\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2, (x,y) \in D\}$,
其中 D 由 $xy = 1, xcy = 2, y = 3x, y = 4x$ 围成.

所以 $I = \iint\limits_{D} x^2y^2\int_0^{x^2+y^2} z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\iint\limits_{D} x^2y^2(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

令$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$,则$\begin{matrix} 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ 3 \leqslant v \leqslant 4 \end{matrix}$ $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 2\dfrac{y}{x} = 2v$.

所以　$I = \frac{1}{2}\iint\limits_{1\leqslant u\leqslant 2} u^2\cdot(uv + \frac{u}{v})^2\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{4}\int_1^2 u^4\mathrm{d}u\int_3^4\frac{1}{v}(v + \frac{1}{v})^2\mathrm{d}v$

$$= \frac{31}{20}\cdot\int_3^4\left(v+\frac{2}{v}+\frac{1}{v^3}\right)dv = \frac{31}{20}\left(\frac{7}{2}+2\ln\frac{4}{3}+\frac{7}{288}\right) = \frac{31}{40}\left(\frac{1015}{144}+4\ln\frac{4}{3}\right).$$

976.（吉林工业大学） 计算下面曲面所围成图形的体积：$z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), x + y = \pm 1, x - y = \pm 1$.

解 由体积公式知

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz.$$

令 $u = \frac{z}{x^2+y^2}, v = x + y, w = x - y$，则

$1 \leqslant u \leqslant 2, -1 \leqslant v \leqslant 1, -1 \leqslant w \leqslant 1.$

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = -\frac{2}{x^2+y^2} = -\frac{2}{\frac{v^2+w^2}{2}} = -\frac{4}{v^2+w^2}.$$

所以 $V = \int_1^2 du\int_{-1}^1 dv\int_{-1}^1 \frac{v^2+w^2}{4}dw = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$

第十章　曲线积分与曲面积分

§1　第一型曲线积分与曲面积分

【内容综述】

一、综述

1. 定义

(1) 第一型曲线积分的定义

设 L 为平面或空间上的可求长曲线，二元函数或三元函数 f 定义在 L 上，任给 L 一个分割 T，将 L 分成 n 个小弧段 $S_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，其长记为 Δs_i，在每个 s_i 上任取一点 P_i（也称为介点）作和数，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$，记

$$\|T\| = \max_{1\leq i\leq n}\{\Delta s_i\}$$

如果 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i = J$，存在且 J 与对 L 的分割 T 及介点 P_i 的取法均无关，则称 f 沿曲线 L 可积，并称 J 为 f 沿曲线 L 的第一型曲线积分，记为 $\int_L f\mathrm{d}s$，即 $\int_L f\mathrm{d}s = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta s_i$.

当 $f\geq 0$，并表示曲线 L 的密度函数时，$\int_L f\mathrm{d}s$ 表示曲线 L 的质量，

当 $f\equiv 1$ 时，$\int_L \mathrm{d}s$ 表示曲线 L 的长度.

(2) 第一型曲面积分的定义

设 S 是光滑或逐片光滑的曲面，$f(x,y,z)$ 定义在 S 上，任给曲面 S 一个分割 T，将 S 分成 n 个小曲面 $S_i(i=1,2,\cdots\cdots n)$，其面积记为 Δs_i，在每个 S_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，作和数，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$.

记 $\|T\|$ 为 n 个 s_i 的直径中的最大者，如果 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i = J$ 存在且 J 与对 S 的分割 T 及点 (ξ_i,η_i,ξ_i) 的取法均无关，则称 f 沿 S 可积，并称 J 为 f 沿 S 的第一型曲面积分，记为 $\iint_S f\mathrm{d}s$.

2. 性质

第一型曲线(曲面)积分与定积分、重积分的性质类似读者自行给出.

3. 常用公式

(1) 第一型曲线积分的参数方程计算公式

设平面光滑曲线 L 的参数方程为$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $a \leqslant t \leqslant b$, $f(x,y)$ 在 L 上连续,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_b^a f[\varphi(t),\psi(t)] \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (x'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

特别,当曲线 $L: y = \varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ 时,

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1 + [\varphi'(x)^2]}\mathrm{d}x.$$

设空间光滑曲线 L 的参数方程为$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ Z = h(t), \end{cases}$

$a \leqslant t \leqslant b$, $f(x,y,z)$ 在 L 上连续,则

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_a^b f[\varphi(t),\psi(t),h(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

(2) 第一型曲面积分的计算公式

(ⅰ) 设 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上连续, S 的方程为 $z = z(x,y)$,它在 xy 平面上的投影区域为 D,且 $z(x,y)$ 在 D 上有一阶连续的偏导数,则

$$\iint_s f(x,y,z)\mathrm{d}s = \iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(ⅱ) 设 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上连续,曲面 S 用参数方程 $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in \Delta$,表示,并且$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $\dfrac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$ 中至少有一个不为零,则

$$\iint_S f(x、y、z)\mathrm{d}x = \iint_\Delta f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{E \cdot G - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}r,$$

其中 $E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$, $G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$,

$F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v$.

二、解题方法

1. 考点 1　第一型曲线积分的计算

常用方法

(1) 参数方程法(基本计算法) 即通过曲线的参数方程化为关于参数的定积分计算.

(2) 化为第二型曲线积分,即通过两类曲线积分的关系把第一型曲线积分化为第二型曲线计算.

(3) 利用曲线方程简化被积函数.

(4) 利用曲线与被积函数的对称性:若曲线 L 的方程中 x,y,z 的地位相同,则 $\int_L f(x)\mathrm{d}s = \int_L f(y)\mathrm{d}x = \int_L f(z)\mathrm{d}s$.

2. 考点 2　第一型曲面积分的计算

常用方法

(1) 基本计算法(即根据曲面方程的表示形式,化为二重积分的计算)

(2) 化为第二型面积分,即通过第一、二型曲面积分的关系转化为第二型曲面积分.

(3) 化为三重积分,即利用高斯公式计算.

(4) 利用对称性,即如果曲面 S 关于 xy 平面对称,且

(ⅰ) 若 $f(x,y,z)$ 是关于 z 的奇函数,即 $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$,则 $\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}s = 0$.

(ⅱ) 若 $f(x,y,z)$ 是关于 z 的偶函数,即 $f(x,y,-z) = f(x,y,z)$,则 $\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}s = 2\iint_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s$,

其中 S_1 为 S 在 xy 平面的上方部分.

(5) 利用曲面的方程简化计算.

【经典题解】

977.(中国科学院,2002 年)　求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 被平面 $z=\frac{a}{4}$ 和 $z=a/2$ 所夹部分的曲面面积.

解　$S: z\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在 xy 平面上的投影

$$D_{xy}: \frac{3a^2}{4} \leqslant x^2+y^2 \leqslant \frac{15}{16}a^2,$$

所求面积

$$S = \iint_s \mathrm{d}s = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi a^2}{2}.$$

978.(西北电讯工程学院) 试证：$\left| \iint_S f(mx + ny + pz) \right| \leqslant 4\pi M$，

其中 $m^2 + n^2 + p^2 = 1, m, n, p$ 为常数，$f(t)$ 在 $|t| \leqslant 1$ 时为连续可微函数，$f(-1) = f(1) = 0, M = \max\limits_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \{|f(t)|\}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

证 作正交变换 $\begin{cases} t = mx + ny + pz, \\ u = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ v = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \end{cases}$

由正交变换的特点

$$\iint_S f(mx + ny + pz)\mathrm{d}s = \iint_{t^2 + u^2 + v^2 \leqslant 1} f(t)\mathrm{d}s$$

$$= 2\iint_{D_{tv}} f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - t^2 - v^2}} \mathrm{d}v\mathrm{d}t, D_{tv}: v^2 + t^2 \leqslant 1$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \frac{f(t)}{\sqrt{1 - t^2 - v^2}} \mathrm{d}v$$

$$= 2\int_{-1}^{1} f(t) \arcsin \frac{v}{\sqrt{1 - t^2}} \Bigg|_{-\sqrt{1 - t^2}}^{\sqrt{1 - t^2}} \mathrm{d}t.$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = 2\pi [tf(t) \Big|_{-1}^{1}$$

$$- \int_{-1}^{1} tf'(t)\mathrm{d}t]$$

$$= -2\pi \int_{-1}^{1} tf'(t)\mathrm{d}t.$$

$$\therefore \left| \iint_S f(mx + ny + pz)\mathrm{d}x \right| = 2\pi \left| \int_{-1}^{1} tf'(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant 2\pi \int_{-1}^{1} M\mathrm{d}t = 4\pi M.$$

979.(厦门大学,2001 年) 计算积分 $I = \iint_S (x^2 + y^2) z\mathrm{d}s$，

S 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geqslant 0)$，含在柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 内部的部分.

解 $S: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 它在 xy 平面上的投影

$$D: x^2 + y^2 \leqslant Rx, \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

$$I=\iint_D(x^2+y^2)\cdot\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta}R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}R^4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=(\frac{3\pi}{64}+\frac{1}{12})R^5.$$

980.(厦门大学,2000年) 计算积分

$$I=\iint_S\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\mathrm{d}x,\text{其中}$$

$S:x^2+y^2+z^2=R^2,0\leqslant a\leqslant+\infty,a\neq R.$

解 令 $\begin{cases}x=R\sin\varphi\sin\theta,\text{则 }0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\\ y=R\sin\varphi\sin\theta,0\leqslant\varphi\leqslant\pi.\\ z=R\cos\varphi,\end{cases}$

$E=(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2+(z'_\varphi)^2=R^2,$

$G=(x'_\theta)^2+(y'_\theta)^2+(z'_\theta)^2=R^2\sin^2\varphi,F=0,$

$E\cdot G-F^2=R^4\sin^2\varphi,$

所以 $I=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant\pi\\0\leqslant\theta\leqslant2\pi}}\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2\mathrm{aR}\cos\varphi}}\cdot R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$

$$=2\pi R^2\int_0^\pi\frac{\sin\varphi}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi R^2\cdot\frac{1}{aR}\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\varphi}\Big|_0^\pi.$$

$$=\frac{2\pi R}{a}(R+a-|R-a|)=\begin{cases}4\pi R,R>a,\\ \frac{4\pi R^2}{a}R>a\end{cases}.$$

981.(复旦大学,1999年) 求曲线 $y=\ln(1-x^2),0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 的弧长.

解 由弧长公式

$$l=\int_l\mathrm{d}S=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(\frac{-2x}{1-x^2})^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(-1+\frac{2}{1-x^2})\mathrm{d}x.$$

$$=\ln3-\frac{1}{2}.$$

982.计算(1) $\oint_L(x\sin y+y^3\mathrm{e}^x)\mathrm{d}s$,其中 $L:x^2+y^2=1;$

(2) $\oiint\limits_S \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z \mathrm{d}s$，其中 $S: x^2+y^2+z^2=1$.

解　(1) 因 L 关于 x 轴对称，且 $x\sin y + y^3 e^x$ 是 y 的奇函数，所以 $\oint\limits_L (x\sin y + y^3 e^x)\mathrm{d}s = 0$.

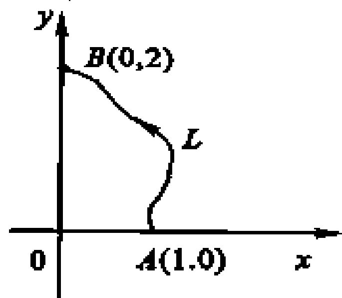
(2) 因 S 关于 xy 平面对称，且 $\sin x\sin y\sin z$ 是 z 的奇函数，所以 $\oiint\limits_S \sin x\sin y\sin z \mathrm{d}s = 0$.

983. 设 L 为平面上的一条连续可微且没有重点的曲线，L 的起点为 $A(1,0)$，终点为 $B(0,2)$，L 全落在第一象限，试计算 $\int_L \frac{\partial \ln r}{\partial n}\mathrm{d}s$，其中 $\frac{\partial \ln r}{\partial n}$ 表示函数 $\ln r$ 沿曲线法线正向 $\vec{n}$ 的方向导数 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

解　：设 $f(x,y)=\ln r=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，由于

$$\frac{\partial f}{\partial n} = f_x \cdot \cos(\widehat{\vec{n},x}) + f_y \cdot \cos(\widehat{\vec{n},y})$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}\cos(\widehat{\vec{n},x}) + \frac{y}{x^2+y^3}\cos(\widehat{\vec{n},y})$$



(第 983 题图)

所以由第一、二型曲线积分的关系知

$$\int_L \frac{\partial \ln r}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s = \int_L \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s = \int_L \frac{-y}{x^2+y^3}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y \quad ①$$

令 $P=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，显然 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在 $x>0$，$y>0$ 时成立，所以 ① 式积分与路线无关，选取直线

$\overline{AB}: y=2-2x, 0\leqslant x\leqslant 1$ 代替 L，得

$$\int_L \frac{\partial \ln r}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s$$

$$= -\int_1^0 \left(\frac{2-2x}{x^2+(2-2x)^2} + \frac{2x}{x^2+(2-2x)^2}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{5x^2-8x+4}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

984. (上海师范大学)　计算 $\iint\limits_S (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 S 是 xy 平面上方的抛物面 $Z=2-(x^2+y^3)$.

解　$\because S$ 在 xy 平面上的投影为 $D: x^2+y^2\leqslant 2$，$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=$

$\sqrt{1+4x^2+4y^2}$

$$\therefore \iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \iint_S (x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} a^2 \cdot \sqrt{1+4r^2} \cdot r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r \xlongequal{t = r^2} \pi\int_1^3 u^2 \cdot \frac{1}{8}(u^2-1)\mathrm{d}u = \frac{199}{30}\pi.$$

985.（浙江大学，2002 年） 求第一型曲面积分

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}},$$

其中 $h \neq R$.

解 令 $x = R\cos\theta sin\varphi, y = Rsin\theta sin\varphi, z = R\cos\varphi, z = R\cos\varphi$,

其中 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，且

$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi) + (z'_\varphi)^2 = R^2$,

$G = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = R^2\sin\varphi, F = 0.$

$$\therefore I = \iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi}} \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{R^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + (R\cos\varphi - h)^2}}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi \frac{\sin\varphi}{\sqrt{R^2-2Rh\cos\varphi+h^2}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{2\pi R^2}{2Rh}\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{R^2-2Rh\cos\varphi+h^2}}\mathrm{d}(R^2-2Rh\cos\varphi+h^2)$$

$$= \frac{2\pi R^2}{2Rh} \cdot 2\sqrt{R^2-2Rh\cos\varphi+h^2}\Big|_0^\pi = 4\pi R.$$

986.（山东大学） 试求面积分

$$F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}s(-\infty < t < +\infty)$$ 之值，其中

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2, 若 z \geqslant \sqrt{x^2+y^2} \\ 0, z < \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}.$$

解 如图示 $S = S_1 \cup S_2$，在 S_1 上 $z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$，

在 S_2 上 $z < \sqrt{x^2+y^2}$.

所以 $F(t) = \iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}s.$

而 S_1 在 xy 平面上的投影 $D: x^2+y^2\leqslant\frac{t^2}{2}$,

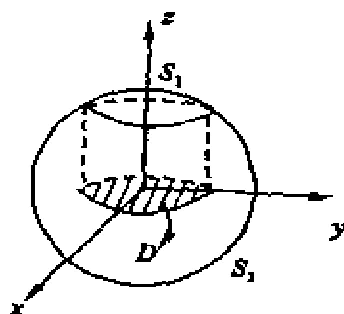
$S_1: z=\sqrt{t^2-x^2-y^2}$,

从而 $F(t)=\iint\limits_D (x^2+y^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}r^2\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\cdot r\mathrm{d}r=$$

$$2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}r^2\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\cdot r\mathrm{d}r=2\pi t\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}r^3\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}\pi t^4\left(2-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right).$$

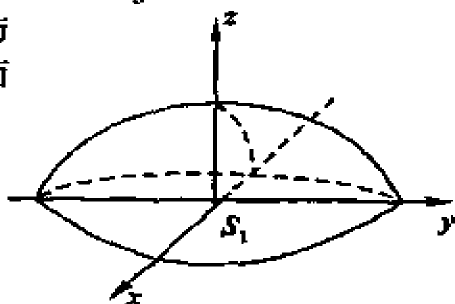


第 986 题图

987.(南京大学) 以 S 表示椭球 B $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分($z\geqslant 0$), λ, u, v 表示 S 的外法线的方向余弦,计算曲面积分 $\iint\limits_S z\left(\frac{\lambda x}{a^2}+\frac{uy}{b^2}+\frac{vz}{c^2}\right)\mathrm{d}s$.

解 如图示:补充 xy 平面上的椭圆 S_1 与 S 构成封闭曲面记为 S_0,由于 $S_1: z=0$,从而

$$\iint\limits_{S_1} z\left(\frac{\lambda x}{a^2}+\frac{uy}{b^2}+\frac{vz}{c^2}\right)\mathrm{d}s=0.$$



第 987 题

$$\therefore \iint\limits_S z\left(\frac{\lambda x}{a^2}+\frac{\alpha y}{b^2}+\frac{vz}{c^2}\right)\mathrm{d}s$$

$$=\oiint\limits_{S_0}\left(\frac{\lambda x}{a^2}+\frac{\alpha y}{b^2}+\frac{vz}{c^2}\right)\mathrm{d}s$$

$$\xlongequal{\text{由高斯公式}}\iiint\limits_V\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_V\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{c}{c^2}\right)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal{\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta\\ y=br\sin\varphi\sin\theta\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)\cdot cr\cos\varphi\cdot abc\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r.$$

$$=2\pi abc^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r.$$

$$=\frac{\pi}{4}abc^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right).$$

988.（湖南大学） 计算$\int_c \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 $c: x^2+y^2=-2y$.

解 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 $c: r=-2\sin\theta(-\pi\leqslant\theta\leqslant 0)$.

所以 $c:\begin{cases} x=-2\cos\theta\sin\theta \\ y=-2\sin^2\theta \end{cases}, -\pi\leqslant\theta\leqslant 0$,

$$\int_c \sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{-c}^{0}\sqrt{4\sin^2\theta}\cdot\sqrt{(2\cos 2\theta)^2+(2\sin\theta)^2}d\theta$$

$$=\int_{-c}^{0}-4\sin\theta d\theta=8.$$

989.（西安交通大学） 计算积分$\int_l yds$，l 是摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$的一摆.

解 $\int_l yds=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+(a\sin t)^2}dt=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}dt$.

$$=\sqrt{2}a^2\int_1^{a\pi}(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}dt=\sqrt{2}a^2\int_{\pi 0}^{2}2\sin^2\frac{t}{2}\cdot|\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}|dt$$

$$=4a^2\int_0^{2\pi}|\sin\frac{t}{2}|dt$$

$$\overset{u=\frac{t}{2}}{=\!=\!=}8a^2\int_0^{\pi}|\sin u|^3du=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 udu=\frac{32}{3}a^2.$$

990.（北京师范大学） 设曲线 C 是圆 $x^2+y^2=r^2$ 在第一象限内的部分，计算积分$\int_c xyds$.

解 因 $C:\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以

$$\int_c xyds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{r^2}d\theta=r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{r^3}{2}.$$

991.（西北工业大学） 设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在曲线段 l 上连续，L 为 l 的长度，$M=\max_{(x,y)\in l}\sqrt{P^2+Q^2}$，证明$\left|\int_l Pdx+Qdy\right|\leqslant L\cdot M$，再利用上面的不等式估计积分

$$I_R=\oint_C\frac{(y-1)dx+(x+1)dx}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^2}$$，其中 $C:(x+1)^2+(y-1)^2=R^2$ 的正向，并求$\lim_{k\to+\infty}|I_R|$.

证 记 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 为 l 的切线正向的方向余弦，由两类积公的关系知

$\int_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_l (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s.$

而 $\cos\beta = \sin\alpha$，$\therefore \int_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_l (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\mathrm{d}s.$

又因 $|P\cos\alpha + Q\sin\alpha| = \sqrt{P^2 + Q^2}\sin(\alpha + \theta_0)$，其中

$\sin\theta_0 = \dfrac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$，$\cos\theta_0 = \dfrac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$.

$\therefore \left|\int_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_l |P\cos\alpha + Q\sin\alpha|\,\mathrm{d}s \leqslant \int_l \sqrt{P^2 + Q^2}\mathrm{d}s \leqslant M \cdot L.$

因在 C 上，$P^2 + Q^2 = \dfrac{(x+1)^2 + (y-1)^2}{(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2)} = \dfrac{R^2}{(R^2)^4} = \dfrac{1}{R^6} \triangleq M$，

故由上面结果，$|I_R| \leqslant \dfrac{1}{R^6} \cdot 2\pi R = \dfrac{2\pi}{R^5}$，

所以 $\lim\limits_{R \to +\infty} |I_R| = 0.$

992.（山东大学） 求球面

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 上 $r - h \leqslant z \leqslant r(0 \leqslant h \leqslant r)$ 的那一部分曲面的垂心.

解 根据球面的对称性知，垂心坐标为 $(0,0,\bar{z})$，其中 $\bar{z} = \dfrac{\rho\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}s}{\rho\iint\limits_\Sigma \mathrm{d}s}$，$\Sigma: z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$，$(x,y) \in D: x^2 + y^2 \leqslant 2rh - h^2$. ρ 为面密度，而

$\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}s = \iint\limits_D r\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi r(2rh - h^2)$，$\iint\limits_\Sigma \mathrm{d}s = \iint\limits_D \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= 2\pi rh.$

所以 $\bar{z} = \dfrac{2r - h}{2}$，即所求垂心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{2r - h}{2}\right)$.

993.（南京化工学院） 求 $\iint\limits_\Sigma (xy + yz + xz)\mathrm{d}s$. Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = 2ax(a > 0)$ 所截的部分.

解 $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$，在 xy 平面的投影为 $D: (x - a)^2 + y^2 \leqslant a^2$. 所以

$\iint\limits_\Sigma (xy + yz + xz)\mathrm{d}s = \sqrt{2}\iint\limits_D [xy + (y + x)\sqrt{x^2 + y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

而 D 关于 x 轴对称，且 $xy + y\sqrt{x^2 + y^2}$ 是 y 的奇函数，从而 $\iint\limits_\Sigma (xy + y$

$\cdot\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+xz)\mathrm{d}s=\sqrt{2}\iint\limits_{D}x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}}}$$

$$\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2a\cos\theta}r^3\cos\theta\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}16a^4\cos^5\theta\mathrm{d}\ \theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

994.(长沙铁道学院) 设 l 表示从原点到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $P(x,y,z)$ 的切平面的垂直距离之长，求 $\iint\limits_{S}l\mathrm{d}s$，其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

解 设切平面上动点坐标为 (X,Y,Z)，则切平面方程为

$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1$，原点到切平面的距离

$$l=\frac{|0+0+0+0-1|}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

根据对称性 $\iint\limits_{S}l\mathrm{d}s=8\iint\limits_{S_1}l\mathrm{d}s$，其中 s_1 为椭球面在第一卦限部分，$S_1:z=c\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},(x,y)\in D_1=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$.

$$\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{\frac{c}{a^2}x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\right)^2+\left(\frac{\frac{c}{b^2}y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\right)^2}$$

$$=\frac{c}{z}\sqrt{\frac{z^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^4}x^2+\frac{c^2}{b^4}y^2}=\frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}},$$

所以 $$\iint\limits_{S}l\mathrm{d}s=8\iint\limits_{S}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\cdot\frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=8\iint\limits_{D}\frac{c^2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 8c\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4abc\pi.$$

995.(南京化工学院) 计算$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s$,其中$\vec{a} = \{xy, -x^2, x+z\}$,$S$是平面$2x+2y+z=6$包含在第一卦限的部分,$\vec{n}$是$S$的单位法向量.

解 由平面方程$2x+2y+z=6$知$\vec{n} = \left\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}$,

所以$\vec{a}\cdot\vec{n} = \frac{1}{3}(2xy-2x^2+x+z)$.

$$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\iint_S (2xy-2x^2+x+z)\mathrm{d}s.$$

又$S: z = 6-2x-2y$,它在xy平面上的投影

$D = \{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 3, 0\leqslant y\leqslant 3-x\}$

$$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\iint_D [2xy-2x^2+x+6-2x-2y)\cdot 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (2xy-2x^2+6-x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}(2xy-2x^2+6-x-2y)\mathrm{d}y = \frac{27}{4}.$$

996.(华南工学院) 具有质量的曲面S是半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$在圆锥$z=\sqrt{x^2+y^2}$里面的部分,如果S = 每点的密度等于该点到$x0y$平面的距离的倒数,试求S的质量.

解 由题设知$S: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,它在xy平面上的投影为

$D: x^2+y^2\leqslant\frac{a^2}{2}$,$S$的面密度$\rho = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

所以S的质量为

$$m = \iint_S \frac{1}{z}\mathrm{d}s = \iint_S \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}s$$

$$= \iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \frac{a}{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\begin{cases}x = r\cos\theta\\ y = r\sin\theta\end{cases}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{a}{a^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r = 2\pi a\ln 2.$$

997.(西安冶金建筑学院) 设$H = a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$为四次齐次函数,利用齐次函数性质

$x\frac{\partial H}{\partial X}+y\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial H}{\partial z}=4H$.求曲面积分 $\oint\!\!\oint_{(s)} H(x,y,z)\mathrm{d}s$ 的值,其中 (S) 是以原点为球心的单位球面.

解　注意到:单位球面 (S) 上任一点 (x,y,z) 处的单位外法向量的方向余弦就是该点的点坐标,即 $\cos(\vec{n},x)=x,\cos(\vec{n},y)=y.\cos(\vec{n},z)=z.$

$$\oint\!\!\oint_S H(x,y,z)\mathrm{d}s=\frac{1}{4}\oint\!\!\oint_S(\frac{\partial H}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial H}{\partial y}\cdot y+\frac{\partial H}{\partial z}\cdot z)\mathrm{d}s$$

$$\xlongequal{\text{高斯公式}}\frac{1}{4}\iiint_{x^2+y^2+z^2}=[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial H}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial H}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial H}{\partial z})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1}(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

而 $\frac{\partial^2 H}{a x^2}=12a_1x^2+6a_4y^2+6a_6z^2,\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=12a_2y^2+6a_4x^2+6a_5z^2,$

$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=12a_3z^3+6a^5y^2+6a_6x^2,$

$$\oint\!\!\oint_S H(x,y,z)\mathrm{d}s=\frac{1}{4}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1}6[(2a_1+a_4+a_6)x^2+(2a_2+a_4+a_5)y^2+(2a_3+a_5+a_6)z^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{3}{2}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1}(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\alpha=2a_1+a_4+a_6,\beta=2a_2+a_4+a_5,\gamma=2a_3+a_5+a_6.$

利用球坐标得 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi.$

由对标性 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi.$

故
$$\oint\!\!\oint_S H(x,y,z)\mathrm{d}S=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{15}\pi(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=\frac{6}{15}\pi(2a_1+2a_2+2a_3+2a_4+2a_5+2a_6)$$
$$=\frac{4}{5}\pi(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6).$$

998.(中山大学)　计算曲线积分 $\int_L\frac{xz^2\mathrm{d}s}{x^2+y^2}$,其中 L 是空间螺线 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=at(a>0)$ 上对应于 $t=0$ 与 $t=2\pi$ 的两点之间的一段曲线弧.

解 $\int_L \frac{xz^2}{x^2+y^2}ds = \int_0^{2\pi} \frac{a^3t^2\cos t}{a^2}\sqrt{a^2+a^2}dt = \sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi} t^2\cos t dt$
$= 4\sqrt{2}\pi a^2$.

§2 第二型曲线积分与曲面积分

【内容综述】

一、综述

1. 定义

(1) 第二型曲线积分的定义

设 L 为 xy 平面内从点 A 到点 B 的一条有向光滑曲线段，函数 $p(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上有界，在 L 上沿 L 的方向任意插入一点到 $M_0(x_0,y_0)$，$M_1(x_1,y_1)$，……$M_n(x_n,y_n)$，其中 $M_0=A$，$M_n=B$，将 L 分成 n 个有向弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$（$i=1,2,\cdots\cdots,n$），记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$，分别为 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 在 x 轴正向，y 轴正向的有向投影，(ξ_i,η_i) 为 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任取定的点 $\|T\|$ 为每个小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 长度的最大值，作和数 $\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$，$\sum_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$；如果 $\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$，$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ 总存在，则称它们的极限值分别为 $P(x,y)$ 在有向曲线 L 上沿 x 轴的第二型曲线积分，$Q(x,y)$ 在有向曲线 L 上沿 y 轴的第二型曲线积分，分别记为 $\int_L P dx$，$\int_L Q dy$，并且 $\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$，称为 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在有向曲线 L 上的第二型曲线积分，记为 $\int_L Pdx + Qdy$，其中 $\int_L Pdx + Qdy = \int_L Pdx + \int_L Qdy$.

类似可定义 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在空间有向曲线 L 上的第二型曲线积分，记为 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$，其中 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L Pdx + \int_L Qdy + \int_L Rdz$.

(2) 第二型曲面积分的定义

设 S 为光滑的有向曲面，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 S 上有界，把 S 任意分成 n 块小有向曲面，Δs_i，$i=1,2,\cdots\cdots,n$，记 Δs_i 在 xy 平面上的有

向投影为$(\Delta s_i)_{xy}$，(ξ_i,η_i,ζ_i)为Δs_i上任取定的一点，$\|T\|$为每个Δs_i的直径中的最大者，作和数，$\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta s_i)_{xy}$.

如果$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta s_i)_{xy}$总存在，则称此极限值为$R$任有向曲面$S$上沿$xy$平面的第二型曲面积分，记为$\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

类似可定义

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta s_i)_{yz},$$

$$\iint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta s_i)_{zx},$$

分别为P在有向曲面S上沿yz平面的第二型曲面积分，Q在有向曲面S上沿zx平面的第二型曲面积分，并且称

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\triangleq\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

为P,Q,R在有向曲面S上的第二型曲面积分.

2. 性质

第二型曲线(曲面)积分除只有第一型曲线(曲面)积分的运算性质(即线性性，曲线曲面可加性)外，还具有有向性

即$\int_{L^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,

$$\int_{L^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=-\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

$$\iint_{S^-}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 第一、二型积分的关系

第一、二型曲线积分的关系

设平面有向曲线L上任一点的切线正向的方向角为$\alpha,\beta\left(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s=\int_L(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s.$$

设空间有向曲线L上任一点的切线正向的方向角为α,β,ν，则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s.$$

第一、二型曲面积分的关系

设空间有向曲面 S 上任一点的法线正向的方向角为 α,β,γ，则

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s.$$

4. 常用公式

(1) 计算公式

(ⅰ) 第二型曲线积分的基本(参数方程) 计算公式

设平面有向光滑曲线 $L = \overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \leqslant t \leqslant \beta$，且当参数 t 由 α 变到 β 时，曲线 L 上动点 (x,y) 从 L 的起点 A 运动到终点 B，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上连续，则

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t.$$

特别当 $L: y = \varphi(x), a \leqslant x \leqslant b$ 时，且起点对应 $x = a$，终点对应 $x = b$，则

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_a^b [P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)]\mathrm{d}x.$$

当 $L: x = \psi(y), c \leqslant y \leqslant \mathrm{d}$ 时且起点对应 $y = c$，终点对应 $y = \mathrm{d}$，则

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_c^d [P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y)]\mathrm{d}y.$$

同理，设空间有向光滑曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

其中 L 的起点对应 $t = \alpha$，L 的终点对应 $t = \beta$，则 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z =$
$\int_\alpha^\beta [P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t) + R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)]\mathrm{d}t.$

注：用公式计算应注意下限与起点对应，上限与终点对应.

(ⅱ) 第二型由面积分的基本计算公式

设 P、Q、R 是定义在有向光滑曲面 S 上的连续函数，且 S 的方程为 $z = z(x,y),(x,y) \in D_{xy}$ 其中 D_{xy} 为 S 在 xy 平面上的投影，则

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iint_{D_{xy}} P[x,y,z(x,y)] \cdot z_x'\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -\iint\limits_{D_{xy}} Q[x,y,z(x,y)]z'_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\iint\limits_S R\mathrm{d}z\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 取上侧.

同理,当 S 的方程为 $x = x(y,z)$ 或 $y = y(x,z)$ 时,有类似的计算公式

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint\limits_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -\iint\limits_{D_{yz}} Q(x(y,z),y,z)x'_y,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint\limits_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{yz}} R(x(y,z),y,z)x'_z\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 S 取前侧

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iint\limits_{D_{xz}} P(x,y(x,z),z)y'_x\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

$$\iint\limits_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint\limits_{D_{xz}} (x,y(x,z),z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

$$\iint\limits_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xz}} R(x,y(x,z),z)y'_z\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

(2) 格林公式

格林公式:设平面有界区域 D 的边界为 L, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 及边界 L 上具有一阶连续的偏导数则 $\oint\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D (\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 L 取正向,

注:① 若 D 为单连通区域, L 的正向为逆时针方向.

若 D 为多连通区域, L 的正向由外边界的逆时针方向和内边界的顺时针方向构成。

② 若 $P = -y, Q = x$ 则 $\triangle D = \frac{1}{2}\oint\limits_c x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ 其中 $\triangle D$ 为区域 D 的面积

格林第二公式

$$\oint\limits_L \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}s = \iint\limits_D \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 为光滑封闭曲线 L 所围成的区域，$\frac{\partial u}{\partial \nu}$，$\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别表示 u,v 沿 L 的外法线方向 $\vec{n}$ 的方向导数，$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\Delta v = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$，$L$ 取正向.

注：$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L (-P\cos(\widehat{\vec{n},y}), + Q\cos(\widehat{\vec{n},x}))\mathrm{d}s$，

其中 $(\widehat{\vec{n},x})$，$(\widehat{\vec{n},y})$ 表示 L 的法线正向 $\vec{n}$ 的方向角.

(3) 奥高公式

设空间有界区域 V 的边界为 S，函数 P,Q,R 在 V 及 S 上具有一阶连续的偏导数，则

$$\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 S 取正侧.

注：当 V 为单连通时，S 的正侧为外侧.

当 V 为多连通时，S 的正侧由外边界的外侧和内边界的内侧构成.

(4) 斯托克斯公式

设 S 是逐片光滑曲面，其边界为逐段光滑曲线 L，曲面 S 的正侧与 L 的正向符合右手法则，如果 P,Q,R 在 S 及 L 上均具有一阶连续的偏导数，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + P\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

注：右手法则：设 S 是空间上的光滑曲面，其边界曲线为 L，取定 S 的一侧为正侧，伸开右手手掌，以拇指方向指向此侧的法线正向，其余四指伸开微曲，并使曲面 S 在手掌的左侧，则其余四指所指的方向就是边界曲线 L 的正向，反之亦然。

5. 常用结果

(1) 平面区域 D 的面积公式：

$$\Delta D = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x,$$

其中 L 为 D 的正向.

(2) 设 L 为任一条封闭光滑曲线，

则 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0, & \text{当 } L \text{ 不包围原点，且}(0,0) \notin L \text{ 时}, \\ 2\pi, & \text{当 } L \text{ 包围原点时} \end{cases}$

(3) 高斯积分

$$(\text{i})\ I=\oint_L \frac{\cos(\widehat{\vec{r},\vec{n}})}{|\vec{r}|^2}ds$$

$$=\begin{cases}0, \text{当 } L \text{ 不包围}(x_0,y_0), \text{且}(x_0,y_0)\notin L \text{ 时},\\ 2\pi, \text{当 } L \text{ 包围}(x_0,y_0) \text{ 时},\end{cases}$$

其中$|\vec{r}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $\vec{r}=\{x-x_0,y-y_0\}$, L为无重点的光滑封闭曲线, $\vec{n}$表示 L 的外法线方向.

$$(\text{ii})\ I=\oint\!\!\!\oint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2}ds$$

$$=\begin{cases}0, \text{当 } S \text{ 不包围}(x_0,y_0,z_0), \text{且}(x_0,y_0,z_0)\notin S \text{ 时}\\ 4\pi, \text{当 } S \text{ 包围}(x_0,y_0,z_0) \text{ 时}.\end{cases}$$

其中 S 是光滑封闭曲面, $\vec{r}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$, $|\vec{r}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, $\vec{n}$ 表示 S 的外法线方向.

二、解题方法

1. 考点 1　第二型积分的计算

常用方法

(1) 基本计算法, 即利用参数方程或化二重积分公式计算

(2) 格林公式或奥高公式

(3) 利用积分与路径无关

(4) 利用常用结果

(5) 利用曲线与坐标轴的垂直关系或曲面与坐标面的垂直关系(第3题)

(6) 化第一型积分

2. 考点 2, 积分等式证明

常用方法

(1) 利用两类积分的关系.

(2) 利用格式公式.

(3) 利用奥高公式.

(4) 利用积分与路径无关.

【经典题解】

999. (北京大学, 2001 年)　求常数 λ, 使得曲线积分

$$\int_L \frac{x}{y}r^\lambda dx-\frac{x^2}{y^2}r^\lambda dy=0. \ (r=\sqrt{x^2+y^2}).$$

对上半平面内任何光滑闭曲线 L 成立.

解　记 $P=\frac{x}{y}r^{\lambda},Q=-\frac{x^2}{y^2}r^{\lambda}$.

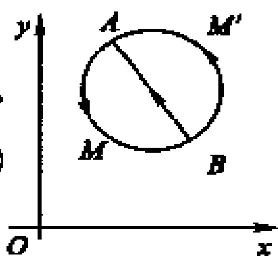
由题设知,所考虑积分在上半平面内与路径无关,所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,即

$$-\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}+\lambda x(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}-1}=-\frac{2x}{y^2}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}-\frac{\lambda x^3}{y^2}(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}-1},$$

即 $-\frac{x}{y^2}+\frac{\lambda x}{x^2+y^2}=-\frac{2x}{y^2}-\frac{\lambda x^3}{y^2(x^2+y^2)}$,即 $x^3+xy^2=-\lambda(x^3+x^2y^2)$,所以 $\lambda=-1$.

1000.(湖北大学,2001 年)　计算曲线积分

$\int\limits_{AMB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$,其中 $\varphi(y)$,$\varphi'(y)$ 为连续函数,AMB 为连续点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 的任何路线,但与线段 AB 围成已知大小为 S 的面积.



第 1000 题图

解　设曲线 AMB 如图,则 $\int\limits_{AMB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$.

$$=\oint\limits_{AMBA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy-\int\limits_{BA}[\varphi(y)e^x-my]dx$$

$$+[\varphi'(y)e^x-m]dy=m\iint\limits_{D}dxdy+\int\limits_{AB}\varphi(y)e^xdx+\varphi'(y)e^xdy+\int\limits_{AB}-mydx$$

$-mdy$

$$=mS+\varphi(y)e^x\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}-m\int\limits_{AB}(ydx+dy).$$

由于 $\overline{AB}$ 方程为 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$,

则 $dy=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}dx$,那么

原式 =

$$mS+\varphi(y_2)e^{x_2}-\varphi(y_1)e^{x_1}-m\int_{x_1}^{x_2}[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}]dx$$

$$=mS+\varphi(y_2)e^{x_2}-\varphi(y_1)e^{x_1}+\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1)-m(y_2-y_1)$$

当曲线如 $AM'B$ 时,

原式 $= \oint_{AMBA}[\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy -$

$\int_{BA}(\varphi(y)e^x - my)dx + (\varphi'(y)e^x - m)dy$

$= -mS + \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - m(y_2 - y_1).$

1001.（武汉大学，1994 年） 计算积分

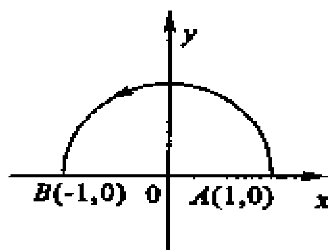
$$I = \int_{c^+}(-2xe^{-x^2}\sin y)dx + (e^{-x^2}\cos y + x^4)dy,$$

其中 c^+ 为从点(1,0)到点(-1,0)的半圆 $y = \sqrt{1-x^2}(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

解 记 $P = -2xe^{-x^2}\sin y, Q = e^{-x^2}\cos y + x^4$.

如图示补充 $\overline{BA}: y = 0(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

由格林公式



第 1001 题图

$$I = \oint_{c^+ + \overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} = \iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant 0}} 4x^3dxdy$$

$$- \int_{-1}^{1} 0dx = 4\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant 0}} x^3dxdy$$

$$\xlongequal[\begin{cases}x = r\cos\theta\\ y = r\sin\theta\end{cases}]{} \int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^3\cos^3\theta \cdot rdr = \frac{4}{5}\int_0^{\pi}\cos^3\theta d\theta = 0.$$

（注：$\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant 0}} x^3dxdy = 0$ 也可直接由对称性得到）.

1002.（华中师范大学，2000 年） 求 $I = \oint_{L^+}\frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$，其中 L 为以(1,0)为圆心，R 为半径的圆周($R \neq 1$)，L^+ 表示逆时针方向.

解 记 $P = -\frac{y}{4x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}$,

则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

(1) 当 $R < 1$ 时，(0,0) 在 L 外部，由格林公式知 $I = 0$.

(2) 当 $R > 1$ 时，(0,0) 在 L 内部，以(0,0)为中心，作椭圆周 $Co: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$，使 Co 在 L 内部，由格林公式

$$I = \oint_{c_o^+}\frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{c_o^+} xdy - ydx = \frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon\cdot\pi = \pi.$$

1003.(北京大学,1995 年)　求线积分$\int_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$在下列两种曲线 C 的情况下的值.

(ⅰ) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$　(ⅱ) $|x|+|y|=1$　方向均为逆时针

解　与第 1002 题做法类似,(ⅰ) 积分值为 0,(ⅱ) 积分值为 2π.

1004.(厦门大学)　假定 C 是一个有界平面区域 D 的边界,并且是一条有连续切线方向的闭曲线,分下列(1)(2) 两种情况计算$\int_c \frac{\partial \log r}{\partial \vec{n}}ds$,这里 r 表示动点到原点的距离,$\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ 表示沿 C 的外法线方向的导数,(1) 原点不在 D 内,也不在 C 上;(2) D 包含原点.

解　记$\vec{n}=\{\cos(\widehat{\vec{n},x}),\cos(\widehat{\vec{n},y})\}$,$r=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\log r = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2),$$

则$\frac{\partial \log r}{\partial \vec{n}} = \frac{x}{x^2+y^2}\cos(\widehat{\vec{n},x}) + \frac{y}{x^2+y^2}\cos(\widehat{\vec{n},y})$,

$$\int_c \frac{\partial \log r}{\partial \vec{n}}ds = \oint_{c^+} -\frac{x}{x^2+y^2}dy + \frac{y}{x^2+y^2}dx.$$

与第 1002 题方法类似

(1) 积分值为 0.

(2) 积分值为 2π.

1005.(北京大学,1990 年)　计算第二型曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} (y^2+x)dx - (x^3+y)dy,$$

其中 $A=(0,0)$,$B(a,0)$,$\widehat{AB}: x^2+y^2=ax(y\geqslant 0)$.

解　当 $a>0$ 时,补充$\overline{BA}$,则$\widehat{AB}+\overline{BA}$ 均成封闭曲线 Γ^-.

记 $P=y^3+x$,$Q=-(x^3-y)$,

由格林公式$\int_{\widehat{AB}} = \oint_{\Gamma^-} - \int_{\overline{BA}}$

$$= -\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant ax\\ y\geqslant 0}} (-3x^2-3y^2)dxdy - \int_{\overline{BA}} = 3\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy - \int_{\overline{BA}} = \frac{3}{64}\pi a^4 - \int_{\overline{BA}}.$$

而$\overline{BA}: y=0, 0\leqslant x\leqslant a$,

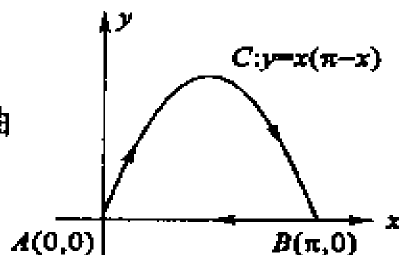
所以$\int\limits_{\overline{BA}} = \int_0^a x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}a^2.$

从而$\int\limits_{\widehat{AB}} = \frac{3}{64}\pi a^4 + \frac{1}{2}a^2.$

当 $a<0$ 时，$\widehat{AB}+\overline{BA}$ 构成 Γ^+，同理可得

$\int\limits_{\widehat{AB}} = -\frac{3}{64}\pi a^4 + \frac{1}{2}a^2.$

1006.（北京大学，1992年） (1) 计算第二型曲线积分$\int_c (\sin y + y)\mathrm{d}x + x\cos y\mathrm{d}y$，其中 C 如图；



第 1006 题图

(2)$\int_0^2 \frac{x}{e^x + e^{2-x}}\mathrm{d}x.$

解 (1) 补充$\overline{BA}: y=0, 0\leqslant x\leqslant\pi$，则 $C+\overline{BA}$ 构成封闭曲线 Γ^-，由格林公式$\int_c = \oint_{\Gamma^-} - \int\limits_{\overline{BA}} = -\iint\limits_D(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{\overline{BA}} = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{\overline{BA}}.$

而 $D: 0\leqslant y\leqslant x(\pi-y), 0\leqslant x\leqslant\pi$. $\overline{BA}: y=0\quad 0\leqslant x\leqslant\pi$.

所以 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^{x(\pi-x)}\mathrm{d}y = \frac{\pi^3}{6}.$

$\int\limits_{\overline{BA}} = \int_\pi^0 o\mathrm{d}x = 0.$

从而$\int_c = \frac{\pi^3}{6}.$

(2) 因$\int_0^2 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}\mathrm{d}x \xlongequal{t=2-x} -\int_2^0 \frac{2-t}{e^t+e^{2-t}}\mathrm{d}t =$

$\int_0^2 \frac{2}{e^t+e^{2-t}}\mathrm{d}t - \int_0^2 \frac{t}{e^t+e^{2-t}}\mathrm{d}t$

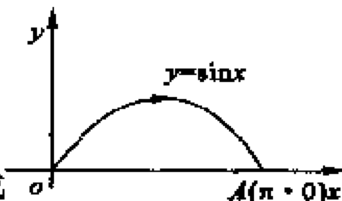
所以$\int_0^2 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2}{e^t+e^{2-t}}\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{1}{e^t+e^{2-t}}\mathrm{d}t$

$= \int_0^2 \frac{e^{t-2}}{e^{2(t-1)}+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{e}\int_0^2 \frac{e^{t-1}}{(e^{t-1})^2+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{e}\arctan e^{t-1}\Big|_0^2$

$= \frac{1}{e}(\arctan e - \arctan\frac{1}{e}).$

1007.（华东师范大学，2001 年） 求曲线积分

$$I = \int_{\widehat{OA}} (y^2 - \cos y)\mathrm{d}x + x\sin y\mathrm{d}y.$$



第 1007 题图

解　记 $P = y^2 - \cos y, Q = x\sin y$,

补充:$\overline{AO}: y = 0(0 \leqslant x \leqslant \pi)$,则$\widehat{OA} + \overline{AO}$构成封闭曲线 Γ^-,由格林公式

$$I = \oint_{\Gamma^-} - \int_{\overline{AO}} = -\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\overline{AO}}.$$

$$= 2\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\overline{AO}} = 2\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} y\mathrm{d}y - \int_{\overline{AO}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_{\overline{AO}}$$

而$\int_{\overline{AO}} = \int_{\pi}^{0}(-1)\mathrm{d}x = \pi$,

所以 $I = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$.

1008.(武汉大学,1998 年)　设 Ω 为 xy 平面上具有光滑边界的有界闭区域,$u \in C^2(\Omega) \cap C'(\overline{\Omega})$,且 u 为非常值函数及 $u|_{\partial\Omega} = 0$,证明

$$\iint_{\Omega} u \cdot (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 0.$$

证　由格林公式知　$\int_{\partial\Omega} - u \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$

$$= \iint_{\Omega}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega} u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$,

所以$\iint_{\Omega} u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\Omega}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

又 u 为非常值函数,故

$(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \neq 0$,再注意到$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 的连续性

所以$\iint_{\Omega} u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 0.$

1009.(哈尔滨工业大学,2002 年)　求$\iint_{\Sigma} y^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ 其中 Σ 是 $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1$ 和坐标面在第一卦限所围成曲面外侧.

解　记 $P = xz, Q = x^2 y, R = y^2 z$,

由奥高公式,所求积分

$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$,其中

$V: 0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2, (x,y) \in D = \{x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$

$= \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} (x^2+y^2+z)\mathrm{d}z = \iint\limits_D \frac{3}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\xlongequal{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}} \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4 \cdot r\mathrm{d}r = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}$.

1010.(北京航空航天大学) 计算 $J = \iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$,被 $z=0, z=3$ 截的部分外侧.

解 分别补充圆柱体 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 与 $z=0, z=3$ 的交面 $S_{1下}, S_{2上}$,

$S_{1下}: z = 0$,

$(x,y) \in \{x^2+y^2 \leqslant 1\}, S_{2上}: z = 3, (x,y) \in \{x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

记 $P = x, Q = y, R = z$,

由奥高公式 $J = \oiint\limits_{\Sigma+S_{1下}+S_{2上}} - \iint\limits_{S_{1下}} - \iint\limits_{S_{2上}} = 3\iiint\limits_V \mathrm{d}v - \iint\limits_{S_{1下}} - \iint\limits_{S_{2上}}$

$= 9\pi - \iint\limits_{S_{1下}} - \iint\limits_{S_{2上}}$

而 $S_1 \perp xy$ 平面,yz 平面;$S_2 \perp xy$ 平面,yz 平面,所以 $\iint\limits_{S_{1下}} = 0$,

$\iint\limits_{S_{2下}} = 3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\pi$.

从而 $J = 9\pi - 3\pi = 6\pi$.

1011.(华中理工大学,1997年) 设空间区域 Ω 由曲面 $z = a^2 - x^2 - y^2$ 与平面 $z = 0$ 围成,其中 a 为正的常数,记 Ω 表面的外侧为 S,Ω 的体积为 V,求证

$$V = \oiint\limits_S x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xy^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(1+xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 由奥高公式

右边 $= \iiint\limits_\Omega (2xyz^2 - 2xyz^2 + 1 + 2xyz)\mathrm{d}v = \iiint\limits_V (1+2xyz)\mathrm{d}v$

$= V + \iiint\limits_V 2xyz\mathrm{d}v$.

又 V分别关于$y=0,x=0$平面对称，且$2xyz$既是y的奇函数，也是x的奇函数，故 $\iiint\limits_V 2xyz\mathrm{d}v=0$.

所以右边 = V = 左边.

1012.（华中理工大学，2000 年） 设 Σ 是球面$x^2+y^2+z^2=25$的内侧，f,g,h 是连续可微函数，求

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[f(yz)-\frac{xy^2}{2500\pi}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+$$

$$\left[g(zx)-\frac{yz^2}{2500\pi}\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[h(xy)-\frac{zx^2}{2500\pi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 由奥高公式知

$I=-\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 25}\left(-\dfrac{y^2+z^2+x^2}{2500\pi}\right)\mathrm{d}v=\dfrac{1}{2500\pi}\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$（利用球坐标）

$$=\frac{1}{2500\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^5 r^4\cdot\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{2500\pi}\cdot\frac{1}{5}\cdot 5^5=1.$$

1013.（华中理工大学 ）设 V是R^3中有界区域，其体积为$1/2$，V关于平面 $x=1$对称，V的边界是光滑闭曲面Σ，α 是Σ的外向法矢与正x轴的夹角，求 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\cos\alpha\mathrm{d}s$.

解 由奥高公式

$$I=\iint\limits_{\Sigma_{外}}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V(2x)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_V x\mathrm{d}v.$$

令 $x=x'+1,y=y',z=z'$，由于 V关于面$x=1$对称，则对应的 V' 关于面 $x'=0$对称.

且 $I=2\iiint\limits_{V'}(x'+1)\mathrm{d}v'=2\iiint\limits_{V'}\mathrm{d}v'+2\iiint\limits_{V'}x'\mathrm{d}v'=2\Delta V'$

而平移变换不改变立体的体积.

所以 $\Delta V'=\Delta V=1/2$，从而 $I=2\cdot\Delta V'=1$.

1014.（湖北大学，2002 年） 计算

$$\iint\limits_S[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，S 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限上侧.

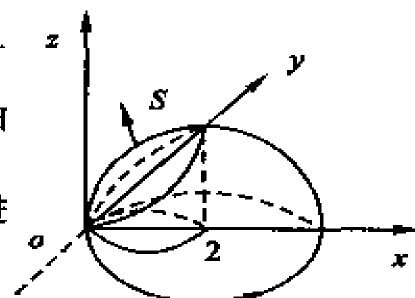
解 因 $S:z=1-x+y,(x,y)\in\mathrm{D}=\left\{(x,y)\left|\begin{matrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1\leqslant y\leqslant 0\end{matrix}\right.\right\}$.

所以，所求积分

$$I=-\iint_D[f(x,y,1-x+y)+x](-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D[2f(x,y,1-x+y)+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D[f(x,y,1-x+y)+1-x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

1015.（清华大学，2001 年） 计算 $\oint_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与 $x^2+y^2=2x$ 的交线 $z\geq 0$ 的部分，曲线的方向规定为从原点进入第一卦限



第 1015 题图

解 记 $P=y^2+z^2,Q=z^2+x^2$，$R=x^2+y^2$，

由 Stokes 公式，所求积分

$$I=\iint_S(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$=2\iint_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 为球面上 L 围成的最小球面块下侧（内侧），而 $S_上$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{x-2}{2},\cos\beta=\frac{y}{z},\cos\gamma=\frac{z}{2}$，所以

$$I=-2\iint_{S_上}=-2\iint_S[(y-z)\frac{x-2}{2}+(z-x)\cdot\frac{y}{2}+(x-y)\frac{z}{2}]\mathrm{d}s.$$

$$=-2\iint_S(z-y)\mathrm{d}s=-2\iint_D z\mathrm{d}s+2\iint_S y\mathrm{d}s.$$

由于 S 关于平面 $y=0$ 对称，从面 $\iint_S y\mathrm{d}s=0$.

所以 $I=-2\iint_S z\mathrm{d}s=-2\iint_{S_上}\frac{z}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_{S_上}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-4\iint_{x^2+y^2\leq 2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\pi.$$

1016.（南京航空学院） 设有力场 $\vec{F}=\{x+2y+4,4x-2y,3x+z\}$，

试求单位质量 M，沿椭圆 $C:\begin{cases}(3x+2y-5)^2+(x-y+1)^2=a^2\\ z=4\end{cases}$ $(a>0)$

移动一周（从 z 轴正向看去为逆时针方向时），力 $\vec{F}$ 所作的功.

解 此即为求曲线积分

$$I=\int_C (x+2y+4)dx+(4x-2y)dy+(3x+z)dz.$$

由 Stokes 公式

$$I=\iint_S -3dzdx+2dxdy,$$

其中 S 为 c 围成的平面 $z=4$ 上椭圆面，方向为上侧，由于 $S\perp xz$ 平面，故 $\iint_S -3dzdx=0$.

所以 $I=2\iint_S dxdy=2\iint\limits_{(3x+2y-5)^2+(x-y+1)^2\leqslant a^2} dxdy$.

令 $\begin{cases}u=3x+2y-5\\ v=x-y+1\end{cases}$，则 $u^2+v^2\leqslant a^2$，且 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}3&2\\1&-1\end{vmatrix}=-5$.

所以 $I=2\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant a^2}\dfrac{1}{5}dudv=\dfrac{2}{5}\pi a^2$.

1017.（武汉大学，2000 年，南开大学） 计算积分

$A=\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 是球面

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧（$R>0$）.

解 利用奥高公式，再利用球坐标变换

$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\sin\varphi,\\ y=b+r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=c+r\cos\varphi,\end{cases}$ 可得 $A=\dfrac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3$.

1018.（西北电讯工程学院） 求

$$\oint\!\!\!\oint_\Sigma (x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy,$$

其中 Σ 是 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面.

解 记 $P=x-y+z, Q=y-z+x, R=z-x+y$

由奥高公式，所求积分 $I=3\iiint_V dxdydz$，其中 V 为 Σ 所围成的区域.

令$\begin{cases} u = x - y + z, \\ v = y - z + x, \\ w = z - x + y, \end{cases}$则 V 变为 V：$|u|+|V|+|W|\leqslant 1$，$\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 4$.

所以 $I = \dfrac{3}{4}\iiint\limits_{V} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \dfrac{3}{4}\cdot 8 \iiint\limits_{\substack{u+v+w\leqslant 1 \\ u\geqslant 0, V\geqslant 0, w\geqslant 0}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \dfrac{3}{4}\cdot 8\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}$

$\cdot 1 = 1$.

（注：$|u|+|v|+|w|\leqslant 1$ 关于坐标面均对称）

1019.（北京大学，1997 年）　求第二型曲面积分

$\oiint\limits_{S} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cos y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

解　由奥高公式知，所求积分

$$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} (1-\sin y)\mathrm{d}v$$

$$= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \mathrm{d}v - \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \sin y\mathrm{d}v.$$

由于 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，关于平面 $y=0$ 对称，$\sin y$ 为 y 的奇函数，故 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \sin y\mathrm{d}v = 0$.

所以 $I = \dfrac{4}{3}\pi$.

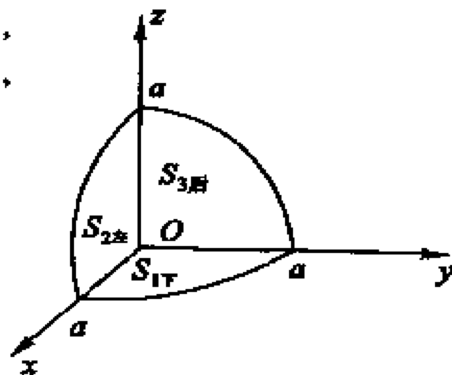
1020.（武汉大学，2001 年）　计算 $\iint\limits_{S} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ 在第一卦限部分并取球面外侧（$a>0$）.

解　如图示补充平面块 $S_{1下}, S_{2左}, S_{3后}$，则 $S+S_{1下}+S_{2左}+S_{3后}$ 构成封闭曲面 Σ 外侧，由奥高公式，所求积分

$$I = \iint\limits_{\Sigma_外} - \iint\limits_{S_{1下}} - \iint\limits_{S_{2左}} - \iint\limits_{S_{3后}}$$

$$= 3\iiint\limits_{V} x^2\mathrm{d}v - \iint\limits_{S_{1下}} - \iint\limits_{S_{2左}} - \iint\limits_{S_{3后}}$$

$$= \frac{\pi}{10}a^5 - \iint\limits_{S_{1下}} - \iint\limits_{S_{2左}} - \iint\limits_{S_{3后}}$$



第 1020 题图

又 $S_1 \perp yz$ 平面，$S_2 \perp yz$ 平面，故 $\iint\limits_{S_{1下}} = \iint\limits_{S_{2左}} = 0$.

$S_{3后}: x = 0$，故 $\iint\limits_{S_{3后}} x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{S_{3后}} o\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$.

所以 $I = \dfrac{\pi}{10}a^5$.

1021.（中国地质大学，2002 年） 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x(y^2 + z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

解 设 V 为球：$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$，则由 *Gauss* 公式及对称性，有

$$\oiint\limits_{\Sigma} x(y^2 + z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V} (y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\iiint\limits_{V} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\iiint\limits_{V} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{4\pi}{5}R^5 = \frac{8\pi}{15}R^5.$$

1022.（中国人大 2000 年） $I = \iint\limits_{S} 4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1 - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为 yoz 平面上的曲线 $z = \mathrm{e}^y (0 \leqslant y \leqslant a)$ 绕 z 轴旋转成的曲面的下侧.

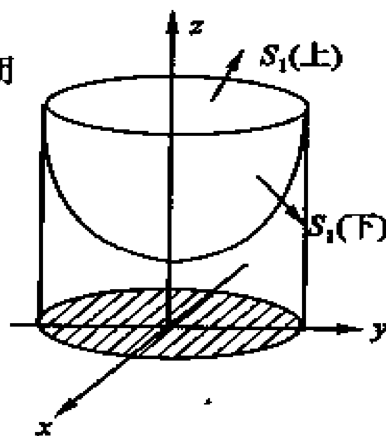
解 如图示，补充平面块

$S_1: z = \mathrm{e}^a$，方向取上侧，使 $S_{1上} + S_{下}$ 构成封闭曲面 Σ 的外侧，所以由奥高公式得

$$\iint\limits_{\Sigma} 4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1 - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint\limits_{V} o\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

其中 V 为 Σ 所围成的区域.



第 1022 题图

又 $S_{1上}: z = \mathrm{e}^a$，在 xy 平面上的投影区域 D：$x^2 + y^2 \leqslant a^2$，从而 $\iint\limits_{S_{1上}} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1 - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} (1 - \mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (1 - \mathrm{e}^{2a})a^2\pi$，

所以 $I = \iint\limits_{\Sigma} - \iint\limits_{S_{1上}} = 0 - (1 - \mathrm{e}^{2a})a^2\pi = (\mathrm{e}^{2a} - 1)a^2\pi$.

1023.（上海交通大学） 计算线积分 $\int_{ABC}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$，其中 ABC 为三点 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0)$ 连成的折线.

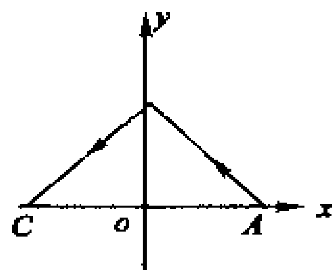
解 如图示 $ABC=\overline{AB}+\overline{BC}$

$\overline{AB}:y=1-x\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\overline{BC}:y=1+x,$

$-1\leqslant x\leqslant 0$

所以 $\int_{ABC}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_{AB}\frac{dx+dy}{x+y}+\int_{BC}\frac{dx+dy}{y-x}$

$=\int_1^0(1-1)dx+\int_0^{-1}(1+1)dx=-2.$



第 1023 题图

1024.（辽宁师范大学） 计算曲线积分

$\int_{L^+}y^2dx+z^2dy+x^2dz$，其中 $L^+:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+y^2=Rx\end{cases}(R>0,Z\geqslant 0)$，$L^+$ 的指向为顺时针方向.

解 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+y^2=Rx\end{cases}$ 变形为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\(x-\frac{R}{2})^2+y^2=(\frac{R}{2})^2\end{cases}$

故 L 的参数方程为

$x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos\theta,y=\frac{R}{2}\sin\theta,z=R\sin\frac{\theta}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

所以 $\int_{L^+}y^2dx+z^2dy+x^2dz=\int_{2\pi}^{0}[(\frac{R}{2}\sin\theta)^2(-\frac{R}{2}\sin\theta)+(R\sin\frac{\theta}{2})^2\cdot\frac{R}{2}\cos\theta+R^2(\frac{1+\cos\theta}{2})^2\cdot\frac{R}{2}\cos\frac{\theta}{2}]d\theta=\frac{\pi R^3}{4}.$

1025.（西南师范大学） 证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}=0.$

证 记 $P=\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2},Q=\frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}.$

由于 $\sqrt{P^2+Q^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+xy+y^2)^2}=\frac{R}{(R^2+xy)^2},$

$(x,y)\in\{x^2+y^2=R^2\}$

且在 $x^2+y^2=R^2$ 上，$xy\geqslant-\frac{x^2+y^2}{2}=-\frac{R^2}{2},$

所以 $\sqrt{P^2+Q^2}=\frac{R}{(R^2+xy)^2}\leqslant\frac{R}{(R^2-\frac{R^2}{2})^2}=\frac{4}{R^3},$

从而 $\max\limits_{x^2+y^2=R^2}\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant\dfrac{4}{R^3}$.

又 $\left|\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}\right|\leqslant 2\pi R\cdot\max\limits_{x^2+y^2=R^2}\sqrt{R^2+Q^2}\leqslant\dfrac{8\pi}{R^3}$.

故 $\lim\limits_{R\to+\infty}\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}=0$.

1026.(延边大学,西北电讯工程学院)　证明:

$$\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_S u\cdot\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint\limits_C u\cdot\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s.$$

式中光滑曲线 C 包围着有界域 S,$\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}$ 为沿 C 的外法线的导函数(即方向导数),$\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$.

证　记 $\vec{n}$ 的单位向量为 $\vec{n}=\{\cos(\widehat{\vec{n},x}),\cos(\widehat{\vec{n},y})\}$.

则 $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos(\widehat{\vec{n},x})+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos((\widehat{\vec{n},y}))$.

由 $\oint$ 两类曲线积分的关系及格林公式得

$$\oint\limits_C u\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s=\oint\limits_S\left[u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\widehat{\vec{n},x})+u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\widehat{\vec{n},y})\right]\mathrm{d}s$$

$$=\oint\limits_{C^+}u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x.$$

$$=\iint\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_S u\cdot\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故等式成立.

1027.(武汉大学)　计算积分 $\iint\limits_{S_{外}}x(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$S_{外}$ 为以坐标原点为心的单位球面外侧.

解　记 $P=x(y^2+z^2),Q=R=0$.

由奥高公式得

$$\iint\limits_{S_外} x(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(y^2+z^2)\mathrm{d}v \xlongequal{\begin{cases} z = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ x = r\cos\varphi \end{cases}}$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r.$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cdot\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi-1)\mathrm{d}\cos\varphi = \frac{2\pi}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8\pi}{15}.$$

注:在作球坐标变换时可将 x,z 的位置调换,计算比较简单.

1028.(北京科技大学 1996 年) 设 u 在闭区域 $V: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 内存在二阶连续偏导数,$\triangle u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

证明:$\displaystyle\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_V u\triangle u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 又其中 $\vec{n}$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外法向量.

证 设 $\vec{n} = \{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

则 $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

由第一、二型曲线积分的关系有:

$$\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}s$$

$$= \oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\right)$$

$$\xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+ \iiint\limits_V u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_V u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

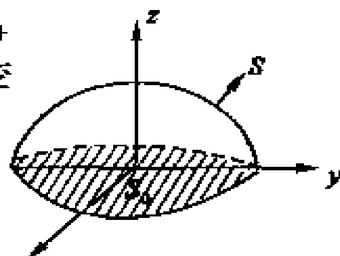
1029.(复旦大学) 计算

$$\iint\limits_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^2y-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

S 是半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, S 的方向是使其法向量和 z 轴正向的夹

角为锐角.

解　如图示补充 xy 平面上圆面 S_0 下侧，则 $S_上 + S_{0下}$ 均成封闭曲面 Σ 的外侧，由奥高公式及球坐标变换



第 1029 题图

$$\iint\limits_{\Sigma外} = \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\\ z\geqslant 0}} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d} = \frac{2}{5}\pi a^5.$$

而 $S_0: z = 0$，且在 xy 平面上的投影

$D: x^2 + y^2 \leqslant a^2$，

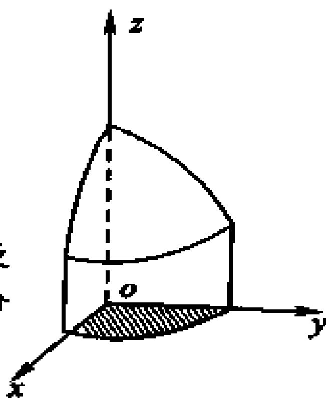
$$\therefore \iint\limits_{S_{0下}} = -\iint\limits_{S_{0上}} = -\iint\limits_{D} 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,\text{(根据对称性)}$$

$$\therefore \iint\limits_{S} = \iint\limits_{\Sigma} - \iint\limits_{S_{0下}} = \frac{2}{5}\pi a^5.$$

1030.（南京大学）　计算曲面积分

$$\iint\limits_{S} yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

此处 S 是由圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$，三个坐标平面及旋转抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 所围立体在第一卦限部分的外侧面.



第 1030 题图

解　由奥高公式得所求积分记为 I，则

$$I = \iiint\limits_{V} (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $V = \{\{(x,y,z) \mid 0 \leqslant z \leqslant 2 - x^2 - y^2, (x,y) \in D\}$，

$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases}$，则 $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2 - r^2$.

$$\text{则 } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2-r^2}(r\cos\theta + r\sin\theta + z)\cdot r\mathrm{d}z.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1[r^2(\cos\theta+\sin\theta)(2-r^2) + \frac{1}{2}(2-r^2)^2 r]\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{7}{15}(\cos\theta+\sin\theta) + \frac{7}{12}]\mathrm{d}\theta = \frac{7}{12}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{7}{15}\cdot 2 = \frac{7}{24}\pi + \frac{14}{15}.$$

1031.（山东工学院）　利用格林公式计算积分

$$\oint_C e^x(1-\cos y)dx - e^x(y-\sin y)dy,$$

其中 C 为域 $0<x<\pi, 0<y<\sin x$ 的边界正向.

解　由格林公式知所求积分(记为 I)

$$I = \iint\limits_{\substack{0\le x\le \pi\\ 0\le y\le \sin x}} [-e^x(y-\sin y) - e^x\sin y]dxdy = -\iint\limits_{\substack{0\le x\le \pi\\ 0\le y\le \sin x}} e^x y dxdy$$

$$= -\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x} e^x y dy.$$

$$= -\int_0^\pi \frac{1}{2}e^x\sin^2 x dx = \frac{-1}{2}\int_0^\pi e^x\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\int_0^\pi e^x dx - \int_0^\pi e^x\cos 2x dx\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^\pi - 1 - \int_0^\pi e^x\cos 2x dx\right) = -\frac{1}{4}\left[e^\pi - 1 - \frac{1}{5}(e^\pi - 1)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}(e^\pi - 1) = \frac{1}{5}(1-e^\pi).$$

1032.(大连铁道学院)　计算曲线积分 $\int_C e^x(\cos y dx - \sin y dy)$,其中 C 是从坐标原点起,经曲线 $y=x^2$ 到点 (a,a^2) 的路径.

解　因 $\frac{\partial}{\partial x}(-\sin y e^x) = -e^x\sin y = \frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y)$.

所以积分与路径无关,取路径为如下折线 $(0,0)\to(a,0)\to(a,a^2)$,

$$\int_C e^x(\cos y dx - \sin y dy) = \int_0^a e^x dx - \int_0^{a^2} e^a\sin y dy = e^a(\cos a^2 - 1).$$

1033.(上海交通大学)　已知 $f(0)=\frac{1}{2}$,确定 $f(x)$,使 $\int_A^B (e^x + f(x))y dx - f(x)dy$ 与路径无关,并求当 A、B 分别为 $(0,0)$,$(1,1)$ 时,曲线积分的值.

解　由积分与路径无关的条件知

$$\frac{\partial}{\partial y}[e^x + f(x)y] = \frac{\partial}{\partial x}[-f(x)],$$

即 $e^x + f(x) = -f'(x)$,亦即 $f'(x) + f(x) = -e^x$.

解此方程得 $f(x) = ce^{-x} - \frac{1}{2}e^x$.

又 $f(0)=\frac{1}{2}$,从而 $\frac{1}{2} = c - \frac{1}{2}$,即 $c=1$.

所以所求函数 $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}e^x$.

取连结 $A(0,0)\to C(1,0)\to B(1,1)$ 的折线，

则所求积分 $=-\int_0^1(e^{-1}-\frac{1}{2}e)dy=\frac{1}{2}e-e^{-1}$.

1034.（苏州丝绸工学院） 计算曲线积分 $\int_C -ydx+xdy$，式中 C 是沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $A(2,0)$ 到 $O(0,0)$ 的有向弧段.

解 补充线段 OA，再利用格林公式，并注意到 $\int_{\overline{OA}} -ydx+xdy=0$，立即可得所求积分值为 π.

1035.（北京航空航天大学） 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的导函数，求 $\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$，其中 L 是从点 $A(3,\frac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段.

解 因为 $\frac{\partial}{\partial y}[\frac{1+y^2f(x,y)}{y}]=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)$

$=\frac{\partial}{\partial x}[xf(xy)-\frac{x}{y^2}]$.

所以在不含 x 轴上点的区域内，上述积分与路径无关，取折线 ACB，其中 $C(1,\frac{2}{3})$，则所求积分（记为 I），

$$I=\int_3^1[\frac{3}{2}+\frac{2}{3}f(\frac{2}{3}x)]dx+\int_{\frac{2}{3}}^2[f(y)-\frac{1}{y^2}]dy$$

$$=-4+\int_3^1\frac{2}{3}f(\frac{2}{3}x)dx+\int_{\frac{2}{3}}^2 f(y)dy$$

$$\xlongequal{u=\frac{2}{3}x}-4+\int_2^{\frac{3}{2}}f(u)du+\int_{\frac{2}{3}}^2 f(y)dy.$$

1036.（解放军通讯工程学院） 证明：积分

$$\oint_L(y\sin x+\cos y)dx+(xy^3-x\sin y+8y^3)dy=0,$$

其中 L 为对称于坐标原点的平面闭曲线，且平行于坐标轴的直线与 L 的交点不多于两个.

证 因 $\oint_L(y\sin x+\cos y)dx+(xy^3-x\sin y+8y^3)dy$

$=\oint_L\cos ydx+(-x\sin y+8y^2)dy+\oint_L y\sin xdx+xy^3dy=I_1+I_2$.

对于 I_1，由格林公式易知 $I_1=0$

对于 I_2，由于 L 关于原点对称，且 $y\sin x$ 及 xy^3 在中心对称点处的值均相等，故根据对称性知 $I_2=0$，所以 $I=I_1+I_2=0$。

1037.（天津大学） 求曲线积分 $\oint\limits_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$ 的值，其中 C 为任一不通过原点的简单光滑正向封闭曲线.

解 当 C 不包围原点时，由格林公式得积分值为 0.

当 C 包围原点时，作以原点为中心的椭圆周 $C_0: x^2+4y^2=\varepsilon^2$，使 C_0 包含在 C 的内部，则由多连通区域上的格林公式，得

$$\oint\limits_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\oint\limits_{C_0} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_0} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{2}{\varepsilon^2}\Delta D_0$$

$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\pi=\pi.$$

其中 $D_0: x^2+4y^2\leqslant\varepsilon^2$，$\Delta D_0$ 为 D_0 的面积.

1038.（天津大学） 计算曲线积分

$\int\limits_C \frac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}\mathrm{d}x+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]\mathrm{d}y$，其中 C 是圆周 $x^2+y^2=R^2$ 由点 $A(R,0)$ 依逆时针方向到 $B(-R,0)$ 的半圆，R 是大于零的常数.

解 记 $P(x,y)=\frac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}$，$Q(x,y)=4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})$.

并补充直线段 $\overline{BA}$，$y=0$，$-R\leqslant x\leqslant R$ 则由格林公式，得所求积分（记为 I）.

$$I=\int\limits_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint\limits_{C+\overline{BA}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int\limits_{\overline{BA}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ y\geqslant 0}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-R}^{R} o\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ y\geqslant 0}} 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4\cdot\pi R^2}{2}=2\pi R^2.$$

1039.（山东大学） 计算 $I=\oint\limits_l (yx^3+e^y)\mathrm{d}x+(xy^2+xe^y-y^2)\mathrm{d}y$，其中 l 是对称于坐标轴的任一封闭曲线.

解 记 D 为 l 所围成的区域，由格林公式

$$I=\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^3+xe^y-y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(yx^3+e^y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (y^2-x^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$= \iint_D y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D x^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又由题设知 D 关于坐标轴对称，且 y^3 为奇函数，x^3 也是奇函数，所以 $\iint_D y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 = \iint_D x^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

从而 $I = 0 - 0 = 0$.

1040.（中国科学院） 求曲线积分 $2 = \oint_c \frac{(x+4y)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$ 之值，其中 C 为单位圆的正向.

解 记 $P = \frac{x-y}{x^2+4y^3} Q = \frac{x+4y}{x^2+4y^2}$，当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4y^2 - 8xy - x^2}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

(1) 当 $(0,0)$ 在单位圆 C 外时，由格林公式知 $I = 0$.

(2) 当 $(0,0)$ 在单位圆 C 内时，以 $(0,0)$ 为中心作包含于 C 内部的椭圆 C：$x^2 + 4y^3 = \varepsilon^2$，由格林公式（多连通区域情形）知

$$I = \oint_{c_0} \frac{(x+4y)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{c_0} (x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y.$$

$$\xlongequal{\text{格林公式}} \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{x^2+4y^2 \leqslant \varepsilon^2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \pi = \pi.$$

1041.（湖南大学） 设函数 $f(u)$ 连续，C 为平面上逐段光滑的闭曲线，证明：$\oint_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = 0$.

证 因 $f(u)$ 连续，故存在原函数，记 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数，即 $F'(u) = f(u)$.

又 $\mathrm{d}F(x^2+y^2) = F'(x^2+y^2)(2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y)$

$= 2f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)$,

$\therefore f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}F(x^2+y^2)\right]$,

即 $f(x^2+y^3)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)$ 是 $\frac{1}{2}F(x^2+y^2)$ 的全微分，从而

$$\oint_c f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = 0.$$

1042.（清华大学） 已知 C 是平面上任一简单闭曲线，问常数 a 等于何值时，曲线积分 $\oint_C \frac{x\mathrm{d}x - ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 0$.

解　记 $P=\frac{x}{x^2+y^2}, Q=\frac{-ay}{x^2+y^2}$

则　$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2axy}{(x^2+y^2)^2}$.

(1) 若原点在 C 外，欲使积分为零必须且只须 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 即

$\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2axy}{(x^2+y^2)^2}, \therefore a=-1$.

(2) 若原点在 C 内，由多连通区域上的格林公式知，当 $a=-1$ 时，

$$\oint_C \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{x^2+y^2=1}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{x^2+y^2\leqslant 1} x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y)-\frac{\partial}{\partial y}(x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

所以，当 $a=-1$ 时，总有 $\oint_C \frac{x\mathrm{d}x-ax\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$.

1043.（山东海洋学院）　空间区域 V 由光滑闭曲面 S 所围成，设函数 $u(x,y,z)$ 是在闭区域 $\overline{V}$ 上连续的调和函数(即) 满足

$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0)$，证明

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}x=0,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ 是 u 沿曲面 S 外法线的方向导数.

证　由奥高公式. 记 $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 表示 S 的外法线方向的单位方向向量.

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}s$$

$$=\iint_S \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v$$

$$=0.$$

注：$u(x,y,z)$ 为单连通区域 V 内调和函数的充要条件是对于 V 内任一光滑封闭曲线 S，总有

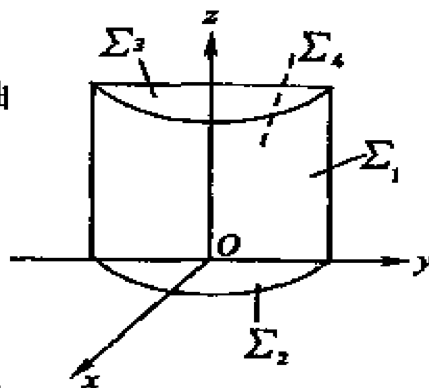
$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s=0,$$

其中$\vec{n}$表示 S 的外法线方向.

1044.(上海交通大学) 计算 $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中$\sum_1$为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上 $x\geqslant 0,0\leqslant z\leqslant 1$ 的部分,它的法线与 ox 轴正向成锐角;$\sum_2$为 xoy 平面上半圆域:$x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0$ 的部分,它的法线与 oz 轴正向相反.

解 如图示,补充$\sum_{3上},\sum_{4后}$则

$\sum_{1前}+\sum_{2下}+\sum_{4后}+\sum_{3上}$构成封闭曲面$\sum$的外侧,由奥高公式



第 1044 题图

$$\oiint\limits_{\Sigma_外}=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial y}(xy)+\frac{\partial}{\partial z}(z+1)\right]\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_V(x+1)\mathrm{d}v,$$

其中 $V=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 1,(x,y)\in D\},D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0\}$.

令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=z\end{cases}$

则
$$\oiint\limits_{\Sigma_外}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a\mathrm{d}r\int_0^1(r\cos\theta+1)r\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a(r^2\cos\theta+r)\mathrm{d}r$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^3}{3}\cos\theta+\frac{a^2}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{2a^3}{3}+\frac{\pi}{2}a^2.$$

又 $\sum_3:z=1$ 从而 $\iint\limits_{\Sigma_{3上}}=\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\cdot\frac{a^2}{2}\pi=\pi a^2,$

$\sum_4\perp xy$ 平面,$\sum_4\perp xz$ 平面,从而 $\iint\limits_{\Sigma_{4后}}=0.$

$$\therefore\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}=\iint\limits_{\Sigma}-\iint\limits_{\Sigma_{3上}}-\iint\limits_{\Sigma_{4后}}=\frac{2}{3}a^2+\frac{\pi}{2}a^2-\pi a^2=\frac{2}{3}a^3-\frac{\pi}{2}a^2.$$

1045.(上海交通大学) 计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz$,其中$\sum$为由曲面 $y=x^2+z^2$ 与平面 $y=1,y=2$,所围立体表面的外侧.

解 如图示 $\sum_{外}=S_{1下}+S_{3下}+S_{2上}$.

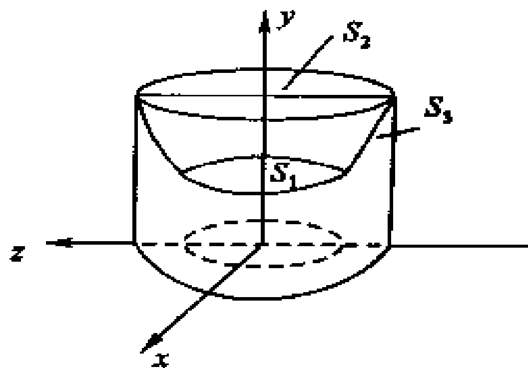
而 $S_1: y=1, D_{xz}: x^2+z^2\leqslant 1$

$S_2: y=2, D_{xz}: x^2+z^2\leqslant 2$

$S_3: y=x^2+z^2, D_{xz}:$

$1\leqslant x^2+z^2\leqslant 2$

∴ 所求积分(记为 I)



第 1045 题图

$$I=\iint\limits_{S_{1下}}\frac{e}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz+\iint\limits_{S_{3下}}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz+\iint\limits_{S_{2上}}\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz$$

$$=-e\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz-\iint\limits_{1\leqslant x^2+z^2\leqslant 2}\frac{e^{\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz+\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant 2}\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz$$

$$\xlongequal{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ z=r\sin\theta\end{cases}}-e\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{r}\cdot rdr-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}\frac{e^r}{r}\cdot rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{e^{\sqrt{2}}}{r}rdr$$

$$=-2\pi e-2\pi(e^{\sqrt{2}}-e)+2\pi\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$$

$$=2\pi(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}-e^{\sqrt{2}})=2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}\pi.$$

1046.(西安交通大学) 设 $f(u)$ 具有连续导函数,计算积分

$$\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+[\frac{1}{2}f(\frac{y}{z})+y^3]dzdx+[\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^2]dxdy,$$

其中$\sum$为 $x>0$ 的锥面 $y^2+z^2-x^2=0$ 与球面 $x^2+y^3+z^2=1, x^2+y^2+z^2=4$ 所围立体表面的外侧.

解 记 $P=x^3, Q=[\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3], R=\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3$

由奥高公式得所求积分

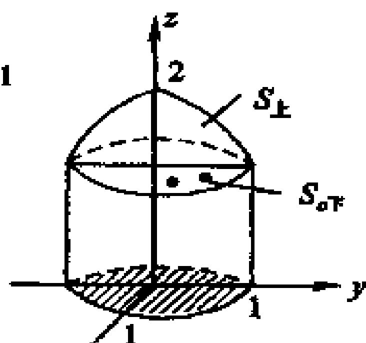
$$I = 3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \xrightarrow[\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\sin\varphi\sin\theta \end{cases}]{\text{利用球坐标}} 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{93}{5}(2-\sqrt{2})\pi.$$

1047.(浙江大学) 求曲面积分

$$I = \iint\limits_S (y^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是曲面 $z = 2-x^2-y^2 (1 \leqslant z \leqslant 2)$ 的上侧.



第 1047 题图

解 如图示补充 $S_{o下}: z = 1, D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 1$

则由奥高公式 $I = \displaystyle\oiint\limits_{S+S_{0下}} - \iint\limits_{S+S_{0下}}$

$$= \iiint\limits_V (-3)\mathrm{d}v - \iint\limits_{S_0下} (x^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iiint\limits_V \mathrm{d}v + \iint\limits_{D_{xy}} (x^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi = -\frac{9}{4}\pi.$$

(其中 $V = \{(x、y、z) \mid 1 \leqslant z \leqslant 2-x^2-y^2, (x,y) \in D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 1\}$)

1048.(同济大学) 计算曲面积分

$I = \displaystyle\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\sum$ 是锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z = 0$ 和 $z = 1$ 所截部分的外侧.

解 补充锥体与 $z = 1$ 交面 S_0 的上侧,由奥高公式

$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma+S_{0上}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V 2z\mathrm{d}v$($V$ 为 $\sum + S_0$ 所围成的区域)

$$= 2\iiint\limits_V z\mathrm{d}v \text{(采用柱坐标)}$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_r^1 z\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}.$$

又 $S_0: z = 1$,在 xy 平面上的投影为 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

所以 $\iint\limits_{S_{0上}} = \iint\limits_{S_{0上}}(1-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi$(注：$S_0\perp xz$ 平面，$S_0\perp yz$ 平面)

从而 $I = \frac{\pi}{4} - (-\pi) = \frac{5\pi}{4}$.

1049.(西安公路学院) 设 $f(u)$ 有连续的一阶导数，计算

$\oiint\limits_{\Sigma} \frac{1}{y}f(\frac{x}{y})\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{1}{x}f(\frac{x}{y})\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 是 $y = x^2 + z^2$，$y = 8 - x^2 - z^2$ 所围立体的外侧.

解 记 Ω 为 $\sum$ 所围成的区域

$P = \frac{1}{y}f(\frac{x}{y}), Q = \frac{1}{x}f(\frac{x}{y}), R = z.$

则 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - x^2 - z^2, (x,z) \in D\}$，

$D = \{x^2 + z^2 \leq 4\}$.

并由奥高公式得 所求积分(记为 I)

$$I = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y}) - \frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y}) + 1\right)\mathrm{d}v$$

$$= \iiint\limits_{V}\mathrm{d}v(\text{采用坐标变换})\begin{cases} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \\ y = y \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}r\int_{r^2}^{8-r^2} r\mathrm{d}y = 16\pi.$$

1050.(北京航空航天大学) 设 L 为不经过点$(a,0)$的光滑闭曲线，逆时针方向，求 $I = \oint\limits_L \frac{y}{(x-a)^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\mathrm{d}y = ?$

解 记 $P = \frac{y}{(x-a)^2+y^2}, Q = -\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-a)^2 - y^2}{[(x-a)^2+y^2]} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

若$(a,0)$不在 L 所围成的区域，则由格林公式

$I = 0$.

若$(a,0)$在 L 所围成的区域内，以$(a,0)$为心，适当正数 r 为半径作圆周 C_1，使 C_1 包含在此区域内则由格林公式

$$I = \oint\limits_{C_1}\frac{y}{(x-a)^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{r^2}\oint\limits_{C_1} y\mathrm{d}x - (x-a)\mathrm{d}y$$

$= -\frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r^2 = -2\pi.$

1051.(华中师范大学) 设 $f(x,y)$ 在闭曲线 C 所围成的区域 D 上连续且为调和函数,则 $\oint_C f \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dxdy$,其中 $\vec{n}$ 为 C 的外法线方向.

证 设 $\vec{n} = \{\cos(\widehat{\vec{n},x}), \cos(\widehat{\vec{n},y})\}$ 其中 $\cos(\widehat{\vec{n},x}), \cos(\widehat{\vec{n},y})$ 为 $\vec{n}$ 的方向余弦,则

$$\oint_C f \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \oint_C \left[f \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\vec{n},x) + f \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\cos(\vec{n},y)\right] ds$$

$$= \oint_C f \cdot \frac{\partial f}{\partial x} dy - f \cdot \frac{\partial f}{\partial y} dx$$

$$= \iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dxdy + \iint_D f \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy$$

又 f 为调和函数即 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

所以 $\oint_C f \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dxdy$.

1052.(华中师范大学) 计算 $I = \oint_C y dx + z dy + x dz$,

其中 C 是圆周:$x^2 + y^2 + z^2 = 2a(x+y)$,$x + y = 2a$,方向为逆时针.

解 由 Stokes 公式

$$I = \oint_C y dx + z dy + x dz = -\iint_S dxdy + dydz + dzdx,$$

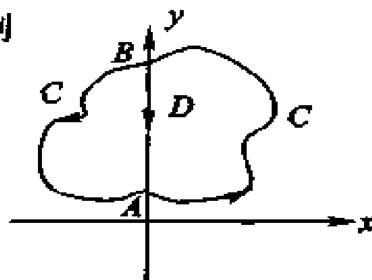
其中 S 为平面 $x + y = 2a$ 上的圆面,方向向外.

由 $S \perp xy$ 平面,S 在 xz 平面,yz 平面上的投影为

$$D_{xz}: (x-a)^2 + \frac{z^2}{2} = a^2, D_{yz}: (y-a)^2 + \frac{z^2}{2} = a^2.$$

所以 $I = -2\iint_{D_{xz}} dzdx = -2\pi a \cdot \sqrt{2}a = -2\sqrt{2}\pi a^2$.

1053.(复旦大学,1996年) 设 C 为连接点 $A(0,c)$ 和 $B(0,d)$($c > d$)的任一光滑曲线,方向由 A 到 B,它和线段 AB 所围图形的面积为 A,又设 $\psi(y)$ 是连续可微函数,计算 $I = \int_C [\psi(y)e^x - my]dx + [\psi'(y)e^x - m]dy$.



第 1053 题图

解 当 C 位于 y 轴右侧时(如图示)补充 $\overline{BA}$,则 $\overline{BA}+C$ 构成闭曲线 Γ^{+} 由格林公式

$$I=\iint_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}[\psi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\psi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y$$

$$=mA-\int_{\mathrm{d}}^{c}[\psi'(y)-m]\mathrm{d}y$$

$$=mA-\psi(c)+\psi(\mathrm{d})+m(c-\mathrm{d})$$

$$=m(A+c-\mathrm{d})+\psi(\mathrm{d})-\psi(c).$$

当 C 位于 y 轴左侧时,$\overline{BA}+C$ 构成 Γ^{-}. 由格林公式 $I=-\iint_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}$ $=-mA+\psi(\mathrm{d})-\psi(c)+m(c-\mathrm{d})=m(-A+c-\mathrm{d})+\psi(\mathrm{d})-\psi(0)$.

1054.(天津大学,1998 年) 设 $\alpha'(x),\beta'(x)$ 存在连续且 $\alpha(0)=-1$, $\beta(0)=0$,已知对任一简单光滑闭曲线 Γ,有

$$\oint_\Gamma[x\alpha(x)+\beta(x)y^2+3x^2y]\mathrm{d}x+[y\alpha(x)+\beta(x)]dy=0,$$

求 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$.

解 由题设知,所考虑积分与路径无关

所以 记 $P=[x\alpha(x)+\beta(x)]y^2+3x^2y,Q=y\alpha(x)+\beta(x)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

即 $2y(x\alpha(x)+\beta(x))+3x^2=y\alpha'(x)+\beta'(x)$,即

$y(2x\alpha(x)+2\beta(x)-\alpha'(x))=\beta'(x)-3x^2$.

把上式看成 y 的多项式,比较系数得

$$\begin{cases}2x\alpha(x)+2\beta(x)-\alpha'(x)=0,\\ \beta'(x)-3x^2=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\beta(x)=x^3+C_1=x^3,(\text{注意 }\beta(0)=0),\\ \alpha(x)=c_2\mathrm{e}^{x^2}-(x^2+1)=-(x^2+1),(\text{注意 }\alpha(0)=-1).\end{cases}$

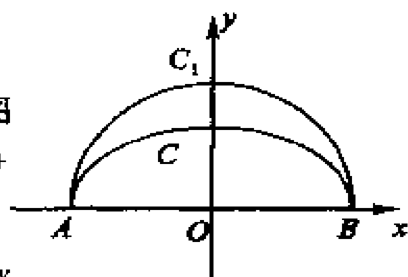
1055.(湖北大学,2002 年) 计算曲线积分

$I=\int_C\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$,其中 C 是从 $A(-a,0)$ 经上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\geqslant b)$ 到 $B(a,0)$ 的弧段.

解 记 $P=\frac{x-y}{x^2+y^2},Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$,

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

所以此积分在上半平面内与路径无关，如图示取以(0,0)为心，a 为半径的上半圆周 $C_1(x^2+y^2=a^2)$，则



第1055题图

$$I=\int_{C_1}\frac{1}{a^2}(x-y)\mathrm{d}x+\frac{1}{a^2}(x+y)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\sin\theta\end{cases}}\frac{1}{a^2}\int_{\pi}^{0}[a^2(\cos\theta-\sin\theta)(-\sin\theta)+a^2(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\pi.$$

附录:模拟试题及答案

模拟试题(一)

一、判断题(6′ × 4 = 24′,华中师范大学)

1. 两个周期函数的和一定是周期函数.　　(　　)

2. 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$或$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.　　(　　)

3. $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$收敛.　　(　　)

4. 函数$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$在区间$(0,1)$上不一致连续.　　(　　)

二、计算题(7′ × 3 = 21′)

5.(中山大学,1999年)　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} t(\mathrm{e}^t - 1)\mathrm{d}t}{x^4\sin^2 x}$.

6.(复旦大学,1999年)　已知$z(x,y) = (xy)^x$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

7.(北京大学,2000年)　求e^{2x-x^2}到含x^5项的*Taylar*(台劳)展开式.

三、解答题(11′ × 5 = 55′)

8.(北京航空航天大学,2001年)　求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$的收敛域及和函数.

9.(清华大学,1999年)　求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}[n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1)]^n$.

10.(北京师范大学,1997年)　设$a_1 > b_1 > 0$,且

$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}, (n = 2,3,\cdots)$

证明:数列$\{a_n\}\{b_n\}$的极限存在,且都等于$\sqrt{a_1 b_1}$.

11.(厦门大学,2001年)　计算$I = \oint_C (y+z)\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$,其中$C$是上半球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2(z \geqslant 0)$与圆柱面$x^2 + y^2 = Rx(R > 0)$的交线从$z$轴正向看去按逆时针方向.

12.(中国人民大学,2001年)　设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上可导,且$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = f(1)$.证明:存在$\xi \in (0,1)$使得$f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

模拟试题(二)

一、选择题($4' \times 4 = 16'$,华中师范大学)

1. 如果 $f(x)$ 是偶函数且可导,则 ( )

(A)$f(0)=0$ (B)$f(0)=1$

(C)$f'(0)=1$ (D)$f'(0)=0$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(-x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{\sin x}=$ ( )

(A)1 (B)0 (C)-1 (D)不存在

3. 下列广义积分收敛的是 ( )

(A)$\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ (B)$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos 4x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(C)$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x,(p\leqslant 1)$ (D)$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x,(p\leqslant 1)$

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\sin xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 则 ( )

(A)f 在点(0,0)不连续

(B)f 在点(0,0)连续,可微

(C)f 在点(0,0)连续,不可微

(D)$f(0,1)=1$

二、计算题($7'\times 5 = 35'$)

5.(中国人民大学,2000年) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

6.(山东大学) $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

7.(复旦大学,1996年) 求$\int\dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

8.(武汉大学,2000年) 求函数 $f=x^2+y^2+z^2$ 在 $ax+by+cz=1$ 下的最小值.

9.(北京大学,1996年) 求积分 $\iiint\limits_D(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的值,其中 D 是由平面 $x+y+z=1$,以及三个坐标平面所围成的区域.

三、解答题($49'$)

10.（12′ 华中理工大学，2000年） 展开 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$ 为 x 的幂级数.

11.（12′，哈尔滨工业大学，1999年） 设 $x_0=1$，

$x_n=\frac{2+x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，$(n=1,2,\cdots)$.

证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

12.（13′，中国科学院） 求曲线积分 $I=\oint_C\frac{(x-4y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$ 之值，其中 C 为单位圆的正向.

13.（12′，南开大学，2000年） 设 $f(x)$，$g(x)$ 都于区间 I 一致连续，且有界. 证明：$F(x)=f(x)g(x)$ 也于 I 一致连续.

参考答案

模拟试题(一)

一、($6'\times 4=24'$)

1. 命题错. 比如 $f(x)=\sin x, g(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数}\\0, x\text{ 为无理数}\end{cases}$

令 $F(x)=f(x)+g(x)$,则 $f(x)$ 周期为 2π, $g(x)$ 周期为有理数.

$$F(x)=\begin{cases}1+\sin x, x\text{ 为有理数},\\ \sin x, x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

可以证明 $F(x)$ 不是周期函数,用反证法,设 $F(x)$ 有周期 $T(>0)$.

若 $T=r$ 为有理数,则

$F(0)=1$,而 $F(0+r)=1+\sin r\neq 1$,故 $F(0)\neq F(0+r)$,矛盾. 若 T 为无理数. 则由

$F(0)=F(0+T)$,可得 $T=2k_0\pi+\frac{\pi}{2}, k_0\in N$.

再由 $F(T+T)=F(4k_0\pi+\pi)=0\neq F(T)=1$,也得矛盾.

2. 命题错. 此如 $x_n=\begin{cases}1, n\text{ 为奇数},\\0, x\text{ 为偶数},\end{cases}\quad y_n=\begin{cases}0, n\text{ 为偶数},\\1, n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$. 但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 都不存在.

3. 命题对. 因为

$$\lim_{x\to1-0}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}=\lim_{x\to1-0}\frac{x^4}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}.$$

由柯西判别法的极限形式可知瑕积分 $\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$ 收敛.

4. 命题对. 令 $x_n=\frac{2}{n}, x_n'=\frac{2}{n+1}$,当 $0<\varepsilon_0<1, \forall\delta>0$ 只要 n 充分大,总可使

$|x_n-x'_n|=\frac{2}{n(n+1)}<\delta$,

但　$|f(x_n)-f(x'_n)|=1>\varepsilon_0$.

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

二、$(7' \times 4 = 21')$

5. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot x^2(e^{x^2}-1)}{4x^3\sin^2 x + x^4\sin 2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(e^{x^2}-1)}{4\sin^2 x + x\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4xe^{x^2}}{4\sin 2x + \sin 2x + 2x\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{5\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x} + \cos 2x} = \frac{1}{3}.$$

6. $\ln z = x(\ln x + \ln y)$，对 x 求导 $\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \ln x + \ln y + 1$，

$\therefore \dfrac{\partial z}{\partial x} = (xy)^x(1 + \ln x + \ln y)$.

$z = (xy)^x = x^x\cdot y^x$，对 y 求导得

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^x\cdot xy^{x-1} = x^{x+1}y^{x-1}$.

7. $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \dfrac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$.

故 $e^{2x-x^2} = 1 + (2x - x^2) + \dfrac{1}{2!}(2x - x^2)^2 + \dfrac{1}{3!}(2x - x^2)^3 +$

$$\frac{1}{4!}(2x - x^2)^4 + \frac{1}{5!}(2x - x^2)^5 + o(x^2)$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5).$$

三、解答题$(11' \times 5 = 55')$

8. 令 $x^2 = y$，$a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n}$.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$，故级数的收敛半径为 1.

又当 $x = \pm 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n}$ 发散，故原级数的收敛域为 $(-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}$$

$$= \ln(1 + x^2) + \frac{2x^2}{1 + x^2}.$$

即　和函数为 $\ln(1 + x^2) + \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$，$(-1 < x < 1)$.

9. $\because n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = n\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right]$

$$= 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}[n(e^{\frac{1}{n}} - 1)]^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}))\right)^n = e^{\frac{1}{2}}$.

10. b_n 是调和平均，a_n 是算术平均. 先证

$b_n \leqslant a_n \quad (n = 1,2,\cdots)$. ①

$\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \geqslant \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$,

两边平方 $\frac{(a_{n-1} + b_{n-1})^2}{4} \geqslant a_{n-1}b_{n-1}$,

两边同乘 $\frac{2}{a_{n-1} + b_{n-1}}$ 得

$\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \geqslant \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}$，此即 $a_n \geqslant b_n$.

再证 $\{a_n\}$ 单调下降.

$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \leqslant \frac{a_{n-1} + a_{n-1}}{2} = a_{n-1}, \quad (n = 2,3\cdots)$. ②

再证

$a_nb_n = a_1b_1, (n = 1,2,\cdots)$ ③

$\because b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} = \frac{a_{n-1}b_{n-1}}{\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}} = \frac{a_{n-1}b_{n-1}}{a_n}$,

$\therefore a_nb_n = a_{n-1}b_{n-1}$.

从而 $a_nb_n = a_{n-1}b_{n-1} = a_{n-2}b_{n-2} = \cdots = a_1b_1$.

再证 $\{b_n\}$ 单调上升.

$\because b_n = \frac{a_1b_1}{a_n}$，$a_n$ 单调下降，故 b_n 单调上升.

但 $a_n \geqslant b_n \geqslant b_1$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$(存在).

$b_n \leqslant a_n \leqslant a_1$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$(也存在).

再由 $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$，$b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}$ 求极限有

$s = \frac{s + l}{2}$，$l = \frac{2sl}{s + l}$，解得 $s = l$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

再由 ③ 式有 $l^2 = a_1b_1$，$l = \sqrt{ab}$.

11. 证 $p = y + z, Q = z, R = y$,由 stokes 公式

$$I = \iint_{S_上} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial Z} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{S_上} \mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $S: Z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

S 在 xy 平面上的投影 $D_{xy}: \left(x - \frac{R}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$,

故 $\iint_{S_上} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi R^2}{4}$.

由于被积函数为常数和 $S_上$ 在 $y = 0$ 平面上下两部分对称,方向相反,则 $\iint_{S_上} \mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$. $\therefore I = -\frac{\pi R^2}{4}$.

12. 令 $F(t) = \int_0^t xf(x)\mathrm{d}x - t^2 f(t), t \in [0,1]$,

那么由假设可知 $F(t)$ 在区间[0,1]上满足罗尔定理的条件,从而 $\exists \xi \in (0,1)$,使 $F'(\xi) = 0$,即

$\xi f(\xi) - 2\xi f(\xi) - \xi^2 f'(\xi) = 0$,

解得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

模拟试题(二)

一、$(4' \times 4 = 16')$

1.(D). $f(-x) = f(x)$, $\therefore -f'(-x) = f'(x)$,将 $x = 0$ 代入即证 $f'(0) = 0$.

2.(B). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = -\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

3.(B). $\left| \dfrac{\cos 4x}{1 + x^2} \right| \leqslant \dfrac{1}{1 + x^2}$,且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \pi$ 收敛.

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos 4x}{1 + x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

4.(C).

二、$(7' \times 5 = 35')$

5. 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - 1}{1 + e^{2x}}.$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \tan x - \cot x + C.$

8. 令 $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(ax + by + cz - 1)$,则

$$\begin{cases} L_x = 2x + \lambda a = 0, \\ L_y = 2y + \lambda b = 0, \\ L_z = 2z + \lambda c = 0, \\ L_\lambda = ax + by + cz - 1 = 0. \end{cases}$$

解得 $x = \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2}, y = \frac{b}{a^2 + b^2 + c^2}, z = \frac{c}{a^2 + b^2 + c^2}$

且最小值为 $f = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}.$

9. 由 x, y, z 的对称性,则

$$\begin{aligned} \iiint\limits_D (x + y + z) dx dy dz &= 3 \iiint\limits_D z dx dy dz \\ &= 3 \iint\limits_{D_{xy}} dx dy \int_0^{1-x-y} z dz \\ &= \frac{3}{2} \iint\limits_{D_{xy}} (1 - x - y)^2 dx dy \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x)^3 dx = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

三、(49′)

10. 显然 $\left| \frac{x}{1-x} \right| < 1$,解得 $x < \frac{1}{2}$.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}.$$

而$\frac{x}{1-2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1-2x}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n,\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right).$$

$\therefore f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n,\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right).$

11. $x_n=\frac{2+x_{n-1}}{1+x_{n-1}}(n=1,2,\cdots,)x_0=1$ 可得

$x_n=1+\frac{1}{1+x_{n-1}}\geqslant 1(n=1,2,\cdots,)$

$|x_{n+1}-x_n|=\frac{|x_n-x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}\leqslant\frac{1}{4}|x_n-x_{n-1}|,$

$\therefore$ 数列$\{x_n\}$收敛，令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则

$l=\frac{2+l}{1+l}$，解得 $l=\sqrt{2}$ 或 $l=-\sqrt{2}$(舍去).

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}.$

12. 记 $P=\frac{x-y}{x^2+4y^2},Q=\frac{x+4y}{x^2+4y^2}$，当$(x,y)\neq(0,0)$时，则

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4y^2-8xy-x^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$

因为$(0,0)$在单位圆 C 内，以$(0,0)$为中心，作包含于 C 内部的椭圆 $C_0:x^2+4y^2=\varepsilon^2$. 由格林公式(多连通区域情形)知

$$I=\oint_{c}\frac{(x+4y)dy+(x-y)dx}{x^2+4y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{c_0}(x-y)dx+(x+4y)dy$$

$$\xlongequal{\text{格林公式}}\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{x^2+4y^2\leqslant\varepsilon^2}2dxdy=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot2\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\pi=\pi.$$

13. 由题设知 $\exists M>0$，有

$|f(x)|<M,|g(x)|<M,\forall x\in I.$

再由 $f(x),g(x)$ 都一致连续，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$ 和 $\delta_2>0$，使

$\forall x_1,x_2\in I,|x_1-x_2|<\delta_1$ 时，有

$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2M},$

$\forall x_3,x_4\in I,|x_3-x_4|<\delta_2$ 时，有

$|g(x_3)-g(x_4)|<\frac{\varepsilon}{2M}$.

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则对上述 ε,及 $\forall x',x''\in I$,当 $|x'-x''|<\delta$ 时,

$$|F(x')-F(x'')|=|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|$$
$$=|f(x')g(x')-f(x')g(x'')+f(x')g(x'')-f(x'')g(x'')|$$
$$\leqslant|f(x')|\cdot|g(x')-g(x'')|+|g(x'')|\cdot|f(x')-f(x'')|$$
$$\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.$$

即证 $F(x)$ 在 I 上一致连续.